

Cosmología

1. Un espacio-tiempo es espacialmente *homogéneo* si existe una familia uniparamétrica de superficies espaciales Σ_t que cubren el espacio-tiempo y tales que para cada t y puntos p y q en Σ_t existe una isometría que lleva p a q . Por otro lado, un espacio-tiempo es espacialmente *isótropo* si existe una familia de observadores tales para cada punto p en la línea de mundo de cada uno de ellos existe una isometría que: deja fijo p y el vector tangente u a la línea de mundo en p ; y transforma s_1 en s_2 , siendo s_1 y s_2 vectores unitarios espaciales en V_p y ortogonales u . Para un espacio-tiempo homogéneo e isótropo siempre existen coordenadas en las que la métrica tiene la forma

$$ds^2 = -dt^2 + a(t)^2 d\ell^2 \quad (1)$$

donde $a(t)$ es una función a determinar y $d\ell^2$ es la métrica de un espacio tridimensional isótropo y homogéneo. Estas posibles métricas espaciales son:

$$d\ell^2 = \begin{cases} d\psi^2 + \sin^2 \psi (d\theta^2 + \sin^2 \theta d\varphi^2) & (K > 0) \\ dx^2 + dy^2 + dz^2 & (K = 0) \\ d\psi^2 + \sinh^2 \psi (d\theta^2 + \sin^2 \theta d\varphi^2) & (K < 0) \end{cases} \quad (2)$$

y corresponden a: una esfera tridimensional ($K > 0$), el espacio Euclídeo en tres dimensiones ($K = 0$) o el espacio hiperbólico tridimensional ($K < 0$). (1) se conoce como la *métrica de Friedmann-Robertson-Walker*.

- a) Verifique que la métrica (1) efectivamente corresponde a un espacio-tiempo espacialmente homogéneo e isótropo.
- b) Muestre que la velocidad relativa entre dos observadores *comóviles* es proporcional a su distancia. El factor de proporcional es el denominado *parámetro de Hubble*:

$$H = \frac{\dot{a}}{a}, \quad (3)$$

y su valor en el presente, $H_0 \simeq 2,3 \times 10^{-18} s^{-1}$, es la *constante de Hubble*.

2. Muestre que la métrica (1) se puede escribir en la forma

$$ds^2 = -dt^2 + a(t)^2 \left[\frac{dr^2}{1 - kr^2} + r^2 (d\theta^2 + \sin^2 \theta d\varphi^2) \right], \quad (4)$$

con $k = -1, 0, 1$.

3. En el espacio-tiempo (4) considere un fluido perfecto en reposo, $u^r = u^\theta = u^\varphi = 0$, y tal que ρ y p sólo dependen de t .

- a) Calcule u .
- b) Calcule las componentes del tensor de energía-momento.
- c) Muestre que la ecuación conservación del tensor de energía-momento de un fluido perfecto (ecuación (3) de la Guía 5), para el caso presente, equivale a

$$\dot{\rho} + 3(\rho + p)\frac{\dot{a}}{a} = 0. \quad (5)$$

4. Considere el fluido del problema anterior como el modelo para la materia del universo representado por la métrica (4).

- a) Muestre que la componente tt de la ecuación de Einstein equivale a

$$\dot{a}^2 + k = \frac{8}{3}\pi G\rho a^2. \quad (6)$$

Esta es la denominada *ecuación de Friedmann* y, junto con la proveniente de la ley de conservación (5) y la ecuación de estado para el fluido, determinan completamente la dinámica del universo.

- b) Probar que

$$\frac{\ddot{a}}{a} = -\frac{4}{3}\pi G(\rho + 3p). \quad (7)$$

Notar que esta ecuación nos dice el universo no puede ser estático si $\rho > 0$ y $p \geq 0$.

5. Considere un fluido perfecto con ecuación de estado

$$p = w\rho, \quad (8)$$

donde w es una constante.

- a) Usando la ecuación de conservación del tensor de energía-momento (5) demuestre que

$$\rho = \alpha a^{-3(1+w)} \quad (9)$$

donde α es una constante.

- b) Utilice el resultado del inciso anterior y la ecuación de Friedmann (6) para probar que

$$\dot{a}^2 - \frac{8}{3}\pi G\alpha a^{-(1+3w)} = -k. \quad (10)$$

Considere el término $V(a) = -\frac{8}{3}\pi G\alpha a^{-(1+3w)}$ como un potencial efectivo y analice la dinámica del universo para las distintas elecciones de los parámetros w y k .

- c) Integre la ecuación anterior para el caso de un universo plano ($k = 0$) dominado por:

- (I) Polvo ($w = 0$);
 (II) Radiación ($w = 1/3$);

(III) Energía oscura ($w = -1$).

d) Demuestre que para un modelo espacialmente plano ($k = 0$) con $w \neq -1$, ρ es proporcional a $1/t^2$.

6. Considere las ecuaciones de Einstein con el término de constante cosmológica:

$$G_{\mu\nu} + \Lambda g_{\mu\nu} = 8\pi G T_{\mu\nu}. \quad (11)$$

a) Verifique que el término de constante cosmológica se puede interpretar como la contribución del $T_{\mu\nu}$ de un fluido perfecto con $w = -1$.

b) Muestre que un universo estático es posible sólo si $k = 1$ y $\Lambda > 0$. Estas soluciones se conocen como *universos estáticos de Einstein*. Si la materia es polvo relacione a con ρ y estudie la estabilidad del universo.

c) Determine a para el caso en que $\rho = 0$, $p = 0$, $\Lambda > 0$ y $k = 0$. El espacio-tiempo resultante se conoce como espacio de *de Sitter*.

7. Demuestre que en un modelo de Friedman-Robertson-Walker con una geometría espacial cerrada y dominado por materia no relativista, un rayo de luz que viaja desde el comienzo de la expansión del universo completa una vuelta alrededor del mismo justo en el momento del recolapso. Además, demuestre que en un modelo donde la radiación es dominante, el rayo de luz solo logra recorrer la mitad del universo antes de su recolapso.

8. Considere un objeto estelar en $r = 0$ en la métrica (4) que a tiempo t_e emite luz de frecuencia ν_e con *luminosidad* L .

a) Calcule el flujo F de fotones recibido en r a un tiempo posterior t_0 .

b) Se define la *distancia de luminosidad* como

$$d_L = \sqrt{\frac{L}{4\pi F}}. \quad (12)$$

Probar que

$$d_L = a_0 r (1 + z), \quad (13)$$

donde $a_0 = a(t_0)$ y z es el corrimiento al rojo de los fotones emitidos.

c) Suponiendo que el espacio es aproximadamente plano y que z es pequeño, relacione r con z y utilice la ecuación (13) para probar que

$$d_L \approx \left(\frac{z}{H_0}\right) \left[1 + \left(1 + \frac{1}{2} \frac{\dot{H}_0}{H_0^2}\right) z\right]. \quad (14)$$

siendo $H_0 = H(t_0)$. Midiendo la distancia de luminosidad y el corrimiento al rojo de distintos objetos estelares podemos obtener \dot{H}_0 . Estas mediciones son las que llevaron a concluir que el universo se expande de forma acelerada.

9. Mediciones recientes indican que el universo es espacialmente plano y que, en su etapa actual, se expande aceleradamente con

$$|q| = \frac{a\ddot{a}}{\dot{a}^2} \approx 0,6. \quad (15)$$

Teniendo en cuenta que la presión de la materia es despreciable y que la densidad de materia (incluyendo materia oscura) es $\rho \approx 2,7 \times 10^{-27} \text{ kg m}^{-3}$, obtenga el valor de la constante cosmológica que sería necesario para reproducir el valor dado para q .

Agujero negro de Kerr

10. La métrica de Kerr es una solución de las ecuaciones de Einstein en vacío que describe un agujero negro rotante. En las coordenadas de Boyer-Lindquist, la métrica es

$$ds^2 = - \left(1 - \frac{2GMr}{\rho^2} \right) dt^2 - \frac{4GMa r \sin^2 \theta}{\rho^2} dt d\varphi + \frac{\rho^2}{\Delta} dr^2 + \rho^2 d\theta^2 + \frac{(r^2 + a^2)^2 - a^2 \Delta \sin^2 \theta}{\rho^2} \sin^2 \theta d\varphi^2, \quad (16)$$

donde

$$\Delta = r^2 - 2GMr + a^2 \quad \rho^2 = r^2 + a^2 \cos^2 \theta \quad (17)$$

y M y a son constantes, que deben interpretarse respectivamente como la masa y el momento angular por unidad de masa del agujero negro.

- a) ¿Qué vectores de la base coordenada son de Killing? ¿Es estacionaria esta métrica? ¿Es estática?
- b) ¿A qué se reduce la métrica en el caso $a = 0$?
11. En el espacio-tiempo de Minkowski, considere una estrella esférica homogénea, de masa M y radio R , que rota con velocidad angular constante Ω alrededor del eje z . Suponga que los efectos relativistas son pequeños, es decir, que la presión es despreciable y que $\Omega R \ll 1$.
- a) Calcule el tensor de energía-momento en la base cartesiana, despreciando todo aquello que sea cuadrático en ΩR .
- b) La ecuación de Poisson escalar $\Delta f = g$ tiene por solución

$$f(\vec{x}) = -\frac{1}{4\pi} \int d^3x' \frac{g(\vec{x}')}{|\vec{x} - \vec{x}'|}. \quad (18)$$

Teniendo esto en cuenta, resuelva las ecuaciones de Einstein linealizadas asumiendo que la perturbación de la métrica no depende del tiempo. Hágalo sólo en el exterior de la estrella, y trabajando al orden más bajo en $1/r$, donde r es la distancia al centro de

ésta. Exprese el resultado en términos del momento angular por unidad de masa de la estrella, $a = 2\Omega R^2/5$.

- c) Transforme el resultado del ítem anterior a las coordenadas esféricas. Compruebe que la métrica obtenida es idéntica a la de Kerr en el límite de r grande, lo cual justifica por qué los parámetros M y a de esa métrica se interpretan como la masa y el momento angular por unidad de masa.

12. En el espacio euclídeo, considere las *coordenadas esferoidales* (r, θ, φ) , definidas en términos de las coordenadas cartesianas (x, y, z) por las ecuaciones

$$x = \sqrt{r^2 + a^2} \sin \theta \cos \varphi \quad y = \sqrt{r^2 + a^2} \sin \theta \sin \varphi \quad z = r \cos \theta. \quad (19)$$

- a) Escriba la métrica euclídea en coordenadas esferoidales.
 b) Qué forma tienen las superficies $r = \text{constante}$? ¿Qué ocurre cuando $r \rightarrow 0$?
 c) Muestre que, en el caso $M = 0$, la métrica de Kerr es la de Minkowski escrita en coordenadas esferoidales.

13. En el espacio-tiempo de Kerr, calcule la velocidad angular $d\varphi/dt$ de una partícula con momento angular 0, y muestre que tiene el mismo signo que a .

Comentario: el hecho de que una partícula con momento angular nulo tenga una velocidad angular no nula se interpreta como un arrastre del espacio-tiempo sobre la partícula, y se conoce como *frame-dragging*. Por lo visto en el problema 11, es claro que este efecto no es exclusivo de los agujeros negros rotantes, sino que se da de forma genérica cuando la fuente de gravedad tiene rotación. El satélite Gravity Probe B se lanzó al espacio en 2004 para medir el frame-dragging de la Tierra, aunque sólo lo pudo hacer con una precisión aproximada del 20 %. En experimentos posteriores, este efecto se pudo medir con mayor precisión.

14. Si la gravedad newtoniana es análoga a la electrostática, las ecuaciones de Einstein linealizadas guardan un cierto parecido con las ecuaciones de Maxwell. El frame-dragging se considera un efecto “gravitomagnético”. Para verlo, considere un dipolo magnético de momento $\vec{\mu}$. El campo magnético en el plano normal a $\vec{\mu}$ que pasa por el centro del dipolo es

$$\vec{B}(r) = -\frac{\vec{\mu}}{r^3}, \quad (20)$$

donde r es la distancia al centro del dipolo. Una partícula de masa m y carga q se mueve por este plano. La partícula arranca desde el infinito con movimiento radial, y por lo tanto con momento angular 0 respecto al origen. Calcule la velocidad angular de la partícula en función de r , y muestre que el resultado es análogo al obtenido en el problema anterior en el régimen de r grande.

15. El horizonte del agujero negro de Schwarzschild es la hipersuperficie en la que g_{tt} se anula y g_{rr} diverge. En la métrica de Kerr, estas dos condiciones no se dan a la vez.

- a) Encuentre la hipersuperficie más externa en la que g_{tt} se anula. Muestre que es una hipersuperficie temporal (es decir, que su vector normal es espacial), de manera que puede ser cruzada en ambos sentidos y por lo tanto no es un horizonte. Esta hipersuperficie se conoce como la *ergosfera*.
- b) Halle la hipersuperficie más externa en la que g_{rr} diverge. Muestre que es una hipersuperficie nula (es decir, que su vector normal es nulo), y por lo tanto no puede ser cruzada en ambos sentidos. Esta hipersuperficie es el horizonte del agujero negro de Kerr. ¿Qué ocurre si $a > GM$?
- c) Represente gráficamente el horizonte y la ergosfera. La región que queda entre estas dos hipersuperficies es la *ergoregión*.

Ayuda: dada una función f , todo vector normal a la hipersuperficie $f = 0$ es proporcional a $g^{\mu\nu}\partial_\nu f$.

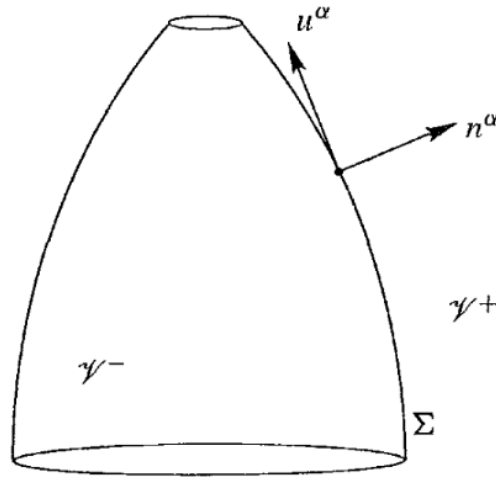
16. Muestre que, en la ergoregión, una partícula no puede estar en reposo (r , θ y φ constantes).
17. Considere un fotón en el plano ecuatorial $\theta = \pi/2$, que inicialmente se mueve en la dirección $\pm\varphi$ (es decir, que inicialmente tiene r constante). Muestre que, si el fotón está en la ergoregión, la velocidad angular inicial $d\varphi/dt$ tiene el mismo signo que a .
18. Muestre que, en el exterior de la ergosfera, la energía de una partícula es necesariamente positiva, pero en la ergoregión puede tener cualquier signo. ¿Cómo usaría esto para extraer energía de un agujero negro rotante?
19. Dese una vuelta por el diagrama de Penrose del agujero negro de Kerr (ver por ejemplo el libro de Wald, página 317), y maravílese ante la infinidad de mundos que alberga en su interior.

Colapso gravitatorio

20. En este problema vamos a estudiar el modelo de colapso gravitatorio más sencillo posible: una configuración esféricamente simétrica en la que el contenido de materia es un fluido perfecto con densidad de energía uniforme $\rho(\tau)$ y presión es despreciable $p = 0$. El espacio tiempo se divide en dos regiones, una interior \mathcal{V}^- (en la que $\rho \neq 0$) y otra exterior \mathcal{V}^+ (donde $\rho = 0$) como se muestra en la figura. La hipersuperficie que divide las dos regiones corresponde a la superficie de la estrella y se denota Σ y llamamos n a su 1-forma normal. Para la región interior consideramos el siguiente *ansatz*

$$ds_-^2 = -d\tau^2 + R(\tau)^2 (d\chi^2 + \sin(\chi)^2 d\Omega^2), \quad (21)$$

donde la coordenada τ es el tiempo propio de observadores comóviles libremente gravitantes y R es la coordenada radial de la superficie de la estrella.



- a) Halle la cuadrivelocidad u de los observadores comóviles y la 1-forma n normal a Σ (apuntando hacia \mathcal{V}^+) en las coordenadas de (21). u y n satisfacen $u \cdot u = -1$, $n \cdot n = 1$, $u \cdot n = 0$.
- b) ¿Qué *ansatz* $ds_+^2 = g_{\mu\nu}^+ dx^\mu dx^\nu$ propone para la región exterior? Hallar u y n en las coordenadas de la métrica exterior.
- c) Muestre que la ecuación de Einstein $\tau\tau$ y la ecuación de conservación del tensor de energía-momentos para la región interior son respectivamente

$$\dot{R}^2 + 1 = \frac{8\pi G}{3} \rho R^2 \quad \text{y} \quad \frac{d}{d\tau}(\rho R^3) = 0. \tag{22}$$

- d) Halle la solución de las ecuaciones (22) asumiendo que inicialmente el “radio” de la estrella tiene su valor máximo. Notar que la ecuación diferencial para $R(\tau)$ es la de la cicloide cuya solución puede expresarse de forma paramétrica.
- e) La solución interior y la solución exterior deben pegarse suavemente en Σ . Las condiciones de juntura son:

1) La métrica inducida $h_{ab} = \frac{\partial x^\mu}{\partial y^a} \frac{\partial x^\nu}{\partial y^b} g_{\mu\nu}$ debe ser continua en Σ ;

2) El tensor de curvatura extrínseca* $K_{\mu\nu} \equiv \frac{\partial x^\mu}{\partial y^a} \frac{\partial x^\nu}{\partial y^b} \nabla_{(\mu} n_{\nu)}$ debe ser continuo en Σ .

donde x^μ son las coordenadas en \mathcal{V}^\pm y y^a son las coordenadas en Σ .

- f) Obtenga una expresión para la masa de la estrella que colapsa en función de la densidad de energía ρ y el radio de la estrella $R(\tau)$.
- g) Calcule el escalar de Ricci del modelo.
- h) Conociendo los diagramas de Penrose de Minkowski y de Schwarzschild dibuje cualitativamente el diagrama de Pensore correspondiente a este modelo de colapso gravitatorio.

*Otras expresiones equivalentes para el tensor de curvatura extrínseca son $K_{\mu\nu} = \frac{1}{2} \mathcal{L}_n P_{\mu\nu}$ donde $P_\nu^\mu = \delta_\nu^\mu - n^\mu n_\nu$ y $K_{\mu\nu} = \frac{1}{2} P_\mu^\alpha P_\nu^\beta \mathcal{L}_n g_{\alpha\beta}$.