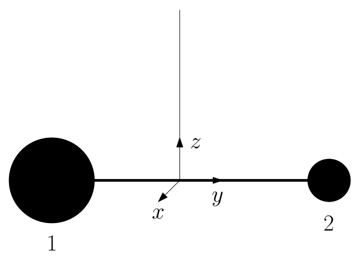
Relatividad General – 1er cuatrimestre de 2024

Guía 2: *Principio de equivalencia.*

1. El principio de equivalencia se basa en el hecho de que todos los cuerpos caen igual. Es decir, si definimos la masa inercial m_I de un cuerpo como el factor de proporcionalidad entre fuerza resultante y aceleración ($F = m_I a$), y la masa gravitatoria m_G como el factor de proporcionalidad entre fuerza gravitatoria y campo gravitatorio ($F_G = m_G g$), entonces m_I/m_G es independiente del cuerpo. Que eso es efectivamente así se sabe con muchísima precisión, con un error relativo del orden de 10^{-15}, y uno de los experimentos que llevan a esa conclusión, probablemente el más famoso, es el *experimento de Ëotvös*. El experimento de Ëotvös consiste en una balanza de torsión, es decir, una soga de la que cuelga una barra con dos cuerpos en los extremos, tal como se muestra en la figura.



Las fuerzas relevantes son la gravitatoria, la tensión de la cuerda y la fuerza centrífuga debida a la rotación de la Tierra. Esta última apunta en la dirección perpendicular al eje de rotación (de manera que, en general, en el sistema de referencia del dibujo tendrá componentes no nulas en las tres direcciones), y tiene módulo $F_c = m_I \Omega^2 R \cos\theta$, donde Ω es la velocidad angular de rotación de la Tierra, R su radio, y θ la latitud del lugar donde se hace el experimento. Nótese que la fuerza centrífuga es proporcional a m_I porque es una fuerza ficticia. En lo que sigue, no es necesario calcular explícitamente sus componentes.

a) Dibuje en la figura todas las fuerzas relevantes.

b) Calcule la condición que debe cumplirse para que no haya torque en la dirección x, es decir, para que la barra se mantenga en equilibrio en su posición horizontal.

c) Muestre que, para que no haya torque en la dirección z, es decir, para que la soga no se retuerza, necesariamente debe cumplirse

$$\frac{m_{I1}}{m_{G1}} = \frac{m_{I2}}{m_{G2}}. \tag{1}$$

Por lo tanto, si m_I/m_G no es independiente del cuerpo, la soga se retorcerá un poco. La mínima torsión en la soga se puede medir con mucha precisión pegándole un espejito, iluminándolo y observando desde lejos la luz reflejada: si el espejo cambia un poquito de orientación, por más imperceptible que sea ese cambio, el punto de incidencia de la luz reflejada cambiará apreciablemente. De este forma se puede medir con mucha precisión la proporcionalidad entre masa inercial y masa gravitatoria*.

2. El principio de equivalencia establece que los experimentos en un laboratorio en caída libre dan los mismos resultados que si se realizan en un sistema de referencia inercial en vacío.

   a) Usar esta idea para argumentar que la luz debe caer en un campo gravitatorio.

   b) Utilizando la mecánica newtoniana, calcular el máximo tamaño que debe tener un planeta de masa M para que la luz no pueda escapar de su superficie.

3. El *corrimiento al rojo gravitatorio* se midió por primera vez en 1960. Usando el efecto Mossbauer y la alta definición de la línea de 14,4 keV del Fe^{57}, Pound y Rebka pudieron determinar el corrimiento de frecuencia que sufre un fotón luego de ascender desde la superficie terrestre hasta lo alto de una torre de 22 m. Utilizando el principio de equivalencia y trabajando en un sistema de referencia en caída libre, calcule el valor de $\Delta\nu/\nu$ que se esperaba medir.

4. El principio de equivalencia sugiere que la modificación que hay que hacerle a la relatividad especial para incorporar la gravedad es reemplazar la métrica de Minkowski por otra métrica g, cuyo valor de alguna forma codifica el campo gravitatorio. Por lo tanto, la acción de una partícula de masa m sometida únicamente a la influencia de la gravedad es

$$S[x] = -m \int \sqrt{-g_{\alpha\beta}(x) dx^\alpha dx^\beta}. \tag{2}$$

   Calcule la ecuación del movimiento que se deriva de esta acción.

5. Como se verá más adelante en la materia, en el *límite newtoniano* (campo gravitatorio débil e independiente del tiempo) la métrica del espacio-tiempo tiene la forma

$$ds^2 = -(1+2\phi)dt^2 + (1-2\phi)(dx^2 + dy^2 + dz^2), \tag{3}$$

   donde $\phi \ll 1$ es el potencial gravitatorio newtoniano.

   a) Muestre que, con esta métrica, la acción (2) para velocidades bajas ($|dx^i/dt| \ll 1$) se reduce a la de una partícula no relativista sometida a un potencial gravitatorio ϕ.

   b) Calcule la energía de una partícula libre, es decir, la magnitud que se conserva debido a que ϕ no depende de t. ¿Qué forma toma en el límite de velocidades bajas?

   c) A partir de la métrica (3), calcule el corrimiento al rojo gravitatorio en presencia de un potencial ϕ, y compare con lo obtenido en el problema 3.

   d) Obtenga la línea de universo de un fotón que se mueve en la dirección radial respecto de una fuente de masa M esféricamente simétrica.

*Otro experimento célebre que involucra gravedad y balanzas de torsión es el *experimento de Cavendish* (1797), que sirvió para comprobar la ley de la gravitación universal y medir la constante de Newton, y de ahí obtener la masa de la Tierra.

6. El *sistema de posicionamiento global* (GPS) consiste en 24 satélites distribuidos uniformemente alrededor de la Tierra, cada uno de los cuales tiene un periodo orbital de 12 horas. Los satélites emiten constantemente señales de microondas que llevan información del punto desde el que fue emitida la señal y el instante de emisión. El receptor en la Tierra compara esos datos con el instante de recepción, y de ahí obtiene la distancia al punto de emisión. Con las señales de tres satélites se obtiene la posición del receptor, y agregando la de un cuarto satélite se ajusta el instante de recepción, corrigiendo posibles errores en el reloj del receptor. Claramente, para que esto funcione, los instantes de emisión deben ser determinados con mucha precisión, porque un error de 10 ns se traduce en un error de 3 m. Por eso los satélites llevan relojes atómicos. A este nivel de precisión, los efectos relativistas (el hecho de que el tiempo del receptor no coincida exactamente con el del emisor) son importantes.

   a) Calcule la velocidad del satélite y su distancia al centro de la Tierra.

   b) Obtenga la diferencia relativa entre el tiempo del satélite y el del receptor debido a la dilatación temporal de la relatividad especial.

   c) Halle la diferencia relativa entre el tiempo del satélite y el del receptor debido al corrimiento al rojo gravitatorio. ¿Cómo es la magnitud de este efecto comparado con el de la relatividad especial? Estos dos efectos ¿actúan en el mismo sentido o en sentido contrario?

   d) Calcule el error que se acumularía en 1 minuto debido a estos efectos relativistas.

7. De acuerdo con el principio de equivalencia, una carga eléctrica en reposo en la superficie de la Tierra está uniformemente acelerada respecto a un sistema de referencia inercial. ¿Cómo es posible, entonces, que la carga no radíe?

   Nota: al momento de escribir esta pregunta, los docentes aún no tenemos una respuesta completamente satisfactoria.