

Relatividad General – 2do. cuatrimestre de 2022

Guía 4: *Derivada covariante, conexión, curvatura, vectores de Killing.*

1. La derivada de una función f en la dirección de un vector \vec{U} es $\nabla_{\vec{U}}f = U^\mu \partial_\mu f$, donde U^μ son las componentes de \vec{U} en la base coordenada $\{\partial_\mu\}$, con $\partial_\mu = \partial/\partial x^\mu$. La derivada $\nabla_{\vec{U}}\vec{V}$ de un vector \vec{V} en la dirección de otro vector \vec{U} , implica la derivación de las componentes del vector \vec{V} y de la base a la que esas componentes se refieren: si $\vec{V} = V^\mu \vec{e}_\mu$ entonces

$$\nabla_{\vec{U}}\vec{V} = (\nabla_{\vec{U}}V^\mu) \vec{e}_\mu + V^\mu (\nabla_{\vec{U}}\vec{e}_\mu), \quad (1)$$

donde $\{\vec{e}_\mu\}$ es una base del espacio de vectores en el punto donde se realiza la derivación.

- a) En un espacio euclídeo la base coordenada $\{\partial_x, \partial_y, \partial_z, \dots\}$ es una base de versores ortogonales: $\partial_x = \hat{e}_x$, etc. (¿por qué?). Dé argumentos para afirmar que las derivadas de los versores cartesianos son nulas en cualquier dirección. ¿Qué conceptos entraron en sus argumentos? (paralelismo, módulo, etc.)
- b) Conociendo que los versores cartesianos tienen derivada nula es posible derivar cualquier vector en un espacio euclídeo. Así en el plano euclídeo (x, y) definimos

$$\nabla_{\vec{U}}\vec{V} = (U^\mu \partial_\mu V^x) \hat{e}_x + (U^\mu \partial_\mu V^y) \hat{e}_y. \quad (2)$$

Calcule $\nabla_{\partial_\mu} \partial_\nu$ para los elementos $\{\partial_r, \partial_\theta\}$ de la base coordenada polar y para los elementos $\{\hat{e}_r, \hat{e}_\theta\}$ de la base de versores polares.

Nota: para que \vec{U} en $\nabla_{\vec{U}}\vec{V}$ indique tan sólo la dirección de derivación se debe cumplir que $\nabla_f \nabla_{\vec{U}}\vec{V} = f \nabla_{\vec{U}}\vec{V}$ para toda función f (es decir que las derivadas de las componentes de \vec{U} no intervienen).

2. Una *derivación covariante* de vectores puede definirse en cualquier variedad diferenciable mediante las derivadas de los elementos de la base de vectores $\{\vec{e}_\alpha\}$. Los valores que damos a las cantidades

$$\nabla_{\vec{e}_\beta} \vec{e}_\alpha = \Gamma^\lambda_{\alpha\beta} \vec{e}_\lambda \quad (3)$$

constituyen una *conexión* sobre la variedad diferenciable. Definiendo $V^\mu_{;\nu} = \partial_\nu V^\mu$ y

$$V^\mu_{;\nu} = V^\mu_{,\nu} + \Gamma^\mu_{\lambda\nu} V^\lambda, \quad (4)$$

se tiene que

$$(\nabla_{\vec{U}}\vec{V})^\mu = (U^\nu \nabla_{\partial_\nu} \vec{V})^\mu = U^\nu V^\mu_{;\nu}. \quad (5)$$

- a) Encuentre cómo se transforman los elementos $\Gamma^\lambda_{\mu\nu}$ de la conexión en una base coordenada. Ayuda: la base coordenada cambia según $\partial_{\mu'} = (\partial x^\mu / \partial x^{\mu'}) \partial_\mu$.

- b) Muestre que $V^\mu_{;\nu}$ transforma como las componentes de un tensor de tipo $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$.
- c) Usando que $W_\mu V^\mu$ es invariante y que, por lo tanto, $\nabla_{\vec{U}}(W_\mu V^\mu) = U^\nu \partial_\nu(W_\mu V^\mu)$, demuestre que

$$(\nabla_{\vec{U}} \tilde{W})_\mu = U^\nu W_{\mu;\nu} \quad (6)$$

donde

$$W_{\mu;\nu} = W_{\mu,\nu} - \Gamma^\lambda_{\mu\nu} W_\lambda. \quad (7)$$

Como conclusión obtenga las derivadas covariantes $\nabla_{\partial_\nu} \tilde{d}x^\mu$ de los elementos de la base dual coordenada $\{\tilde{d}x^\mu\}$.

3. La *torsión* es un tensor \mathbf{T} de tipo $\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$ asociado a la conexión, definido por la relación

$$\mathbf{T}(\vec{U}, \vec{V}) = \nabla_{\vec{U}} \vec{V} - \nabla_{\vec{V}} \vec{U} - [\vec{U}, \vec{V}], \quad (8)$$

donde $[\ , \]$ representa el conmutador.

- a) Para la conexión en S^2 en la ecuación (15), calcule las componentes de la torsión en la base $\{\vec{e}_\theta, \vec{e}_\varphi\}$.
- b) Muestre que en una base coordenada las componentes de la torsión son

$$T^\lambda_{\mu\nu} = 2\Gamma^\lambda_{[\nu\mu]}. \quad (9)$$

4. Muestre que el cambio de coordenadas $x \rightarrow y$ con

$$y^\mu = x^\mu + \frac{1}{2}\Gamma^\mu_{\nu\lambda}(x_P)(x^\nu - x^\nu_P)(x^\lambda - x^\lambda_P) \quad (10)$$

anula una conexión sin torsión en el evento P para las coordenadas y .

5. Una conexión $\Gamma^\mu_{\lambda\nu}$ permite definir el tensor de Riemann, cuyas componentes en una base coordenada son

$$R^\lambda_{\mu\nu\rho} = \Gamma^\lambda_{\mu\rho,\nu} - \Gamma^\lambda_{\mu\nu,\rho} + \Gamma^\lambda_{\eta\nu}\Gamma^\eta_{\mu\rho} - \Gamma^\lambda_{\eta\rho}\Gamma^\eta_{\mu\nu}, \quad (11)$$

de modo que $R^\lambda_{\mu(\nu\rho)} = 0$. Muestre que la expresión anterior efectivamente se transforma como las componentes de un tensor en base una coordenada.

6. Muestre las siguientes igualdades:

- a) $f_{;\mu\nu} - f_{;\nu\mu} = T^\rho_{\mu\nu} f_{,\rho}$.
- b) $U^\mu V^\nu_{;\mu} - V^\mu U^\nu_{;\mu} = [U, V]^\nu + T^\nu_{\lambda\rho} U^\lambda V^\rho$.
- c) $V^\lambda_{;\nu\rho} - V^\lambda_{;\rho\nu} = R^\lambda_{\mu\rho\nu} V^\mu - T^\mu_{\rho\nu} V^\lambda_{;\mu}$.

d) $R^\lambda_{[\mu\nu\rho]} = T^\lambda_{[\mu\nu;\rho]} - T^\sigma_{[\mu\nu} T^\lambda_{\rho]\sigma}$ (primera identidad de Bianchi).

e) $R^\lambda_{\sigma[\mu\nu;\rho]} = -R^\lambda_{\sigma\tau[\mu} T^\tau_{\nu\rho]}$ (segunda identidad de Bianchi).

Nota: las conexiones con torsión nula se dicen *simétricas*, aunque sólo resultan simétricas las componentes de la conexión en una base coordenada.

7. Si la variedad es dotada de una métrica \mathbf{g} , entonces queda definida la longitud de un arco de curva como

$$d\ell^2 = g_{\mu\nu} dx^\mu dx^\nu \tag{12}$$

y podemos hablar de la longitud de la curva $\int d\ell$. De modo que la curva de longitud mínima resulta de un problema de cálculo variacional. La conexión métrica se define de manera tal que la geodésica, determinada por la ecuación $\nabla_{\vec{U}} \vec{U} = 0$, donde \vec{U} es tangente a la curva, coincida con la curva de longitud mínima. Por inspección de la ecuación de la geodésica, muestre que en coordenadas (x^1, \dots, x^n) la conexión métrica se puede escribir como

$$\Gamma^\lambda_{\mu\nu} = \frac{1}{2} g^{\lambda\alpha} (g_{\alpha\nu,\mu} + g_{\alpha\mu,\nu} - g_{\mu\nu,\alpha}). \tag{13}$$

Notar que la respuesta es única (*conexión de Levi-Civita*) si se pide que $\Gamma^\lambda_{\mu\nu} = \Gamma^\lambda_{\nu\mu}$.

8. a) Sea un sistema de coordenadas tal que $g_{0\mu} = 0 \forall \mu \neq 0$ y $g_{00} = \text{constante}$. Demuestre que las líneas coordenadas asociadas a x^0 , es decir, las curvas que satisfacen $x^\mu = \text{constante} \forall \mu \neq 0$, son geodésicas.

b) Un *sistema síncrono* (o *coordenadas normales de Gauss*) es aquel donde el intervalo es

$$ds^2 = -c^2 dt^2 + g_{ik} dx^i dx^k. \tag{14}$$

Muestre que las líneas coordenadas $x^i = \text{constante}$ son geodésicas temporales ortogonales a las hipersuperficies $t = \text{constante}$, y que la coordenada t mide el tiempo propio sobre estas líneas.

9. Muestre que en una variedad pseudo-riemanniana, una geodésica que es temporal (espacial, nula) en un punto, es temporal (espacial, nula) en todo punto, asumiendo que la conexión y la métrica son compatibles.

10. (*Repaso teórico*). Muestre que si la conexión es métrica entonces:

a) $\nabla \mathbf{g} = 0$ (compatibilidad de la métrica con la conexión). Una consecuencia importante de esta propiedad es que la derivada covariante conmuta con la operación de subir y bajar índices: $W_\mu = g_{\mu\nu} V^\nu \Rightarrow (\nabla_{\vec{U}} \vec{W})_\mu = g_{\mu\nu} (\nabla_{\vec{U}} \vec{V})^\nu$.

b) El producto escalar entre dos vectores, $\vec{U} \cdot \vec{V} = \mathbf{g}(\vec{U}, \vec{V}) = g_{\mu\nu} U^\mu V^\nu$, es invariante frente al transporte paralelo de \vec{U} y \vec{V} en cualquier dirección.

c) $\Gamma^\mu_{\mu\nu} = \partial_\nu(\log \sqrt{|g|})$, donde g es el determinante de $g_{\mu\nu}$.

d) $V^\mu_{;\mu} = \frac{1}{\sqrt{|g|}} \partial_\mu(\sqrt{|g|} V^\mu)$.

e) $F^{\mu\nu}_{;\mu} = \frac{1}{\sqrt{|g|}} \partial_\mu(\sqrt{|g|} F^{\mu\nu})$ para todo tensor $F^{\mu\nu}$ antisimétrico.

f) $g^{\mu\nu} f_{;\mu\nu} = \frac{1}{\sqrt{|g|}} \partial_\mu(\sqrt{|g|} g^{\mu\nu} \partial_\nu f)$.

g) $\text{div}_{\tilde{\Omega}} \vec{V} = V^\mu_{;\mu}$, donde $\tilde{\Omega} = \sqrt{|g|} \tilde{d}x^1 \wedge \dots \wedge \tilde{d}x^n$ es el volumen métrico.

Ayuda: puede ser útil la relación $\partial_\lambda(\log |\det a_{\mu\nu}|) = a^{\mu\nu} \partial_\lambda a_{\mu\nu}$.

11. Dotemos a la esfera S^2 de una conexión cuyas componentes en la base coordenada $\{\partial_\theta, \partial_\varphi\}$ sean

$$\Gamma^\theta_{\varphi\varphi} = -\sin \theta \cos \theta, \quad \Gamma^\varphi_{\theta\varphi} = \Gamma^\varphi_{\varphi\theta} = \cot \theta, \quad (15)$$

y cero las restantes.

a) Muestre que ∂_θ es autoparalelo ($\nabla_{\partial_\theta} \partial_\theta = 0$) sobre la esfera, mientras que ∂_φ únicamente lo es para $\theta = \pi/2$. Interprete este resultado en términos de las líneas de campo de ambos vectores.

b) Transporte paralelamente el vector $V(\theta = \theta_0, \varphi = 0) = \partial_\theta$ a lo largo de todo el círculo $\theta = \theta_0$. ¿Cuál es el cambio sufrido por el vector?

c) Muestre que Γ es la conexión métrica asociada a $d\ell^2 = d\theta^2 + \sin^2 \theta d\varphi^2$.

d) Calcule la derivada covariante de $\vec{e}_\theta = \partial_\theta$ respecto de $\vec{e}_\varphi = (\sin \theta)^{-1} \partial_\varphi$, y viceversa.

e) Utilice el resultado para calcular las componentes de la conexión en la base *anholónoma* $\{\vec{e}_\theta, \vec{e}_\varphi\}$.

f) Calcule el tensor $V^\mu_{;\nu}$ de tipo $\binom{1}{1}$ para $\vec{V} = \sin \theta \cos \theta \partial_\theta + \sin \theta \partial_\varphi$. Calcule el vector $\nabla_{\vec{U}} \vec{V}$ con $\vec{U} = \sin \theta \partial_\varphi$.

12. (*Repaso teórico*). Cuando la conexión es métrica el tensor de Riemann queda en la forma

$$R_{\lambda\mu\nu\rho} = \frac{1}{2} (g_{\lambda\rho, \mu\nu} - g_{\lambda\nu, \mu\rho} + g_{\mu\nu, \lambda\rho} - g_{\mu\rho, \lambda\nu}) + g_{\eta\kappa} (\Gamma^\kappa_{\mu\nu} \Gamma^\eta_{\lambda\rho} - \Gamma^\kappa_{\mu\rho} \Gamma^\eta_{\lambda\nu}). \quad (16)$$

a) Muestre que $R_{\lambda\mu\nu\rho} = R_{\nu\rho\lambda\mu}$.

b) Valiéndose de todas las simetrías del tensor de Riemann, muestre que el número de componentes independientes de $R_{\lambda\mu\nu\rho}$ es $n^2(n^2 - 1)/12$, siendo n la dimensión del espacio.

13. a) Muestre que la superficie de un cilindro es plana ($R_{\lambda\mu\nu\rho} = 0$). Ojo, puede resolverlo sin hacer cuentas si piensa al cilindro como un plano identificado $(x, y) \sim (x + R, y)$.
 b) Calcule las componentes del tensor de Riemann para la esfera S^2 :

$$d\ell^2 = a^2 (d\theta^2 + \sin^2 \theta d\varphi^2). \quad (17)$$

- c) Calcule las componentes del tensor de Riemann para la esfera S^3 :

$$d\ell^2 = a^2 [d\chi^2 + \sin^2 \chi (d\theta^2 + \sin^2 \theta d\varphi^2)]. \quad (18)$$

- d) Calcule las componentes del tensor de Riemann para el plano hiperbólico H^2 :

$$ds^2 = \frac{dx^2 + dy^2}{y^2}, \quad y > 0 \quad (19)$$

14. El tensor de Riemann en $n = 2$ y $n = 3$ dimensiones tiene 1 y 6 componentes independientes respectivamente. En el primer caso el tensor de Riemann se escribe en función del escalar de curvatura $R = g^{\mu\nu} R_{\mu\nu}$, siendo $R_{\mu\nu} = R^\lambda_{\mu\lambda\nu}$ el tensor de Ricci. En el segundo caso el tensor de Riemann se escribe en función del tensor de Ricci (que tiene 6 componentes independientes en $n = 3$). Las expresiones respectivas son:

- $n = 2$: $R_{\lambda\mu\nu\rho} = \frac{R}{2} (g_{\lambda\nu}g_{\mu\rho} - g_{\lambda\rho}g_{\mu\nu})$.
- $n = 3$: $R_{\lambda\mu\nu\rho} = g_{\lambda\nu}R_{\mu\rho} + g_{\mu\rho}R_{\lambda\nu} - g_{\mu\nu}R_{\lambda\rho} - g_{\lambda\rho}R_{\mu\nu} - \frac{R}{2} (g_{\lambda\nu}g_{\mu\rho} - g_{\lambda\rho}g_{\mu\nu})$.

En $n \geq 4$ se define el tensor de Weyl $C^\lambda_{\mu\nu\rho}$ de forma tal que

$$R_{\lambda\mu\nu\rho} = C_{\lambda\mu\nu\rho} + \frac{1}{n-2} (g_{\lambda\nu}R_{\mu\rho} + g_{\mu\rho}R_{\lambda\nu} - g_{\mu\nu}R_{\lambda\rho} - g_{\lambda\rho}R_{\mu\nu}) - \frac{R}{(n-1)(n-2)} (g_{\lambda\nu}g_{\mu\rho} - g_{\lambda\rho}g_{\mu\nu}), \quad (20)$$

por lo que el tensor de Riemann queda completamente determinado por los tensores de Ricci y de Weyl.

- a) Verifique las expresiones anteriores para las esferas S^2 y S^3 .
 b) Verifique que $C^\lambda_{\mu\lambda\rho} = 0$.
 c) Muestre que dos métricas relacionadas por una transformación conforme, $\tilde{g}_{\mu\nu} = \Omega(x)^2 g_{\mu\nu}$, tienen el mismo tensor de Weyl. Ayuda: use que

$$\tilde{R}^\lambda_{\nu\rho} = \Omega^{-2} R^\lambda_{\nu\rho} + \delta^\lambda_{[\nu} \Omega^\mu_{\rho]}, \quad (21)$$

siendo

$$\Omega^\mu_{\rho} = 4\Omega^{-1} (\Omega^{-1})_{;\rho\eta} g^{\mu\eta} - 2g^{\eta\chi} (\Omega^{-1})_{;\eta} (\Omega^{-1})_{;\chi} \delta^\mu_{\rho}. \quad (22)$$

15. Sobre la superficie de una esfera construya un “cuadrilátero” que tenga por lados segmentos del ecuador, del paralelo $\theta_0 = \pi/2 - \delta\theta$ y de los meridianos $\varphi = 0$ y $\varphi = \delta\varphi$. Transporte paralelamente, a lo largo de ese camino cerrado, un vector inicialmente igual a ∂_θ (use el resultado del Problema 7), y compare el resultado con la expresión $\delta V^\mu = R^\mu{}_{\nu\varphi\theta} V^\nu \delta\varphi \delta\theta$.
16. (*Repaso teórico*). El tensor de Riemann puede ser definido geoméricamente como un operador $\mathbf{R}(; , ,)$ con una “entrada” para 1-formas y tres entradas para vectores. Esto sirve para pensarlo en componentes. En forma abstracta, toma dos vectores y devuelve una transformación del tangente. Por lo tanto, al alimentar $\mathbf{R}(,)$ con dos campos vectoriales, es un tensor $(1, 1)$. Podemos definirlo teniendo en cuenta cómo actúa sobre un vector arbitrario W :

$$\mathbf{R}(; W, U, V) := \mathbf{R}(\vec{U}, \vec{V})W = [\nabla_{\vec{U}}, \nabla_{\vec{V}}] \vec{W} - \nabla_{[\vec{U}, \vec{V}]} \vec{W}, \quad (23)$$

donde

$$[\vec{U}, \vec{V}]^\nu = (\mathcal{L}_{\vec{U}} \vec{V})^\nu = U^\mu \partial_\mu V^\nu - V^\mu \partial_\mu U^\nu \quad (24)$$

es la derivada de Lie de \vec{V} en la dirección de \vec{U} .

- Verifique que, así definido, $\mathbf{R}(; , ,)$ tiene las componentes correctas en un sistema de coordenadas donde se anula la conexión en el evento.
- Utilice esta forma de presentar el tensor de Riemann para obtener sus componentes en la base ortonormal de la esfera S^2 de radio a :

$$\left\{ \vec{e}_\theta = \frac{1}{a} \partial_\theta, \vec{e}_\varphi = \frac{1}{a \sin \theta} \partial_\varphi \right\}. \quad (25)$$

- Se desea averiguar si dos geodésicas vecinas inicialmente paralelas se mantienen siempre paralelas (por ejemplo, los meridianos de una esfera son paralelos en el ecuador pero no lo son en otras latitudes). Con ese fin definimos un campo vectorial \vec{D} cuyas líneas de campo unan puntos de igual tiempo propio τ sobre las geodésicas de vector tangente $\vec{U} = d/d\tau$ (con $\nabla_{\vec{U}} \vec{U} = 0$). Además definimos la parametrización de las líneas de $\vec{D} = d/d\lambda$ en forma tal que cada geodésica queda identificada por un valor de λ . Note que esto significa que los parámetros τ y λ funcionan como coordenadas (“cierran cuadriláteros”), es decir que $[\vec{D}, \vec{U}] = 0$ (los vectores de una base coordenada conmutan). Inicialmente es $\nabla_{\vec{D}} \vec{U} = 0$ (las geodésicas vecinas son paralelas: \vec{U} se transporta paralelamente en la dirección de \vec{D}). Para averiguar si este paralelismo se mantiene a lo largo de las geodésicas deberíamos calcular $\nabla_{\vec{U}}(\nabla_{\vec{D}} \vec{U})$. De acuerdo a todo lo dicho resulta que $\nabla_{\vec{U}}(\nabla_{\vec{D}} \vec{U}) = \mathbf{R}(; \vec{U}, \vec{U}, \vec{D})$. Por otro lado si la torsión es nula y los vectores \vec{U}, \vec{D} conmutan es $\nabla_{\vec{D}} \vec{U} = \nabla_{\vec{U}} \vec{D}$. Finalmente obtenemos que

$$\nabla_{\vec{U}}(\nabla_{\vec{U}} \vec{D}) = \mathbf{R}(; \vec{U}, \vec{U}, \vec{D}), \quad (26)$$

que es la ecuación de la *desviación geodésica*. En las geometrías planas el tensor de Riemann es nulo y no hay desviación geodésica (dos geodésicas inicialmente paralelas lo son siempre). Verifique la ecuación de la desviación geodésica sobre una esfera usando $\vec{U} = \partial_\theta$, $\vec{D} = \partial_\varphi$.

d) Note que el primer miembro de la ecuación anterior tiene la forma de una aceleración relativa. Compare con la aceleración relativa experimentada por dos partículas vecinas en caída libre en un campo gravitatorio no uniforme (este cálculo es newtoniano).

17. a) Considere un punto p en la variedad y un cuadrilátero $A - B - C - D$ infinitesimal de lado ϵ con el vértice A en p . A partir de un vector V_A en p , trasládalo paralelamente hasta B (en dirección ∂_μ) para obtener V_B , luego repita esto para el vértice C (en dirección ∂_ν), el D y de vuelta a A , obteniendo finalmente un vector V'_A . Muestre que la diferencia entre el vector final e inicial es:

$$V_A - V'_A = \epsilon^2 R(\partial_\mu, \partial_\nu) V_A$$

De esta manera se ve que el tensor de Riemann mide el cambio ante transporte paralelo de un vector arbitrario alrededor de un lazo infinitesimal. Esto se conoce como holonomía de y en este caso de un elemento del grupo de transformaciones lineales del tangente.

Ayuda: al trabajar infinitesimalmente, puede hacer el abuso de comparar un vector en un punto con otro vector en otro punto cercano escribiendo una suerte de serie de Taylor a orden 2.

- b) Transporte paralelamente el vector ∂_x desde el Polo Norte de la esfera S^2 hasta el Ecuador siguiendo un meridiano, y luego transportelo sobre el Ecuador un ángulo $\Delta\phi$. Para terminar transporte paralelamente a través de un meridiano al Polo Norte. Calcule el nuevo vector y note que es el original rotado un ángulo $\Delta\phi$. Relacione con el item previo.
- c) Considere el cono, construido como el plano \mathbb{R}^2 con la región $\phi \in (0, \alpha)$ removida y los bordes $\phi = 0$ y $\phi = \alpha$ identificados (ϕ es el ángulo de polares). Realice un transporte paralelo de un vector arbitrario a lo largo de un lazo infinitesimal: i) alrededor del ápice del cono y ii) alrededor de cualquier otro punto. Hay diferencia? Por qué? La idea es argumentar que hay curvatura (infinita!) concentrada en el ápice.

18. Llamamos vector de Killing a todo vector \vec{K} tal que $\mathcal{L}_{\vec{K}}\mathbf{g} = 0$.

- a) Muestre que, en general, \vec{K} es un vector de Killing si

$$K_{\mu;\nu} + K_{\nu;\mu} = 0. \tag{27}$$

b) Muestre que la ecuación anterior corresponde a

$$K^\rho g_{\mu\nu,\rho} + g_{\mu\rho} K^\rho{}_{,\nu} + g_{\nu\rho} K^\rho{}_{,\mu} = 0. \quad (28)$$

c) Muestre que si un vector de Killing \vec{K} coincide con un elemento de la base coordenada, por ejemplo $\vec{K} = \partial_\alpha$ (con α fijo), entonces $\partial g_{\lambda\rho}/\partial x^\alpha = 0$. Muestre que vale la inversa.

d) La conservación de una variable dinámica no sólo depende de la existencia de una simetría del potencial: también la métrica debe poseer esa simetría. Sea una partícula descrita por el Hamiltoniano

$$H = \frac{1}{2} g^{ij}(q^k) p_i p_j + \Phi(q^k). \quad (29)$$

Muestre que si \vec{K} es un vector de Killing de \mathbf{g} , y Φ es constante a lo largo de \vec{K} ($K^i \partial_i \Phi = 0$), entonces se conserva $p_{\vec{K}} = K^i p_i$, que es el momento conjugado al parámetro λ de las líneas de \vec{K} ($\{f(\lambda), H\} = df/d\lambda$).

e) En la ecuación de la geodésica mostrar que si K^μ es un vector de Killing entonces se conserva $K^\mu p_\mu$. En particular, si un vector de la base coordenada ∂_α es un vector de Killing entonces se conserva la componente $p_\alpha = g_{\alpha\beta} m U^\beta$ correspondiente.

f) Se define un tensor de Killing de orden 2 como un tensor simétrico $K_{\mu\nu}$ tal que

$$\nabla_{(\rho} K_{\mu\nu)} = 0, \quad (30)$$

es decir $K_{(\mu\nu;\rho)} = 0$. Mostrar que en este caso se conserva $K^{\mu\nu} p_\mu p_\nu$ para una partícula que se mueve a lo largo de una geodésica.

19. Sea $T^{\mu\nu}$ el tensor de energía-momento de un sistema físico espacialmente localizado. Sea \vec{K} un vector de Killing del espacio-tiempo. Muestre que se conserva la cantidad

$$\int T^{\mu\nu} K_\mu d\Sigma_\nu, \quad (31)$$

es decir que toma el mismo valor sobre cualquier hipersuperficie espacial Σ . (Ayuda: muestre que el campo vectorial $P^\mu = T^{\mu\nu} K_\nu$ tiene divergencia nula y aplique el teorema de la divergencia).

20. Considere la ecuación de Killing $\nabla_{(\rho} K_{\mu)} = 0$ en el espacio-tiempo de Minkowski cuadridi-mensional. Usando coordenadas cartesianas:

a) Halle todos los vectores de Killing linealmente independientes. Para obtenerlos muestre que se satisface la ecuación $K_{\mu,\rho\sigma} = 0$ y sustituya la solución general en la ecuación de Killing.

b) Calcule los conmutadores entre los distintos vectores de Killing e identifique el álgebra de simetrías del espacio de Minkowski.

- c) Obtenga las transformaciones de Lorentz a partir de los generadores de los *boosts*.
Ayuda: tomar la exponencial de un generador multiplicado por un parámetro λ y considerar su efecto sobre las coordenadas (t, x, y, z) .

21. Calcule los vectores de Killing en la esfera S^2 , el toro T^2 , el plano hiperbólico H^2 .