Relatividad General – 1er cuatrimestre de 2024
Guía 1: *Relatividad especial.*

1. Una partícula se mueve en el espacio-tiempo de Minkowski con cuadrivelocidad

$$U^\alpha(\tau) = (\cosh(a\tau), \sinh(a\tau), 0, 0)\,, \tag{1}$$

donde τ es el tiempo propio de la partícula y a una constante.

a) Muestre que $U^2 = U_\alpha U^\alpha = -1$, como corresponde a una cuadrivelocidad.

b) Integre las ecuaciones de movimiento de la partícula para obtener la curva que describe. Muestre que se trata de una hipérbola en el plano t-x.

c) Verifique que la línea de universo de la partícula es interior al cono de luz de cualquiera de los eventos pertenecientes a dicha línea. (Dos eventos cualesquiera de una línea de universo de partícula tienen separación "temporal").

d) Caracterice la región del espacio-tiempo que no puede influir sobre el comportamiento de la partícula. Haga un gráfico espacio-temporal con la curva de la partícula y la región en cuestión.

2. La cuadriaceleración A de una partícula es la derivada de su cuadrivelocidad respecto al tiempo propio, $A^\alpha = dU^\alpha/d\tau$.

a) Muestre que U y A son ortogonales (respecto a la métrica de Minkowski), $U \cdot A = U^\alpha A_\alpha = 0$. Como U es siempre temporal sobre cualquier línea de universo de partícula, entonces A es espacial.

b) Muestre que, en el sistema de referencia inercial en el que la partícula está momentáneamente en reposo (MCRF, por "momentarily comoving reference frame"), la cuadriaceleración tiene la forma $A = (0, \vec{a})$, donde $\vec{a}$ es la aceleración (común) medida en este sistema de referencia. Esta última se conoce como la *aceleración propia* de la partícula.

c) Muestre que, si A es constante, entonces $A = 0$. Es decir, no existe un movimiento con cuadriaceleración constante, excepto en el caso trivial $A = 0$.

d) Calcule la cuadriaceleración y la aceleración propia para el movimiento del problema anterior. En particular, compruebe que la aceleración propia es constante. Por eso, a este movimiento se lo llama uniformemente acelerado.

3. En el espacio-tiempo de Minkowski bidimensional, con intervalo $ds^2 = -dt^2 + dx^2$, considere los siguientes cambios de coordenadas: (i) $x^\pm = x \pm t$, (ii) $X^\pm = \arctan x^\pm$, (iii) $X = X^+ + X^-$, $T = X^+ - X^-$.

a) Dibuje el espacio-tiempo en las coordenadas (T, X). Ese dibujo se llama el *diagrama de Penrose* de Minkowski.

b) En el diagrama de Penrose, dibuje las líneas de universo de (i) un fotón, (ii) una partícula libre masiva, (iii) la partícula del problema 1.

c) Escriba el intervalo en las coordenadas (T, X), y úselo para explicar lo obtenido para el fotón en el ítem anterior.

4. Muestre que el operador D'Alembertiano es invariante Lorentz.

5. El cuadrimpulso de una partícula de masa m y cuadrivelocidad U es $P = mU$. El de un fotón de frecuencia ν, para el que la cuadrivelocidad no está definida (¿por qué?), es $P = h\nu(1, \hat{p})$, donde h es la constante de Planck y $\hat{p}$ la dirección de propagación.

   a) Muestre que la conservación del cuadrimpulso prohíbe una reacción en la cual un electrón y un positrón se aniquilan para dar lugar a un único fotón. Pruebe que la producción de dos fotones está permitida.

   b) Un fotón de frecuencia ν incide sobre un electrón en reposo, cuya masa es m_e, dispersándose con una frecuencia ν' y un ángulo θ después del choque (*scattering* de Compton). Muestre que

$$\frac{1}{\nu'} - \frac{1}{\nu} = \frac{h}{m_e}(1 - \cos\theta). \tag{2}$$

6. Para un fluido de partículas de carga q, considere el objeto $J^\alpha = (\rho, \vec{j})$, donde ρ es la densidad de carga y $\vec{j}$ la densidad de corriente.

   a) Suponiendo que todas las partículas de un mismo elemento de fluido se mueven con la misma cuadrivelocidad U, muestre que

$$J^\alpha = qnU^\alpha, \tag{3}$$

   donde n es la densidad de partículas medida en el MCRF del elemento. Como n es un escalar y U un cuadrivector, se sigue que J es un cuadrivector. Para un fluido genérico, J siempre se puede pensar como la contribución de las partículas con cuadrivelocidad U_1, más la de las partículas con cuadrivelocidad U_2, etc. Como todas estas contribuciones son cuadrivectores, J es siempre un cuadrivector. Éste se conoce como el cuadrivector densidad de corriente.

   b) ¿Cómo se expresa la conservación de la carga en términos de J?

7. *Ecuaciones de Maxwell.* Escribiendo los campos eléctrico y magnético en términos del potencial eléctrico y el potencial vector,

$$\vec{E} = -\nabla\phi - \partial_t\vec{A} \qquad \vec{B} = \nabla \times \vec{A}, \tag{4}$$

   las ecuaciones de Maxwell homogéneas (ley de Gauss del campo magnético y ley de Faraday) se cumplen automáticamente, y las inhomogéneas (ley de Gauss del campo eléctrico y ley de Ampère-Maxwell) toman la forma

$$\begin{aligned} &\nabla \cdot (\nabla\phi + \partial_t\vec{A}) = -4\pi\rho \\ &\nabla^2\vec{A} - \partial_t^2\vec{A} - \nabla(\nabla \cdot \vec{A} + \partial_t\phi) = -4\pi\vec{j}, \end{aligned} \tag{5}$$

donde ρ es la densidad de carga y $\vec{j}$ la densidad de corriente.

a) Definiendo el objeto $A^\alpha = (\phi, \vec{A})$, muestre que las ecuaciones de Maxwell inhomogéneas se pueden reescribir como

$$\partial_\beta F^{\alpha\beta} = 4\pi J^\alpha, \tag{6}$$

donde $F^{\alpha\beta} = \partial^\alpha A^\beta - \partial^\beta A^\alpha$, y J^α es el cuadrivector densidad de corriente. Como el lado derecho de esta ecuación es un cuadrivector, el lado izquierdo también tiene que serlo. Eso lleva a postular que A^α es un cuadrivector (cuadrivector potencial electromagnético) y por lo tanto $F^{\alpha\beta}$ es un tensor (tensor de campo). De ahí surgen las leyes de transformación de $\vec{E}$ y $\vec{B}$.

b) Escriba las componentes del tensor de campo en términos de $\vec{E}$ y $\vec{B}$.

c) ¿Cuántas ecuaciones independientes hay en (6)? ¿Cuántas incógnitas físicamente relevantes?

8. Considere una partícula de masa m y carga q en presencia de un campo electromagnético con tensor de campo F.

a) Muestre que

$$m\frac{dU^\alpha}{d\tau} = qF^\alpha{}_\beta U^\beta. \tag{7}$$

Ayuda: para mostrar que dos tensores son iguales, basta con mostrarlo en un sistema de referencia.

b) Estudie la cuadrifuerza $K^\alpha = qF^\alpha{}_\beta U^\beta$ a primer orden en la velocidad de la partícula.

9. La acción de una partícula de masa m y carga q en un campo electromagnético A es

$$S[x] = -m\int\sqrt{-\eta_{\alpha\beta}dx^\alpha dx^\beta} + q\int A_\alpha\, dx^\alpha. \tag{8}$$

Obtenga las ecuaciones de Euler-Lagrange correspondientes, y compruebe que se recupera la ecuación (7).

10. Las ecuaciones de Maxwell pueden obtenerse extremizando la acción

$$S\,[A] = -\frac{1}{16\pi}\int F_{\alpha\beta}F^{\alpha\beta}\, d^4x + \int A_\alpha\, J^\alpha\, d^4x, \tag{9}$$

donde J^α es la densidad de corriente.

a) Obtenga las ecuaciones de Euler-Lagrange y verifique que se recuperan las ecuaciones de Maxwell.

b) Muestre que la acción (9) es invariante bajo la transformación de gauge $A_\alpha \to A_\alpha + \partial_\alpha\chi$, donde χ es una función arbitraria.

11. Para un fluido de partículas de masa m, considere el objeto $T^{\alpha\beta}$ definido de la siguiente forma: $T^{\alpha 0}$ es la densidad de la componente α del cuadrimomento, y $T^{\alpha i}$ es el flujo de esa misma componente a través de la superficie x^i constante.

    a) Suponiendo que todas las partículas de un mismo elemento de fluido se mueven con la misma cuadrivelocidad U, muestre que

    $$T^{\alpha\beta} = mnU^\alpha U^\beta, \tag{10}$$

    donde n es la densidad de partículas medida en el MCRF del elemento. Por lo tanto, T es un tensor en este caso, y en consecuencia, por el mismo argumento que se usó en el problema 6, lo es en todos los casos. Este tensor se conoce como el *tensor de energía-impulso*.

    b) ¿Cómo se expresa la conservación del cuadrimpulso en términos de T?

12. Así como las componentes $T^{\alpha 0}$ del tensor de energía-momento son densidades de p^α, y las componentes $T^{\alpha i}$ dan cuenta de transferencias de p^α a través de superficies, el tensor

    $$M^{\alpha\beta\gamma} = x^\alpha T^{\beta\gamma} - x^\beta T^{\alpha\gamma} \tag{11}$$

    contiene las densidades de momento angular en sus componentes $M^{\alpha\beta 0}$, y los torques asociados a las transferencias de cantidad de movimiento. Del mismo modo que la conservación de la energía-momento requiere que $\partial_\beta T^{\alpha\beta} = 0$, la conservación del momento angular requiere que $\partial_\gamma M^{\alpha\beta\gamma} = 0$. Muestre que esto sólo es posible si el tensor de energía-momento es simétrico.

13. Un fluido ideal es aquél en el que no hay fuerzas viscosas ni conducción de calor.

    a) Escriba el tensor de energía-momento de un fluido ideal en reposo.

    b) Transforme ese tensor a un sistema de referencia inercial genérico.

14. El tensor de energía-momento del campo electromagnético es

    $$T^{\alpha\beta} = \frac{1}{4\pi}\left(F^\alpha{}_\lambda F^{\beta\lambda} - \frac{1}{4}\eta^{\alpha\beta} F^{\lambda\rho} F_{\lambda\rho}\right). \tag{12}$$

    Muestre que este tensor tiene traza nula. Usando las ecuaciones de Maxwell pruebe que el tensor de energía-momento electromagnético se conserva en una región libre de cargas.