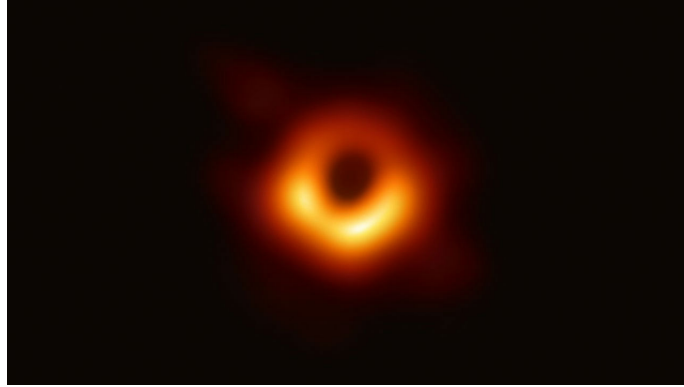


## Relatividad General – 1er cuatrimestre de 2024

### Guía 5: Solución de Schwarzschild.



1. Un espacio-tiempo se dice *estacionario* si tiene un vector de Killing globalmente temporal, y se dice *esféricamente simétrico* si su grupo de isometrías contiene al grupo de rotaciones  $SO(3)$  y las órbitas de este subgrupo son esferas (una *órbita* es el conjunto de puntos que se obtiene actuando con el subgrupo sobre un punto dado). Para un espacio-tiempo estacionario y esféricamente simétrico, siempre existe un sistema de coordenadas en el que la métrica tiene la forma

$$ds^2 = -e^{2\phi(r)} dt^2 + e^{2\psi(r)} dr^2 + r^2 (d\theta^2 + \sin^2 \theta d\varphi^2), \quad (1)$$

donde  $\phi$  y  $\psi$  son funciones arbitrarias.

- a) Muestre que la métrica (1) efectivamente corresponde a un espacio-tiempo estacionario y esféricamente simétrico.
- b) Muestre que, de hecho, este espacio-tiempo es *estático*, es decir, el Killing temporal es ortogonal a hipersuperficies. Por lo tanto, estacionario y esféricamente simétrico implica estático.
2. Un fluido se dice perfecto si su tensor de energía-momento tiene la forma

$$T_{\mu\nu} = \rho u_\mu u_\nu + p(g_{\mu\nu} + u_\mu u_\nu), \quad (2)$$

donde  $u$  es un campo de vectores con  $u^2 = -1$  (el campo de velocidades del fluido) y  $\rho$  y  $p$  son funciones (la densidad de energía y la presión en el MCRF). Muestre que, para un fluido perfecto, la ecuación de conservación del tensor de energía-momento toma la forma

$$\nabla_\mu p = -(\rho + p)u^\alpha \nabla_\alpha u_\mu - u_\mu \nabla_\alpha [(\rho + p)u^\alpha]. \quad (3)$$

3. En el espacio-tiempo (1) considere un fluido perfecto en equilibrio hidrostático. Es decir, suponga que el fluido está en reposo,  $u^r = u^\theta = u^\varphi = 0$ , y que  $\rho$  y  $p$  no dependen de  $t$ .
- a) Calcule  $u$ .

- b) Calcule las componentes del tensor de energía-momento en las coordenadas  $(t, r, \theta, \varphi)$ .  
 c) Muestre que la ecuación de conservación (3) equivale a

$$\partial_r p = -(\rho + p)\phi'. \quad (4)$$

4. En el fluido del problema anterior, suponga que  $\rho$  y  $p$  dependen sólo de  $r$ , y que se anulan para  $r$  mayor que un cierto valor  $R$ . Entonces el fluido modela una estrella esféricamente simétrica en equilibrio hidrostático. Las ecuaciones de Einstein determinan el campo gravitatorio creado por la estrella. Dos componentes del tensor de Einstein de la métrica (1) son

$$G_{tt}(r) = \frac{e^{2\phi(r)}}{r^2} \frac{d}{dr} [r(1 - e^{-2\psi(r)})] \quad G_{rr}(r) = \frac{2\phi'(r)}{r} - \frac{1}{r^2} (e^{2\psi(r)} - 1). \quad (5)$$

Las demás componentes se anulan excepto  $G_{\theta\theta}$  y  $G_{\varphi\varphi}$ , que no vamos a usar.

- a) Muestre que las componentes  $tt$  y  $rr$  de las ecuaciones de Einstein equivalen a

$$e^{2\psi(r)} = \frac{1}{1 - 2Gm(r)/r} \quad \phi'(r) = \frac{Gm(r)/r^2 + 4\pi Gp(r)r}{1 - 2Gm(r)/r}, \quad (6)$$

donde

$$m(r) = 4\pi \int_0^r dr' r'^2 \rho(r'). \quad (7)$$

Las demás ecuaciones de Einstein no aportan información que no esté contenida ya en estas dos y en la ley de conservación (4). Esta última, con  $\phi'$  dado por (6), se conoce como la *ecuación de Tolman-Oppenheimer-Volkoff*.

- b) Muestre que, en el caso en que  $p$  es despreciable y  $Gm(r)/r \ll 1$ , se recuperan los resultados de la gravedad newtoniana. Interprete la ecuación de Tolman-Oppenheimer-Volkoff en ese caso. Los efectos relativistas ¿hacen más fácil o más difícil mantener el equilibrio hidrostático?  
 c) Muestre que, en el exterior de la estrella,  $r > R$ , la métrica es

$$ds^2 = - \left(1 - \frac{2GM}{r}\right) dt^2 + \frac{dr^2}{1 - \frac{2GM}{r}} + r^2 (d\theta^2 + \sin^2 \theta d\varphi^2), \quad (8)$$

donde  $M = m(R)$ . Ésta es la *métrica de Schwarzschild*. Nótese que, para cumplir con la hipótesis de estacionariedad, es necesario que el radio  $R$  de la estrella sea mayor que su *radio de Schwarzschild*  $R_s = 2GM$ . Para tener una referencia, el Sol tiene un radio de unos  $10^6$  km, y su radio de Schwarzschild es de unos 3 km.

5. Considere el paraboloide de revolución del espacio euclídeo tridimensional generado por la parábola

$$r(z) = a + \frac{z^2}{4a} \quad (9)$$

(aquí  $r$  y  $z$  son las coordenadas cilíndricas habituales y  $a$  es un parámetro). Calcule la distancia euclídea sobre el paraboloides y compare con la métrica de Schwarzschild.

6. En el caso de una estrella con densidad de energía constante, la ecuación de Tolman-Oppenheimer-Volkoff se puede integrar y se obtiene

$$p(r) = \frac{3M}{4\pi R^3} \frac{\sqrt{1 - R_s/R} - \sqrt{1 - R_s r^2/R^3}}{\sqrt{1 - R_s r^2/R^3} - 3\sqrt{1 - R_s/R}} \quad (10)$$

para  $r \leq R$ , donde se ha impuesto la condición de contorno  $p(R) = 0$ .

- a) Calcule el perfil de presiones en gravedad newtoniana, y compruebe que coincide con (10) en el límite  $R \gg R_s$ .
  - b) A partir de (10) muestre que, dada una masa de la estrella, hay un mínimo radio por debajo del cual la estrella no puede estar en equilibrio hidrostático. Muestre que esto no ocurre en gravedad newtoniana.
7. Según el *teorema de Birkhoff*, la métrica de Schwarzschild es la única solución esféricamente simétrica de las ecuaciones de Einstein en vacío. Es decir, la geometría exterior a una estrella esféricamente simétrica es la de Schwarzschild incluso si la estrella no es estática. En otras palabras, un observador en el exterior de la estrella no se da cuenta de si ésta es estática o no. Para ganar intuición sobre este teorema, muestre que es verdad en el contexto de la gravedad newtoniana.
8. Para comprender la estructura causal de la geometría de Schwarzschild, dibuje conos de luz en un gráfico  $t$  vs  $r$ .
9. La métrica de Schwarzschild parece estar mal comportada en  $r = R_s$ , pero eso es sólo un artefacto de las coordenadas, similar a lo que ocurre en el origen con las coordenadas polares. Para verlo, considere las *coordenadas de Kruskal-Szekeres*  $(T, X)$ , definidas por

$$t = R_s \log \left| \frac{X + T}{X - T} \right| \quad \left( \frac{r}{R_s} - 1 \right) e^{\frac{r}{R_s} - 1} = \frac{X^2 - T^2}{4R_s^2}. \quad (11)$$

- a) Escriba la métrica de Schwarzschild en las coordenadas de Kruskal-Szekeres, y muestre que está bien comportada en  $r = R_s$ .
- b) Represente el espacio-tiempo en las coordenadas de Kruskal-Szekeres. Dibuje las superficies  $t$  constante y  $r$  constante, así como las líneas de mundo de los rayos de luz.
- c) ¿Qué tiene de particular la superficie  $r = R_s$ ? A esta superficie se la conoce como el *horizonte de eventos*.
- d) Mediante un argumento gráfico, muestre que una partícula en caída libre radial tarda un tiempo propio finito en llegar al horizonte de eventos.

10. El *espacio-tiempo de Rindler* bidimensional es el cuadrante  $|T| < X$  del espacio-tiempo de Minkowski, donde  $(T, X)$  son coordenadas inerciales. Considere las coordenadas  $(t, x)$  para el espacio-tiempo de Rindler definidas por

$$T = x \sinh(t/\alpha) \quad X = x \cosh(t/\alpha), \quad (12)$$

donde  $\alpha$  es una constante. Nótese que las curvas  $x$  constante son líneas de universo de observadores uniformemente acelerados con aceleración  $1/x$ .

- a) Escriba la métrica de Rindler en las coordenadas  $(t, x)$ .
- b) Definiendo  $x = 2\sqrt{R_s(r - R_s)}$ , muestre que para  $x \ll R_s$  la métrica de Schwarzschild bidimensional (es decir, sin la parte angular) coincide con la de Rindler.
- c) Estudie el cambio de coordenadas (11) en la región  $x \ll R_s$ , y compárelo con (12).
11. Es trabajoso (pero no difícil) ver que las componentes no nulas del tensor de Riemann correspondiente a la geometría de Schwarzschild son

$$\begin{aligned} R^t{}_{rtr} &= -\frac{R_s}{r^3} \left(1 - \frac{R_s}{r}\right)^{-1} \\ R^t{}_{\theta t \theta} &= \frac{R^t{}_{\varphi t \varphi}}{\sin^2 \theta} = \frac{R_s}{2r} \\ R^\theta{}_{\varphi \theta \varphi} &= \frac{R_s}{r} \sin^2 \theta \\ R^r{}_{\theta r \theta} &= \frac{R^r{}_{\varphi r \varphi}}{\sin^2 \theta} = -\frac{R_s}{2r}, \end{aligned} \quad (13)$$

y aquellas obtenidas por simetría. La divergencia de estas componentes en  $r = 0$  no garantiza la existencia de una singularidad, ya que podría ser sólo una patología de las coordenadas. Calcule el invariante de Kretschmann, definido por

$$K = R^{\alpha\beta\mu\nu} R_{\alpha\beta\mu\nu}, \quad (14)$$

y utilícelo para mostrar que la singularidad en  $r = 0$  es real y no un problema de las coordenadas.

12. Toda geodésica de la métrica de Schwarzschild se puede asumir ecuatorial ( $\theta = \pi/2$ ) sin pérdida de generalidad. ¿Por qué? Muestre que las geodésicas ecuatoriales (con parametrización afín) están dadas por las ecuaciones

$$\left(1 - \frac{2GM}{r}\right) \dot{t} = E \quad r^2 \dot{\varphi} = L \quad \frac{\dot{r}^2}{2} + V(r) = e, \quad (15)$$

donde  $E$ ,  $L$  y  $e$  son constantes, y calcule el potencial efectivo  $V$ . En el caso de las geodésicas temporales y nulas, que describen el movimiento de partículas libres, las constantes  $E$  y  $L$  se interpretan como la energía y el momento angular de la partícula.

13. Considere una partícula libre masiva en la geometría de Schwarzschild.

- a) Calcule el mínimo radio que puede tener una órbita circular estable. La órbita con este radio se llama ISCO (*innermost stable circular orbit*).
- b) Calcule la velocidad angular  $\dot{\varphi}$  (el punto denota derivada respecto al tiempo propio) y la energía de una órbita circular en función de su radio.
- c) Muestre que, para una órbita circular, se cumple la tercera ley de Kepler,

$$\left(\frac{d\varphi}{dt}\right)^2 = \frac{GM}{r^3}. \quad (16)$$

- d) Calcule la frecuencia angular  $\omega$  de las pequeñas oscilaciones alrededor de una órbita circular de radio  $r_0$ . Muestre que, en el límite newtoniano,  $\omega = \dot{\varphi}$ , e interprete este resultado.
- e) Calcule la diferencia  $\dot{\varphi} - \omega$  al orden más bajo en  $GM/r_0$ , y evalúela en el caso en que  $M$  es la masa del Sol y  $r_0$  la distancia Sol-Mercurio.

14. Para una partícula libre masiva inicialmente en reposo en  $r = r_0$ , calcule el tiempo propio que tarda en caer a la singularidad  $r = 0$ .

15. Considere un fotón en la geometría de Schwarzschild.

- a) Calcule el radio de las órbitas circulares.
- b) Calcule el parámetro de impacto que debe tener el fotón para quedar atrapado en una órbita circular. ¿Qué ocurre si el parámetro de impacto es mayor a ese valor? ¿Y si es menor? Discuta este resultado en relación a la imagen que encabeza esta guía.
- c) Suponiendo que la órbita del fotón es abierta, muestre que el cambio total en la coordenada angular  $\varphi$  es

$$\Delta\varphi = 2 \int_{r_0}^{\infty} \frac{dr}{\sqrt{r^2 \left(\frac{r^2}{r_0^2} - 1\right) - 2GM/r \left(\frac{r^3}{r_0^3} - 1\right)}}, \quad (17)$$

donde  $r_0$  es el mínimo valor de  $r$  de la órbita.

- d) Muestre que  $\Delta\varphi = \pi$  si  $M = 0$ , y calcule  $\delta\varphi = \Delta\varphi - \pi$  a primer orden en  $M$ . Esta última cantidad es la deflexión de los rayos de luz por efecto gravitatorio, que Eddington midió por primera vez en 1919 convirtiendo a Einstein en una celebrity.

16. Un observador en reposo en  $r_1 > R_s$  emite un fotón que es recibido por un observador en reposo en  $r_2 > r_1$ . Calcule el cociente entre las frecuencias medidas por ambos observadores.

¿Cómo cambia el resultado si alguno de los observadores no está en reposo? ¿Qué ocurre cuando  $r_1 \rightarrow R_s$ ?