

## Relatividad General – 1er cuatrimestre de 2024

### Guía 4: Ecuaciones de Einstein linealizadas.

1. En una región de una variedad pseudo-riemanniana de cuatro dimensiones existe un sistema de coordenadas  $(t, x, y, z)$  donde el intervalo se escribe como

$$ds^2 = -(1 + 2\phi) dt^2 + (1 - 2\phi) (dx^2 + dy^2 + dz^2), \quad (1)$$

siendo  $|\phi| \ll 1$  e independiente de  $t$ .

- Obtenga los símbolos de Christoffel a primer orden en  $\phi$ .
- Calcule los tensores de Ricci y de Einstein a ese orden.
- Muestre que esta métrica resuelve las ecuaciones de Einstein linealizadas cuando  $\phi$  es el potencial newtoniano y el tensor de energía-impulso está asociado a materia no relativista.

2. La métrica del Problema 1 es un ejemplo de métrica de campo débil:

$$g_{\mu\nu}(x) = \eta_{\mu\nu} + h_{\mu\nu}(x), \quad (2)$$

con  $|h_{\mu\nu}| \ll 1$ . La libertad de gauge asociada a la invariancia ante difeomorfismos implica en este caso que  $h_{\mu\nu}$  y  $h_{\mu\nu} + \mathcal{L}_\xi \eta_{\mu\nu}$  describen la misma perturbación física. Es decir, en la aproximación de campo débil, hay libertad de gauge ante la transformación

$$h_{\mu\nu} \rightarrow h_{\mu\nu} + \partial_\mu \xi_\nu + \partial_\nu \xi_\mu. \quad (3)$$

- a) Muestre que en el *gauge de Lorenz*,

$$\partial^\nu \left( h_{\mu\nu} - \frac{1}{2} \eta_{\mu\nu} h \right) = 0, \quad (4)$$

siendo  $h = h^\mu{}_\mu$ , las ecuaciones de Einstein linealizadas se reducen a

$$\square \bar{h}_{\mu\nu} = -16\pi G T_{\mu\nu}. \quad (5)$$

donde

$$\bar{h}_{\mu\nu} = h_{\mu\nu} - \frac{1}{2} \eta_{\mu\nu} h \quad (6)$$

es el *inverso de traza* de  $h_{\mu\nu}$  y  $G$  es la constante de gravitación universal.

- b) Verifique que la métrica del Problema 1 satisface el gauge de Lorenz y resuelva las ecuaciones de Einstein sin fuentes para condiciones de contorno esféricamente simétricas. Establezca el significado físico de las constantes de integración y la región de validez de la solución.

3. La *representación irreducible* de espín 2 y masa  $m$  del grupo de Poincaré está dada por un tensor  $h_{\mu\nu}$  de rango 2, simétrico y de traza nula que cumple

$$(\square - m^2) h_{\mu\nu} = 0, \quad \partial^\mu h_{\mu\nu} = 0. \quad (7)$$

Verificar que, en la aproximación lineal, las ecuaciones de la relatividad general en vacío son las de un campo de espín 2 no masivo.

4. El objetivo de este ejercicio es determinar la acción que da lugar a las ecuaciones de Einstein linealizadas. Para ello:

- a) Convencerse de que la acción más general de segundo orden en  $h_{\mu\nu}$  y con dos derivadas es

$$S = \int d^4x (A \partial_\alpha h_{\mu\nu} \partial^\alpha h^{\mu\nu} + B \partial_\alpha h \partial^\alpha h + C \partial_\alpha h^{\mu\alpha} \partial^\nu h_{\mu\nu} + D \partial^\alpha h \partial^\mu h_{\alpha\mu}), \quad (8)$$

donde  $h = h^\mu{}_\mu$  y  $A, B, C$  y  $D$  son constantes.

- b) Imponga la invariancia de esta acción ante (3). Esto permite fijar tres de las constantes  $A, B, C$  y  $D$  en función de la restante.
- c) Integrar por partes para llevar la acción a la forma

$$\int d^4x h^{\mu\nu} G_{\mu\nu}^{(1)}[h], \quad (9)$$

donde  $G_{\mu\nu}^{(1)}[h]$  es el tensor de Einstein linealizado.

- d) Por último, fijar el valor de la constante restante acoplando la acción con materia y pidiendo que las ecuaciones de movimiento coincidan con las ecuaciones de Einstein linealizadas. El acoplamiento con materia se realiza sumando a la acción un término de la forma

$$\int d^4x h_{\mu\nu} T^{\mu\nu}, \quad (10)$$

donde  $T^{\mu\nu}$  es el tensor de energía-impulso.

5. En una región del espacio la métrica tiene la forma del Problema 1 con  $\phi = gz$ . Considere un rayo de luz que parte desde el origen en la dirección  $x$ . Muestre que, para desplazamientos pequeños (*¿comparados con qué?*), la trayectoria del rayo es

$$z(x) \simeq -gx^2. \quad (11)$$

Ayuda: es útil recordar que  $p_\mu p^\mu = 0$  y aprovechar las magnitudes conservadas.

6. Una consecuencia observable del comportamiento de los fotones en un campo débil es el retardo temporal gravitacional (*efecto Shapiro*).

- a) Utilizando la geometría del problema 1, muestre que el retardo temporal debido a la presencia de un cuerpo masivo vale

$$\Delta t = -2 \int \phi dl, \quad (12)$$

donde  $dl = \sqrt{dx^2 + dy^2 + dz^2}$  y la integración se hace a lo largo del rayo de luz.

- b) Considere que Venus, el Sol y la Tierra se encuentran alineados. Se envía una señal de radar de la Tierra a Venus y se recibe su reflejo. Utilizando el potencial newtoniano y llamando  $M_{\odot}$  a la masa del Sol,  $r_T$  a la distancia Sol-Tierra y  $r_V$  a la distancia Sol-Venus, obtenga la expresión correspondiente al retardo temporal gravitatorio en este caso.

Nota: además del efecto Shapiro existe un retardo temporal geométrico debido a que los fotones deben recorrer una curva de mayor longitud que en ausencia del deflector. Para el Sol este segundo efecto es despreciable pero puede ser importante en otros casos, como en cosmología.

7. Las ecuaciones de Einstein con constante cosmológica  $\Lambda$  tienen la forma

$$R_{\mu\nu} - \frac{1}{2}g_{\mu\nu}R + \Lambda g_{\mu\nu} = 8\pi G T_{\mu\nu}. \quad (13)$$

Una (mala) cota superior para la constante cosmológica puede obtenerse exigiendo que la misma no afecte el movimiento observado de los planetas del Sistema Solar. Obtenga una cota para  $\Lambda$  utilizando el hecho de que la órbita de Plutón tiene un periodo de aproximadamente 247 años.

8. En el gauge de Lorenz (ver problema 2) las ecuaciones de Einstein linealizadas en vacío toman la forma  $\square \bar{h}_{\mu\nu} = 0$ . Como solución de dichas ecuaciones proponga una onda monocromática plana

$$\bar{h}_{\mu\nu} = A_{\mu\nu} e^{ikx}. \quad (14)$$

- a) Muestre que  $k$  es un cuadrivector nulo en la métrica de Minkowski y cumple

$$A_{\mu\nu} k^{\nu} = 0. \quad (15)$$

- b) El gauge de Lorenz no fija toda la libertad de gauge de una onda gravitatoria. En efecto, una transformación de gauge tal que  $\square \xi^{\mu} = 0$  no modifica el gauge de Lorenz. Muestre que es posible pedir además que

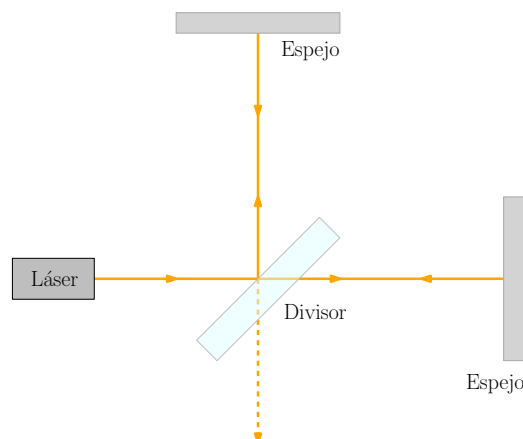
$$A_{0\nu} = 0, \quad A^{\mu}_{\mu} = A^i_i = 0, \quad (16)$$

usando un generador de la forma  $\xi_\mu = C_\mu e^{ikx}$  elegido convenientemente. Las condiciones (15) y (16) definen el denominado *transverse-traceless gauge* o *gauge transverso-sin traza*, también llamado *gauge TT*). Notar que estas condiciones implican que

$$\bar{h}_{\mu\nu}^{TT} = h_{\mu\nu}^{TT}. \quad (17)$$

c) ¿Cuántos grados de libertad tiene la onda?

9. Dos partículas se encuentran en reposo unidas por un resorte de longitud natural  $L_0$ . Cuando una onda gravitatoria se propaga a través de este sistema la longitud natural del resorte sigue siendo  $L_0$ ; sin embargo, el resorte adquiere una tensión y el sistema comienza a oscilar. Explique el motivo por el cual esto sucede. Esta idea fue utilizada por Joseph Weber como un primer intento de detección directa de ondas gravitatorias.
10. a) Utilice la ecuación de la geodésica para describir el efecto de una onda gravitatoria monocromática plana, que se propaga en la dirección  $z$ , sobre un anillo de partículas libremente gravitantes situadas inicialmente en reposo en el plano  $x$ - $y$ . Considere las dos posibles polarizaciones independientes de la onda: i)  $A_{xy} = 0$ ,  $A_{xx} = -A_{yy} \neq 0$ , ii)  $A_{xx} = A_{yy} = 0$ ,  $A_{xy} \neq 0$ , en el *gauge TT* (note que estas dos polarizaciones se obtienen una de la otra con sólo hacer una rotación de  $45^\circ$  en el plano  $x$ - $y$ ; por lo tanto es suficiente calcular para una de ellas).
- b) Con el objeto de detectar el paso de una onda gravitatoria se envían rayos de luz desde el centro del anillo hacia las partículas del mismo. Determine si la onda afecta el tiempo propio de ida y vuelta de la señal. Suponga que el radio del anillo es mucho menor que la longitud de onda.
11. Los interferómetros que se usan en LIGO (*Laser Interferometer Gravitational-wave Observatory*) son a grandes rasgos interferómetros de Michelson (ver figura). Cuando una onda gravitacional atraviesa el interferómetro el espacio-tiempo se perturba y, dependiendo de la fuente de la onda y su polarización, esto resulta en un cambio efectivo en la longitud de uno o ambos de los rayos que atraviesan el divisor de haz en el interferómetro.



Por simplicidad consideremos una onda viajando en la dirección  $z$  con polarización  $h_{xx} = -h_{yy}$  en el gauge  $TT$ .

- a) Calcular el tiempo (para un observador ubicado en el divisor del haz) que tarda un fotón en ir y volver desde el divisor hasta cada uno de los espejos cuando una onda gravitatoria con polarización  $TT$  atraviesa la región. Trabajar a primer orden en la perturbación y suponer que la misma se mantiene aproximadamente constante durante el experimento.
- b) Plantear la condición para que haya interferencia destructiva entre los haces provenientes de cada uno de los espejos cuando regresan al divisor.

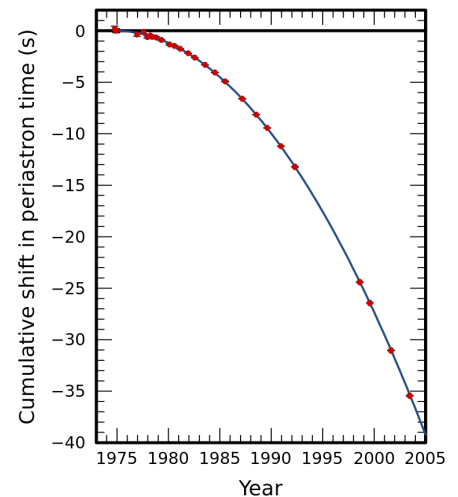
12. En electromagnetismo no existe radiación monopolar, y lo mismo sucede con el campo gravitatorio. En cambio sí hay radiación dipolar en electromagnetismo. Dé argumentos que muestren que no existe radiación dipolar de ondas gravitatorias.

13. Russell Hulse y Joseph Taylor ganaron el Premio Nobel de Física en 1993 por su descubrimiento del pulsar binario PSR B1913+16, conocido como el pulsar de Hulse-Taylor. Este sistema binario está formado por dos estrellas de neutrones de masa  $M \simeq 1,4M_{\odot}$ , una de las cuales es un pulsar, que orbitan una alrededor de la otra dando una vuelta cada 8 horas aproximadamente. Hulse y Taylor observaron que el período la órbita se reducía con el paso del tiempo (ver figura), lo que coincidía exactamente con las predicciones de la teoría de la relatividad general de Einstein sobre la pérdida de energía debido a la radiación gravitacional. De esta forma se obtuvo la primera evidencia indirecta de la existencia de las ondas gravitacionales.

Suponiendo que la órbita es circular, la potencia irradiada por ondas gravitatorias es

$$P = \frac{8}{5}M^2\ell^4\omega^6, \tag{18}$$

donde  $\ell$  es la distancia entre las estrellas y  $\omega$  la frecuencia angular de la órbita. Usando la aproximación newtoniana, estime cuánto disminuye el periodo cada año.



Evidencia de la disminución del período de PSR B1913+16. Los puntos indican el incremento acumulado en el tiempo de periastron en relación con lo que ocurriría si no hubiera pérdida de energía, y la parábola lo predicho por la teoría de la relatividad general.