Facultad de Ciencias Exactas y Naturales-Universidad de Buenos Aires (UBA)

Relatividad General

2do cuatrimestre de 2021

Profesor: Rafael Ferraro

Clase 6

Tensores. p-formas. Áreas y volúmenes

Tensores

La relación $\langle \tilde{\omega}, \bar{V} \rangle = \omega_\alpha V^\alpha$,

y en particular $\langle \tilde{E}^\alpha, \bar{V} \rangle = V^\alpha$, $\langle \tilde{\omega}, \bar{E}_\alpha \rangle = \omega_\alpha$,

puede verse de dos maneras:

i) $\tilde{\omega}$ es una "máquina" lineal que espera un vector para dar un número $\tilde{\omega} : \mathbb{T}_p \rightarrow \mathbb{R}$, $\tilde{\omega}(\bar{V}) \in \mathbb{R}$

ii) pero también podríamos decir que $\bar{V}$ es una máquina lineal que espera una 1-forma para dar un número:
$\bar{V} : \mathbb{T}_p^* \rightarrow \mathbb{R}$, $\bar{V}(\tilde{\omega}) \in \mathbb{R}$

Entonces podemos definir máquinas lineales más generales, que tengan entradas ("ranuras") para varios vectores y 1-formas. Cuando estas ranuras se completan, la máquina da un número. Esta es la idea de "tensor". Un tensor de tipo $\binom{r}{s}$ tiene r entradas o ranuras para 1-formas y s ranuras para vectores.

Tensor: un tensor T es una aplicación lineal

$$T : \underbrace{\mathbb{T}_p^* \times \cdots \times \mathbb{T}_p^*}_{r \text{ factores}} \times \underbrace{\mathbb{T}_p \times \cdots \times \mathbb{T}_p}_{s \text{ factores}} \longrightarrow \mathbb{R}$$

Las 1-formas son tensores $\binom{0}{1}$, y los vectores son tensores $\binom{1}{0}$.

Linealidad: $T(\ldots, \alpha\bar{V}+\beta\bar{U}, \ldots) = \alpha\, T(\ldots, \bar{V}, \ldots) + \beta\, T(\ldots, \bar{U}, \ldots)$

para cualquier ranura de vectores, y lo mismo para cualquier ranura de 1-formas.

Podemos definir combinaciones lineales de tensores del mismo tipo para hacer de ellos un espacio vectorial en P:

$$(\alpha T_1 + \beta T_2)(\tilde{\omega}^1, \dots, \tilde{\omega}^r; \bar{V}_1, \dots, \bar{V}_s) \doteq \alpha\, T_1(\tilde{\omega}^1, \dots, \tilde{\omega}^r; \bar{V}_1, \dots, \bar{V}_s) + \beta\, T_2(\tilde{\omega}^1, \dots, \tilde{\omega}^r; \bar{V}_1, \dots, \bar{V}_s)$$

▶ Producto tensorial: a partir de vectores y 1-formas podemos construir tensores de rango más alto mediante el producto tensorial $\otimes$. Por ejemplo, $\bar{V} \otimes \tilde{\omega}$ es un tensor de tipo $\binom{1}{1}$ definido como:

$$\boxed{\bar{V} \otimes \tilde{\omega}\,(\tilde{\eta}, \bar{U}) = \bar{V}(\tilde{\eta})\, \tilde{\omega}(\bar{U}) = \langle \tilde{\eta}, \bar{V} \rangle \langle \tilde{\omega}, \bar{U} \rangle = V^a\, \omega_b\, \eta_a\, U^b}$$

En particular $\bar{V} \otimes \tilde{\omega}\,(\tilde{E}^a, \bar{E}_b) = V^a\, \omega_b$ son las componentes de $\bar{V} \otimes \tilde{\omega}$

Siempre se obtienen las componentes saturando las ranuras con elementos de las bases: $\bar{V}(\tilde{E}^a) = \langle \tilde{E}^a, \bar{V} \rangle = V^b \langle \tilde{E}^a, \bar{E}_b \rangle = V^a$, etc.

De hecho alcanza con saber cómo actúa un tensor sobre los elementos de las bases de $\mathbb{T}_P$ y $\mathbb{T}_P^*$ para saber cómo actúa sobre cualquier colección de entradas (por linealidad).

Nótese que $\bar{V} \otimes \tilde{\omega}$ se puede desarrollar en términos de sus componentes $V^a \omega_b$:

$$\boxed{\bar{V} \otimes \tilde{\omega} = V^a\, \omega_b\, \bar{E}_a \otimes \tilde{E}^b}$$

En efecto $\bar{V} \otimes \tilde{\omega}\,(\tilde{\eta}, \bar{U}) = V^a\, \omega_b\, \bar{E}_a(\tilde{\eta})\, \tilde{E}^b(\bar{U}) = V^a\, \omega_b\, \eta_a\, U^b$

▶ Espacio vectorial $\mathbb{T}^r_s(P)$: está formado por los tensores de tipo $\binom{r}{s}$ en P. Por lo que acabamos de ver, cualquier tensor $\binom{r}{s}$ puede expresarse como

$$\boxed{T = T^{b_1 \dots b_r}{}_{a_1 \dots a_s}\ \bar{E}_{b_1} \otimes \cdots \otimes \bar{E}_{b_r} \otimes \tilde{E}^{a_1} \otimes \cdots \otimes \tilde{E}^{a_s}}$$

donde las componentes $T^{b_1 \dots b_r}{}_{a_1 \dots a_s}$ se obtienen como

$$T^{b_1 \dots b_r}{}_{a_1 \dots a_s} = T\left(\bar{E}_{a_1}, \dots, \bar{E}_{a_s}; \tilde{E}^{b_1}, \dots, \tilde{E}^{b_r}\right)$$

Veamos que $\mathbb{T}^r_s(P)$ es un producto tensorial de espacios:

$$\mathbb{T}^r_s(P) = \underbrace{\mathbb{T}_P \otimes \cdots \otimes \mathbb{T}_P}_{r \text{ factores}} \otimes \underbrace{\mathbb{T}_P^* \otimes \cdots \otimes \mathbb{T}_P^*}_{s \text{ factores}}$$

Dimensión: como cada factor tiene dimensión n, la dimensión de $\mathbb{T}^r_s(P)$ es n^{r+s}. En efecto, cada tensor está caracterizado por n^{r+s} componentes $T^{b_1 \dots b_r}{}_{a_1 \dots a_s}$.

▶ Transformación de las componentes ante cambio de base

$\bar{E}_b = \Lambda^{b'}{}_b\, \bar{E}_{b'}$, $\tilde{E}^a = \Lambda^a{}_{a'}\, \tilde{E}^{a'}$, entonces

$$\boxed{T^{b'_1 \dots b'_r}{}_{a'_1 \dots a'_s} = \Lambda^{b'_1}{}_{b_1} \cdots \Lambda^{b'_r}{}_{b_r}\, \Lambda^{a_1}{}_{a'_1} \cdots \Lambda^{a_s}{}_{a'_s}\, T^{b_1 \dots b_r}{}_{a_1 \dots a_s}}$$

▶ Contracción de índices: es una operación que consiste en igualar uno de los índices superiores (o contravariantes) con uno de los índices inferiores (o covariantes) y sumar las componentes que así resultan. Veamos que la contracción de índices produce un tensor de tipo $\binom{r-1}{s-1}$. Por ejemplo, si en la expresión anterior contraemos el último índice contravariante con el primero covariante resulta

$$T^{b'_1\cdots a'_1}{}_{a'_1\cdots a'_s} = \Lambda^{b'_1}{}_{b_1}\cdots \underbrace{\Lambda^{a'_1}{}_{b_r}\Lambda^{a_1}{}_{a'_1}}_{\delta^{a_1}_{b_r}}\cdots\Lambda^{a_s}{}_{a'_s}\, T^{b_1\cdots b_r}{}_{a_1\cdots a_s}$$

Entonces

$$T^{b'_1\cdots a'}{}_{a'\cdots a'_s} = \underbrace{\Lambda^{b'_1}{}_{b_1}\cdots\Lambda^{b'_{r-1}}{}_{b_{r-1}}}_{r-1 \text{ factores}}\ \underbrace{\Lambda^{a_2}{}_{a'_2}\cdots\Lambda^{a_s}{}_{a'_s}}_{s-1 \text{ factores}}\, T^{b_1\cdots a}{}_{a\cdots a_s}$$

que es la ley de transformación de un tensor $\binom{r-1}{s-1}$. Como vemos, la contracción está bien definida porque las componentes del tensor se refieren a bases duales.

Ejemplos:

1) Las componentes de un tensor $\binom{0}{2}$ se transforman según

$$T_{a'b'} = \Lambda^a{}_{a'}\Lambda^b{}_{b'}\, T_{ab} \qquad \text{ó} \qquad T_{i'j'} = \frac{\partial x^i}{\partial x^{i'}}\frac{\partial x^j}{\partial x^{j'}}\, T_{ij}$$

2) si $T^{ab}{}_{cde}$ son las componentes de un tensor $\binom{2}{3}$ entonces $T^{ab}{}_{cbe}$ son componentes de un tensor $\binom{1}{2}$

3) $T^{ab}{}_{cde}A^{fg}$ es un tensor $\binom{4}{3}$ (producto tensorial), y $T^{ab}{}_{cde}A^{fc}$ es un tensor $\binom{3}{2}$ (contracción).
$T^{ab}{}_{cde}A^{fd}$ es otro tensor $\binom{3}{2}$, salvo si existe una simetría $T^{ab}{}_{cde} = T^{ab}{}_{dce}$ entre las componentes del tensor T.

Entradas simétricas: dos ranuras del mismo tipo se dicen simétricas si la máquina lineal es indiferente al intercambio de los argumentos de esas ranuras. Por ejemplo, si T es de tipo $\binom{3}{0}$

$$T(\tilde{\varepsilon},\tilde{\omega},\tilde{\eta}) = T(\tilde{\varepsilon},\tilde{\eta},\tilde{\omega}) \,, \quad \forall\, \tilde{\omega},\tilde{\eta},\tilde{\varepsilon}$$

entonces la segunda y tercera ranuras son simétricas. En componentes queda:

$$T^{abc}\varepsilon_a\omega_b\eta_c = \underbrace{T^{abc}\varepsilon_a\eta_b\omega_c}_{T^{acb}\varepsilon_a\eta_c\omega_b} \qquad \forall\, \tilde{\omega},\tilde{\eta},\tilde{\varepsilon}$$

(¡son índices mudos!)

$$\Rightarrow \quad \boxed{T^{abc} = T^{acb}}$$

Entradas antisimétricas: dos ranuras del mismo tipo se dicen antisimétricas si el resultado de la máquina lineal cambia de signo ante el intercambio de los argumentos de esas ranuras. Por ejemplo, si T es de tipo $\binom{1}{2}$

$$T(\tilde{\varepsilon};\bar{V},\bar{U}) = -T(\tilde{\varepsilon},\bar{U},\bar{V}) \qquad \forall\, \tilde{\varepsilon},\bar{U},\bar{V}$$

En componentes queda $\quad T^a{}_{bc}\,\varepsilon_a V^b U^c = -\underbrace{T^a{}_{bc}\,\varepsilon_a U^b V^c}_{T^a{}_{cb}\,\varepsilon_a U^c V^b}$

$$\Rightarrow \quad \boxed{T^a{}_{bc} = -T^a{}_{cb}}$$

A partir de un tensor cualquiera podemos definir nuevos tensores simetrizando o antisimetrizando grupos de índices del mismo tipo. Estas operaciones se indican con () y [] respectivamente. Por ejemplo:

$$T^{\cdots\cdots}{}_{\cdots(ab)\cdots} \doteq \frac{1}{2}\left(T^{\cdots\cdots}{}_{\cdots ab\cdots} + T^{\cdots\cdots}{}_{\cdots ba\cdots}\right)$$

$$T^{\cdots\cdots}{}_{\cdots[ab]\cdots} \doteq \frac{1}{2}\left(T^{\cdots\cdots}{}_{\cdots ab\cdots} - T^{\cdots\cdots}{}_{\cdots ba\cdots}\right)$$

Ejercicio: probar que las cantidades anteriores transforman como componentes de un tensor.

En general, si simetrizamos o antisimetrizamos un grupo de p índices del mismo tipo, habrá que combinar $p!$ términos que corresponden a las $p!$ permutaciones de estos índices. En la simetrización todos los términos se combinan con signo positivo, y el resultado se divide por $p!$.

En la antisimetrización cada término se combina con signo positivo o negativo según si proviene de una permutación par o impar de los índices; el resultado se divide por $p!$. Por ejemplo:

$$T_{\cdots[abc]\cdots} = \frac{1}{6}\left(T_{\cdots abc\cdots} - T_{\cdots acb\cdots} + T_{\cdots bca\cdots} - T_{\cdots bac\cdots} + T_{\cdots cba\cdots} - T_{\cdots cab\cdots}\right)$$

$T^{\cdots\cdots}{}_{a_1\cdots a_s}$ se dice totalmente simétrico en sus índices covariantes si $T^{\cdots\cdots}{}_{a_1\cdots a_s} = T^{\cdots\cdots}{}_{(a_1\cdots a_s)}$. Análogamente para el caso antisimétrico.

Ejercicios:

i) Mostrar que $T^{\cdots}{}_{\cdot\cdot ab\cdot\cdot} = T^{\cdots}{}_{\cdot\cdot(ab)\cdot\cdot} + T^{\cdots}{}_{\cdot\cdot[ab]\cdot\cdot}$

ii) Si $S^{\cdots}{}_{\cdot\cdot ab\cdot\cdot} = S^{\cdots}{}_{\cdot\cdot ba\cdot\cdot}$ y $A_{\cdots}{}^{\cdot\cdot ab\cdot\cdot} = -A_{\cdots}{}^{\cdot\cdot ba\cdot\cdot}$

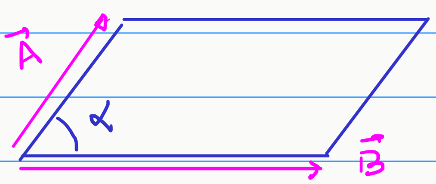
mostrar que $S^{\cdots}{}_{\cdot\cdot ab\cdot\cdot}\, A_{\cdots}{}^{\cdot\cdot ab\cdot\cdot} = 0$.

iii) Si $S^{\cdots}{}_{\cdot\cdot abc\cdot\cdot} = S^{\cdots}{}_{\cdot\cdot(abc)\cdot\cdot}$, entonces para cualquier T vale que

$$S^{\cdots}{}_{\cdot\cdot abc\cdot\cdot}\, T_{\cdots}{}^{\cdot\cdot abc\cdot\cdot} = S^{\cdots}{}_{\cdot\cdot abc\cdot\cdot}\, T_{\cdots}{}^{\cdot\cdot(abc)\cdot\cdot}$$

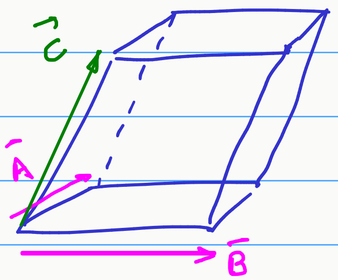
(ídem para el caso antisimétrico)

Áreas y volúmenes: No tenemos aún nociones de área y volumen en una variedad. Si recurrimos a las nociones respectivas en espacios euclidianos vemos que las mismas se vinculan a máquinas lineales completamente antisimétricas,



$$\text{Área} = \text{base} \times \text{altura} = |\vec{A} \times \vec{B}|$$

$$\vec{A} \times \vec{B} = -\vec{B} \times \vec{A}$$



$$\text{Volumen} = |\vec{C} \cdot (\vec{A} \times \vec{B})|$$

$$\vec{C}\cdot(\vec{A}\times\vec{B}) = -\vec{C}\cdot(\vec{B}\times\vec{A}) = \vec{A}\cdot(\vec{B}\times\vec{C}) = -\vec{A}\cdot(\vec{C}\times\vec{B})$$
$$= \vec{B}\,(\vec{C}\times\vec{A}) = -\vec{B}\cdot(\vec{A}\times\vec{C})$$

Esto nos motiva a dedicar especial atención a los tensores $\binom{0}{p}$ totalmente antisimétricos.

p-formas

- Llamamos p-formas a los tensores $\binom{0}{p}$ totalmente antisimétricos. Decimos que p es el grado de la forma.

- Como las componentes que tienen dos índices iguales deben anularse, las únicas componentes no nulas tendrán todos los índices distintos; por lo tanto debe ser $p \leq n$.

- La dimensión del espacio de p-formas es igual al número de componentes independientes que éstas pueden tener. Esto es igual al número de maneras de elegir p índices distintos entre n, pues la distintas componentes que comparten los mismos índices en distinto orden están ligadas por la antisimetría. La dimensión entonces es $\binom{n}{p}$.

Ejemplos:

i) Las 0-formas son las funciones $f: M \to \mathbb{R}$

ii) El espacio de n-formas tiene dimensión 1. La única componente independiente de una n-forma $\tilde{\omega}$ es $\omega_{12\ldots n}$. Las restantes se obtienen por antisimetría.

Para comenzar, consideremos una 2-forma en una variedad de dimensión 2:

$$\tilde{\omega} = \omega_{12}\, \tilde{E}^1 \otimes \tilde{E}^2 + \omega_{21}\, \tilde{E}^2 \otimes \tilde{E}^1 = \omega_{12} \left(\tilde{E}^1 \otimes \tilde{E}^2 - \tilde{E}^2 \otimes \tilde{E}^1 \right)$$

$\omega_{21} = -\,\omega_{12}$

La expresión obtenida muestra que es útil definir el producto tensorial totalmente antisimetrizado o producto "wedge" entre 1-formas:

$$\boxed{\tilde{\varepsilon} \wedge \tilde{\eta} \doteq \tilde{\varepsilon} \otimes \tilde{\eta} - \tilde{\eta} \otimes \tilde{\varepsilon}} \Longrightarrow \boxed{\tilde{\varepsilon} \wedge \tilde{\eta} = -\tilde{\eta} \wedge \tilde{\varepsilon}}$$

$\tilde{\varepsilon}, \tilde{\eta}$ son 1-formas

que es un producto asociativo:

$$(\tilde{\alpha} \wedge \tilde{\beta}) \wedge \tilde{\gamma} = \tilde{\alpha} \wedge \tilde{\beta} \wedge \tilde{\gamma} = \tilde{\alpha} \otimes \tilde{\beta} \otimes \tilde{\gamma} - \tilde{\beta} \otimes \tilde{\alpha} \otimes \tilde{\gamma} + \ldots, \quad (3! \text{ términos})$$

El ejemplo anterior muestra que una p-forma cualquiera se escribe

$$\boxed{\begin{aligned} \tilde{\omega} &= \omega_{|a_1 \ldots a_p|} \tilde{E}^{a_1} \wedge \ldots \wedge \tilde{E}^{a_p} \\ &= \frac{1}{p!} \omega_{a_1 \ldots a_p} \tilde{E}^{a_1} \wedge \ldots \wedge \tilde{E}^{a_p} \end{aligned}}$$

donde $\omega_{a_1 \ldots a_p} = \omega_{[a_1 \ldots a_p]}$ son las componentes de $\tilde{\omega}$.
Las barras verticales en la primera línea significa que la suma se extiende sólo a los términos tales que $a_1 < a_2 < \cdots < a_p$. Por ejemplo, para una 2-forma en 2 dimensiones es

$$\tilde{\omega} = \omega_{12} \tilde{E}^1 \wedge \tilde{E}^2 = \frac{1}{2} \left(\omega_{12} \tilde{E}^1 \wedge \tilde{E}^2 + \omega_{21} \tilde{E}^2 \wedge \tilde{E}^1 \right)$$

Si no usamos las barras verticales repetiremos $p!$ veces cada término de la suma; de ahí que sea necesario dividir por $p!$. Pero este factor no es parte del valor de la componente. Para convencernos, calculemos el valor de una componente saturando las entradas de la p-forma con los elementos de la base. En el ejemplo de la 2-forma la componente 21 es

$$\omega_{21} = \tilde{\omega}(\bar{E}_2, \bar{E}_1) = \omega_{12}\, \tilde{E}^1 \wedge \tilde{E}^2 \, (\bar{E}_2, \bar{E}_1) = \omega_{12} (\tilde{E}^1 \otimes \tilde{E}^2 - \tilde{E}^2 \otimes \tilde{E}^1)(\bar{E}_2, \bar{E}_1)$$

$$= \omega_{12} \Big(\underbrace{\tilde{E}^1(\bar{E}_2)}_{0} \underbrace{\tilde{E}^2(\bar{E}_1)}_{0} - \underbrace{\tilde{E}^2(\bar{E}_2)}_{1} \underbrace{\tilde{E}^1(\bar{E}_1)}_{1} \Big) = -\omega_{12} \quad \checkmark$$

Si $\tilde{\omega}$ es una p-forma y $\tilde{\eta}$ es una q-forma entonces

$$\boxed{\tilde{\omega} \wedge \tilde{\eta} = (-1)^{pq}\, \tilde{\eta} \wedge \tilde{\omega}}$$

En particular,

$$\tilde{\theta} \wedge \tilde{\theta} = 0 \quad \text{si } \tilde{\theta} \text{ es de rango impar}$$

Demostración)

$$\tilde{\omega} \wedge \tilde{\eta} = \omega_{|i_1 \dots i_p|}\, \eta_{|i_{p+1} \dots i_{p+q}|}\, \tilde{E}^{i_1} \wedge \dots \wedge \tilde{E}^{i_p} \wedge \tilde{E}^{i_{p+1}} \wedge \dots \wedge \tilde{E}^{i_{p+q}}$$

Para construir $\tilde{\eta} \wedge \tilde{\omega}$ los últimos q factores $\tilde{E}^i$ deben pasar adelante, atravesando los primeros p factores $\tilde{E}^i$. Son $p \cdot q$ permutaciones, y cada una de ellas produce un cambio de signo.

Ejercicio: calculemos el producto wedge entre una 1-forma y una 2-forma, y expresemos las componentes de la 3-forma resultante.

$\tilde{\omega} = \omega_a \tilde{E}^a$ es una 1-forma de componentes ω_a

$\tilde{\eta} = \frac{1}{2} \eta_{bc} \tilde{E}^b \wedge \tilde{E}^c$ es una 2-forma de componentes η_{bc}

$$\tilde{\omega} \wedge \tilde{\eta} = \frac{1}{2} \omega_a \eta_{bc} \tilde{E}^a \wedge \tilde{E}^b \wedge \tilde{E}^c = \frac{1}{3!} \overbrace{\frac{3!}{2}}^{3} \underbrace{\omega_{[a} \eta_{bc]}}_{\text{sólo la parte antisimétrica contribuye a la suma}} \tilde{E}^a \wedge \tilde{E}^b \wedge \tilde{E}^c$$

$$\Rightarrow \boxed{(\tilde{\omega} \wedge \tilde{\eta})_{abc} = 3\, \omega_{[a} \eta_{bc]}}$$

En general, para una p-forma $\tilde{\omega}$ y una q-forma $\tilde{\eta}$ es

$$\boxed{(\tilde{\omega} \wedge \tilde{\eta})_{a_1 \ldots\ldots a_{p+q}} = \binom{p+q}{p} \omega_{[a_1 \ldots a_p} \eta_{a_{p+1} \ldots a_{p+q}]}}$$

pues habrá que multiplicar y dividir por $(p+q)!$ para aislar la componente.

Ejemplo del ejercicio anterior: $\tilde{\omega} = 7 \tilde{dx} - 5 \tilde{dy}$, $\tilde{\eta} = 13 \tilde{dx} \wedge \tilde{dz}$

$$\tilde{\omega} \wedge \tilde{\eta} = 7 \times 13 \underbrace{\tilde{dx} \wedge \tilde{dx}}_{0} \wedge \tilde{dz} - 5 \times 13 \tilde{dy} \wedge \tilde{dx} \wedge \tilde{dz} = 65 \tilde{dx} \wedge \tilde{dy} \wedge \tilde{dz}$$

$$(\tilde{\omega} \wedge \tilde{\eta})_{123} = 65$$

Comparemos con $(\tilde{\omega} \wedge \tilde{\eta})_{123} = 3\, \omega_{[1} \eta_{23]} = \frac{3}{3!} (\omega_1 \overset{0}{\eta_{23}} - \omega_1 \overset{0}{\eta_{32}}$

$+ \omega_2 \eta_{31} - \omega_2 \eta_{13} + \underbrace{\omega_3}_{0} \eta_{12} - \underbrace{\omega_3}_{0} \eta_{21}) = -\frac{3 \cdot 2}{3!} \omega_2 \eta_{13} = 65$ ✓