

Relatividad General – 2do. cuatrimestre de 2022

Guía 5: Ecuaciones de Einstein linealizadas, ondas gravitatorias.

1. En una región de una variedad pseudo-riemanniana de cuatro dimensiones existe un sistema de coordenadas (t, x, y, z) donde el intervalo se escribe como

$$ds^2 = -c^2 \left(1 + \frac{2\Phi}{c^2}\right) dt^2 + \left(1 - \frac{2\Phi}{c^2}\right) (dx^2 + dy^2 + dz^2), \quad (1)$$

siendo $|\Phi|/c^2 \ll 1$ e independiente de t .

- Obtenga las componentes de la conexión a primer orden en Φ/c^2 .
 - Calcule los tensores de Ricci y de Einstein a ese orden.
 - Muestre que esta métrica resuelve las ecuaciones de Einstein linealizadas cuando Φ es el potencial newtoniano y el tensor de energía-momento está asociado a materia no relativista.
2. a) La métrica del Problema 1 es un ejemplo de métrica de campo débil:

$$g_{\mu\nu}(x) = \eta_{\mu\nu} + h_{\mu\nu}(x), \quad (2)$$

donde $|h_{\mu\nu}| \ll 1$. Muestre que la métrica del Problema 1 satisface el *gauge* de Lorenz $\eta^{\mu\nu} h_{\mu\rho,\nu} = \frac{1}{2} \eta^{\mu\nu} h_{\mu\nu,\rho}$.

- Reemplace esa métrica en las ecuaciones de Einstein sin fuentes y resuelva para condiciones de contorno esféricamente simétricas.
 - Establezca el significado físico de las constantes de integración y la región de validez de la solución.
3. En una región del espacio la métrica tiene la forma del Problema 1 con $\Phi = gz$. Considere un rayo de luz que parte desde el origen en la dirección x . Muestre que, para desplazamientos pequeños (¿comparados con qué?), la trayectoria del rayo es

$$z(x) \simeq -\frac{gx^2}{c^2}. \quad (3)$$

Ayuda: utilice que $p_\mu p^\mu = 0$ y aproveche las magnitudes conservadas.

4. Se tiene un objeto estático y esférico de masa M , de modo que la geometría en su exterior viene dada por el elemento de línea del Problema 1, con Φ el potencial newtoniano. Un fotón que se mueve en el plano ecuatorial ($z = 0$) de este espacio curvo sufre una deflexión pequeña respecto de la trayectoria

$$x = ct, \quad y = b, \quad z = 0, \quad (4)$$

donde b es el parámetro de impacto.

- a) Escriba la ecuación de la geodésica para el fotón en el espacio curvo.
 b) Bajo la aproximación $|p^y| \ll p^0 \approx p^x$ muestre que

$$\frac{dp^y}{d\lambda} = -\frac{2GMb}{c^2(x^2 + b^2)^{3/2}} p^x \frac{dx}{d\lambda}, \quad p^x = p^0 \left[1 + \mathcal{O}\left(\frac{GM}{c^2 b}\right) \right], \quad (5)$$

donde $p^\mu = d/d\lambda$ es el impulso del fotón.

- c) Suponiendo que $p^y(x \rightarrow -\infty) = 0$ obtenga por integración de la ecuación para p^y

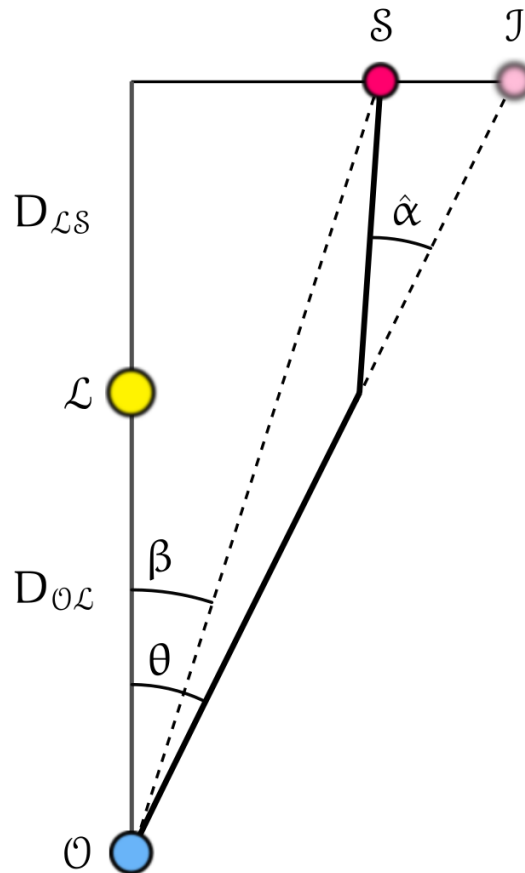
$$p^y(x \rightarrow \infty) = -\frac{4GM}{c^2 b} p^x. \quad (6)$$

- d) Muestre que esto corresponde a un ángulo de deflexión de la luz dado por

$$\Delta\varphi = \frac{4GM}{c^2 b}. \quad (7)$$

Verifique que, en el caso del Sol, este valor es de $\Delta\varphi_{\text{Sol}} = 1,75''(R_\odot/b)$.

5. La luz de una fuente \mathcal{S} llega a un observador \mathcal{O} luego de ser deflectada débilmente por un objeto esférico \mathcal{L} de masa M , como muestra la figura:



- a) A partir de la figura y suponiendo ángulos pequeños, verifique que las posiciones angulares de la imagen (θ), de la fuente (β) y el ángulo de deflexión ($\hat{\alpha}$) se encuentran

relacionados por la *ecuación de la lente*

$$\beta D_{OS} = \theta D_{OS} - \hat{\alpha} D_{LS}, \quad (8)$$

donde $D_{OS} = D_{OL} + D_{LS}$.

- b) Usando el resultado del ángulo de deflexión obtenido en el problema anterior y que el parámetro de impacto es $b \approx \theta D_{OL}$, muestre que la *ecuación de la lente* se puede escribir en la forma

$$\beta = \theta - \frac{1}{\theta} \frac{4GM}{c^2} \frac{D_{LS}}{D_{OL}D_{OS}}. \quad (9)$$

- c) Finalmente obtenga que las posiciones angulares de las dos imágenes son

$$\theta_{\pm} = \frac{1}{2} \left(\beta \pm \sqrt{\beta^2 + 4\theta_E^2} \right), \quad (10)$$

donde

$$\theta_E = \sqrt{\frac{4GM}{c^2} \frac{D_{LS}}{D_{OL}D_{OS}}} \quad (11)$$

es el radio angular del *anillo de Einstein*, que se obtiene en lugar de las dos imágenes cuando la alineación es perfecta ($\beta = 0$).

6. Una consecuencia observable del comportamiento de los fotones en un campo débil es el retardo temporal gravitacional (*efecto Shapiro*).

- a) Utilizando la geometría del Problema 1, muestre que el retardo temporal debido a la presencia de un cuerpo masivo vale

$$\Delta t = -\frac{2}{c^3} \int \Phi dl, \quad (12)$$

donde $dl = \sqrt{dx^2 + dy^2 + dz^2}$ y la integración se hace a lo largo del rayo de luz.

- b) Considere que Venus, el Sol y la Tierra se encuentran alineados. Se envía una señal de radar de la Tierra a Venus y se recibe su reflejo. Utilizando el potencial newtoniano y llamando M_{\odot} a la masa del Sol, r_T a la distancia Sol-Tierra y r_V a la distancia Sol-Venus, obtenga la expresión correspondiente al retardo temporal gravitatorio en este caso.

Nota: además del efecto Shapiro, existe un retardo temporal geométrico, debido a que los fotones deben recorrer una curva de mayor longitud que en ausencia del deflector. Para el Sol, este segundo efecto es despreciable, pero puede ser importante en otros casos, por ejemplo en cosmología.

7. Las ecuaciones de Einstein con constante cosmológica Λ tienen la forma

$$R_{\mu\nu} - \frac{1}{2}g_{\mu\nu}R + \Lambda g_{\mu\nu} = \frac{8\pi G}{c^4} T_{\mu\nu}. \quad (13)$$

Puede obtenerse una (mala) cota superior para la constante cosmológica exigiendo que no afecte el movimiento de los planetas del Sistema Solar. Obtenga una cota para Λ a partir de que la órbita de Plutón tiene un radio de 6×10^{12} m.

8. En el *gauge* de Lorenz, $\eta^{\lambda\nu} h_{\lambda\mu,\nu} = \frac{1}{2}\eta^{\lambda\nu} h_{\lambda\nu,\mu}$, la linealización de las ecuaciones de Einstein en vacío da

$$\eta^{\lambda\rho} h_{\mu\nu,\lambda\rho} = 0. \quad (14)$$

a) Como solución de las ecuaciones proponga una onda monocromática plana

$$h_{\mu\nu} = A_{\mu\nu} e^{ik_\rho x^\rho}. \quad (15)$$

Muestre que k^ρ es un cuadvivector nulo en la métrica de Minkowski y que resulta ortogonal a

$$\bar{A}_{\mu\nu} = A_{\mu\nu} - \frac{1}{2}\eta_{\mu\nu} \eta^{\lambda\rho} A_{\lambda\rho}. \quad (16)$$

b) El *gauge* de Lorenz no fija toda la libertad de *gauge* de una onda gravitatoria. En efecto, una transformación de *gauge*

$$h_{\mu\nu} \rightarrow h_{\mu\nu} - \xi_{\mu,\nu} - \xi_{\nu,\mu}, \quad (17)$$

tal que

$$\eta^{\lambda\nu} \xi^\mu_{,\lambda\nu} = 0, \quad (18)$$

no modifica el *gauge* de Lorenz. Muestre que es posible elegir además $A_{0\nu} = 0$ y $A^\mu{}_\mu = A^i{}_i = 0$, usando un generador de la forma

$$\xi_\mu = C_\mu \exp(ik_\rho x^\rho) \quad (19)$$

convenientemente elegido (*transverse-traceless gauge* o *gauge* transverso-sin traza, también llamado *gauge* TT).

c) ¿Cuántos grados de libertad tiene la onda?

9. a) Utilice la ecuación de la geodésica para describir el efecto de una onda gravitatoria monocromática plana, que se propaga en la dirección z , sobre un anillo de partículas libremente gravitantes situadas inicialmente en reposo en el plano x - y . Considere las dos posibles polarizaciones independientes de la onda: i) $A_{xy} = 0$, $A_{xx} = -A_{yy} \neq 0$, ii) $A_{xx} = A_{yy} = 0$, $A_{xy} \neq 0$, en el *gauge* TT (note que estas dos polarizaciones se

obtienen una de la otra con sólo hacer una rotación de 45° en el plano $x-y$; por lo tanto es suficiente calcular para una de ellas).

- b) Con el objeto de detectar el paso de una onda gravitatoria se envían rayos de luz desde el centro del anillo hacia las partículas del mismo. Determine si la onda afecta el tiempo propio de ida y vuelta de la señal. Suponga que el radio del anillo es mucho menor que la longitud de onda.