

Relatividad General 2024

Esteban Calzetta

29 de junio de 2024

Índice general

1. Relatividad Especial	1
1.0.1. La Relatividad de Galileo	1
1.0.2. La Transformación de Lorentz	3
1.1. Relatividad en 1 + 1 dimensiones	4
1.1.1. Distancias y tiempos	5
1.2. Relatividad en 3 + 1 dimensiones	6
1.2.1. Transformación de la velocidad	7
1.2.2. La aberración de la luz	8
1.3. Acerca de la literatura	10
2. El espacio-tiempo de Minkowski	12
2.1. Cinemática relativista	14
2.2. Mecánica relativista	16
2.3. Acerca de la literatura	18
3. Hacia la Relatividad General	19
3.1. El Principio de Equivalencia	20
3.1.1. Sistemas no inerciales y el balde de Newton	22
3.2. El Espacio-tiempo curvo	24
3.2.1. Variedades diferenciales	26
3.2.2. El tensor métrico.	27
3.3. Geometría, efectos no inerciales y gravitación en el límite newtoniano	29
4. La descripción intrínseca de un espacio-tiempo curvo	31
4.1. Sistemas localmente inerciales	31
4.2. Derivación Covariante	34
4.3. Geodésicas	36
4.3.1. La ecuación de desviación geodésica	37
4.4. El Teorema de Gauss	38
4.4.1. Leyes de conservación relativistas	40
5. Fluidos ideales	42
5.1. Fluidos ideales relativistas	44
5.2. Acerca de la simetría de $T^{\mu\nu}$	45
5.3. El Teorema de Noether	46
5.4. Simetrizando al EMT	49
5.5. Derivada de Lie	49
5.6. El EMT simétrico	50
5.7. Campos de Killing	52
6. Las ecuaciones de Einstein	53
6.1. La acción de Einstein-Hilbert	54
6.2. El tensor de Weyl	55
6.3. La masa de Planck	56
6.4. Las pequeñas oscilaciones del espacio de Minkowski	57
6.5. El campo lejano en el caso estacionario	58

7. Ondas gravitatorias	60
7.1. Detección de ondas gravitatorias	61
7.2. Acerca de la ecuación de D’Alambert	62
7.3. Ondas gravitatorias II	64
7.4. La energía de una onda gravitatoria	66
7.5. Detección de ondas gravitatorias	69
7.5.1. Una onda propagándose en una dirección arbitraria	69
7.6. Detectando ondas con un resorte	69
7.7. Some like it hot	70
7.8. Antenas	71
7.9. Pulsar timing arrays	72
7.10. Sensibilidad de detectores interferométricos de ondas gravitatorias	73
8. La solución de Schwarzschild	76
8.1. ¿Qué es especial acerca del horizonte?	78
8.2. La estructura causal del espacio de Schwarzschild	80
8.2.1. Referencial síncrono	83
8.3. Orbitas en el espacio de Schwarzschild	86
8.3.1. El desplazamiento del perihelio	88
8.3.2. Fotones	89
9. Estructura estelar	92
9.0.1. Einstein	93
9.1. Estrellas de Schwarzschild	94
9.2. Cálculo del tensor de Einstein	95
9.3. Politrópicas no relativistas	98
9.4. Estabilidad	99
9.5. Landau 1932	100
9.6. El límite de Chandrasekhar	100
9.6.1. Acerca de la literatura	104
10. Lentes Gravitacionales	105
10.1. Lente puntual	107
10.2. Lentes gravitacionales y radiación cósmica de fondo	109
10.3. Apéndice: La ecuación de Limber	110
10.4. Acerca de la literatura	111
11. Kerr o no Kerr	112
11.1. La ergosfera	115
11.2. ¿Termodinámica de agujeros negros?	117
11.2.1. Sobre la literatura	118
11.3. Geodésicas nulas en el plano ecuatorial	119
12. Termodinámica de agujeros negros	123
12.1. Gravedad superficial en Schwarzschild	124
12.2. De la gravedad superficial a la temperatura	126
12.3. Sobre la literatura	126
12.4. Relatividad y termodinámica	127
12.5. El <i>Dogma Central</i>	128
12.6. La curva de Page	128
12.7. Acerca de la literatura	130

Capítulo 1

Relatividad Especial

1.0.1. La Relatividad de Galileo

La física Newtoniana está basada en la hipótesis de la existencia de una clase privilegiada de observadores, los *observadores inerciales*, para los cuales las leyes de la mecánica toman su forma más simple: un punto material de masa m se mueve de acuerdo a la ley

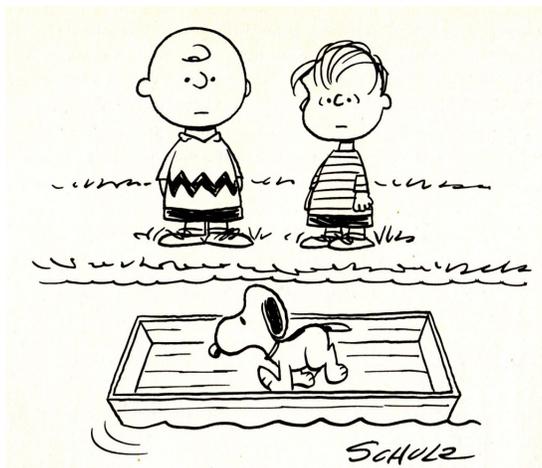
$$m\mathbf{a} = \mathbf{f} \quad (1.1)$$

donde \mathbf{a} es la aceleración. La *fuerza* \mathbf{f} actuando sobre el punto es conocida a partir de las posiciones y velocidades de todas las otras partículas en el Universo, y de un catálogo de las fuerzas posibles (elásticas, gravitacionales, eléctricas, magnéticas, etc). Es posible agregar entradas al catálogo, por ejemplo en el siglo pasado se agregaron las fuerzas *fuerte* y *débil*, pero es una ocurrencia extraordinaria. Los observadores no inerciales deben estropear la belleza de la ecuación 1.1 agregando horribles *fuerzas no inerciales*.



Figura 1.1: Izq.: las leyes de la física vistas por observadores inerciales; Der.: las mismas leyes vistas por observadores no inerciales.

La física Newtoniana no ofrece un criterio para identificar si un observador es inercial o no, excepto verificar *a posteriori* si la ecuación 1.1 se cumple o no. Pero si encontramos un observador inercial, entonces sí podemos identificar a todos los demás: son los que se mueven con movimiento rectilíneo y uniforme respecto al observador ya identificado.



Las observaciones de dos observadores inerciales son rigurosamente equivalentes, basta traducir las determinaciones de tiempos y posiciones de uno y otro de acuerdo con la *Transformación de Galileo*: Si el observador S' , que se mueve con velocidad $\mathbf{v} = v\hat{x}$ respecto del observador S , observa que en el instante t' una partícula se encuentra en la posición (x', y', z') , entonces S observa que en el instante

$$t = t' \quad (1.2)$$

la partícula se encuentra en la posición

$$\begin{aligned} y &= y' \\ z &= z' \\ x &= x' + vt' \end{aligned} \quad (1.3)$$

Por lo tanto, si la partícula se mueve según la trayectoria $x' = v'_x t'$, $y' = v'_y t'$, entonces S observa la trayectoria $y = v_y t$, $x = v_x t$, con

$$\begin{aligned} v_y &= v'_y \\ v_x &= v + v'_x \end{aligned} \quad (1.4)$$

Este es el *Principio de Relatividad de Galileo*. Se ve que si la ley 1.1 se cumple para uno de los observadores, también lo hace para el otro, asumiendo que tanto las masas como las fuerzas son invariantes.

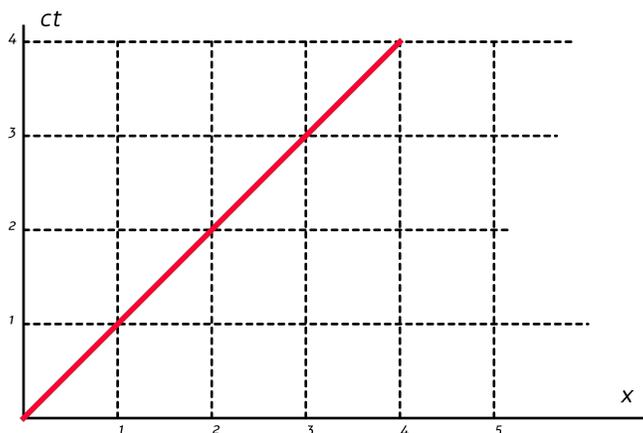


Figura 1.2: Diagrama de espacio tiempo mostrando la trayectoria de un rayo de luz.

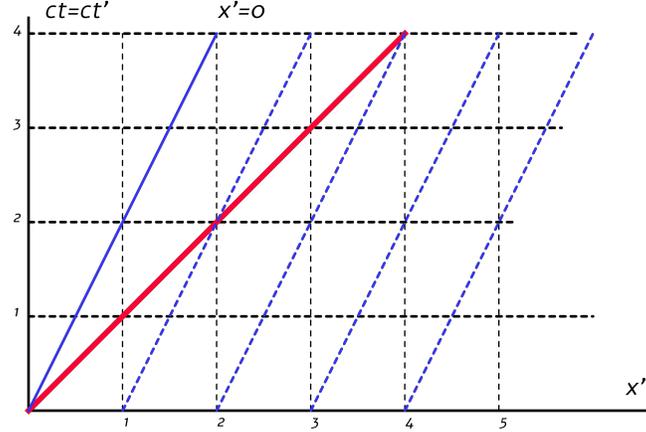


Figura 1.3: De acuerdo con la transformación de Galileo, un observador moviéndose con velocidad $v = c/2$ observa que el rayo se mueve con velocidad $c/2$.

El desarrollo de las ecuaciones de Maxwell puso en tensión a este Principio porque en las ecuaciones aparecía la velocidad de la luz (¿respecto del éter?) como parámetro. Por lo tanto, o el Principio estaba dando la ley equivocada para sumar velocidades, o distintos observadores inerciales no veían realmente las mismas ecuaciones de Maxwell. De hecho, ya desde el Siglo XVIII se venía acumulando evidencia de que no todo estaba bien con la Relatividad de Galileo, vamos a volver sobre esto más adelante. Por eso tenía sentido plantear el problema a la inversa, y preguntarse cuál es la regla de transformación que garantiza que todos los observadores inerciales vean las mismas ecuaciones de Maxwell.

1.0.2. La Transformación de Lorentz

Por suerte, cuando las ecuaciones de Maxwell se escriben en términos de potenciales y en un *gauge* adecuado, se reducen a la ecuación de las ondas. Planteando una onda que depende sólo de la coordenada x y del tiempo, tenemos que para el observador S'

$$\frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \phi}{\partial t'^2} - \frac{\partial^2 \phi}{\partial x'^2} = 0 \quad (1.5)$$

Entonces el observador S debe ver

$$\frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \phi}{\partial t^2} - \frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2} = 0 \quad (1.6)$$

La gracia es, por supuesto, que la velocidad c de propagación de la onda es la misma en 1.5 y en 1.6. Proponemos una transformación lineal

$$\begin{aligned} t &= At' + Bx' \\ x &= Ct' + Dx' \end{aligned} \quad (1.7)$$

Entonces

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial t'} &= A \frac{\partial}{\partial t} + C \frac{\partial}{\partial x} \\ \frac{\partial}{\partial x'} &= B \frac{\partial}{\partial t} + D \frac{\partial}{\partial x} \end{aligned} \quad (1.8)$$

Si vale 1.5, entonces

$$\frac{1}{c^2} [A^2 - c^2 B^2] \frac{\partial^2 \phi}{\partial t^2} - \left[D^2 - \frac{C^2}{c^2} \right] \frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2} + 2 \left[\frac{AC}{c^2} - BD \right] \frac{\partial^2 \phi}{\partial t \partial x} = 0 \quad (1.9)$$

Para que esto se reduzca a 1.6, debe ser

$$\begin{aligned} A^2 - c^2 B^2 &= 1 \\ D^2 - \frac{C^2}{c^2} &= 1 \\ \frac{AC}{c^2} - BD &= 0 \end{aligned} \quad (1.10)$$

Por otro lado, la trayectoria $x' = 0$ debe convertirse en $x = vt$, por lo cual

$$\frac{C}{A} = v \quad (1.11)$$

Entonces debe ser

$$\begin{aligned} A &= D = \beta \\ c^2 B &= C = v\beta \end{aligned} \quad (1.12)$$

donde

$$\beta = \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} \quad (1.13)$$

o bien la transformación 1.12 compuesta con la inversión temporal $t \rightarrow -t$ o la inversión espacial $x \rightarrow -x$. Nosotros adoptaremos el *Principio de Relatividad de Einstein*, según el cual las observaciones de dos observadores inerciales (nótese que éstos preservan sus privilegios) son completamente equivalentes si ambos traducen sus determinaciones de tiempos y de posiciones de acuerdo con la *Transformación de Lorentz*

$$\begin{aligned} ct &= \beta \left[ct' + \frac{v}{c} x' \right] \\ x &= \beta \left[\frac{v}{c} ct' + x' \right] \end{aligned} \quad (1.14)$$

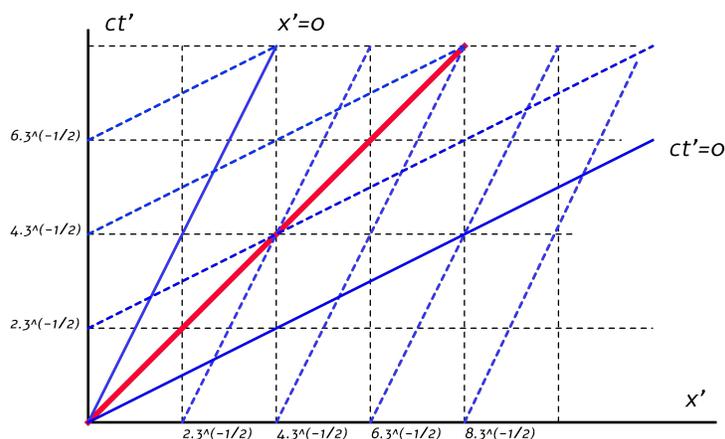


Figura 1.4: Cuando usamos la transformación de Lorentz, la velocidad de la luz permanece la misma para ambos observadores.

1.1. Relatividad en 1 + 1 dimensiones

En esta sección vamos a explorar algunas consecuencias de la Transformación de Lorentz en un universo con una única dimensión espacial.

1.1.1. Distancias y tiempos

Supongamos una regla en reposo en el referencial S' . Eso quiere decir que un extremo de la regla sigue la trayectoria $x'_0 = 0$, mientras que el otro sigue la trayectoria $x'_1 = h'$. El observador S percibe en cambio que $x_0 = vt$, y

$$x_1 = \frac{h'}{\beta} + vt \tag{1.15}$$

Por lo tanto, la longitud de la regla, para S , es $h = h'/\beta \leq h'$. Esta es la *Contracción de Lorentz-Fitzgerald*.

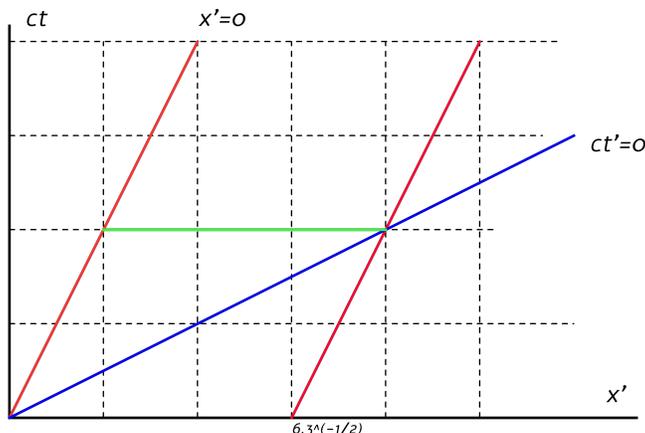


Figura 1.5: Las líneas rojas son las líneas de mundo de los extremos de una regla en reposo en el sistema S' . S' se mueve con velocidad $v = c/2$ y la regla tiene longitud $2\sqrt{3}$. Para el observador S la regla tiene longitud $(\sqrt{3}/2) \times 2\sqrt{3} = 3$.

Si S' lleva consigo un campanario que suena con un intervalo T' , entonces para S las campanas suenan con un intervalo $T = \beta T' \geq T'$. S concluye que el reloj de la torre atrasa.

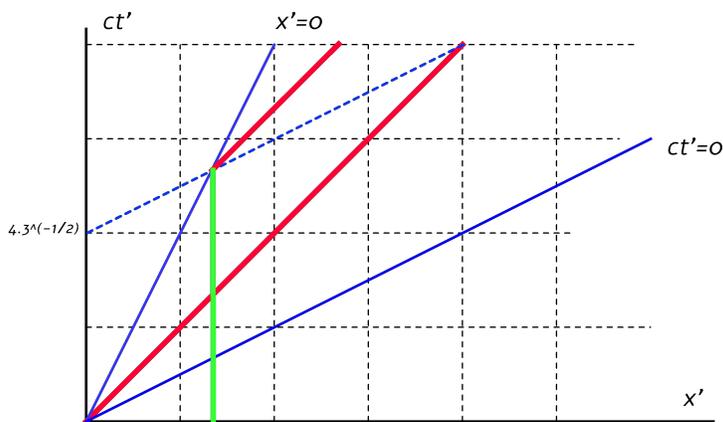


Figura 1.6: El reloj de S' suena en $ct' = 0$ y en $ct' = 4/\sqrt{3}$. Para S , las campanadas ocurrieron en $ct = 0$ y en $ct = (2/\sqrt{3}) \times (4/\sqrt{3}) = 8/3$.

Por otro lado, si las campanas suenan cuando $x' = t' = 0$, cuando vuelven a sonar en $x' = 0$, $t' = T'$ las campanas están en $t = \beta T'$ y $x = \beta v T'$. S recién va a escuchar la campanada cuando le llegue el sonido, un tiempo $t + x/c_s = \beta(1 + v/c_s) T'$. Si en vez de campanadas discretas S' lleva una sirena que emite con frecuencia ω' , entonces S percibe una frecuencia

$$\omega = \frac{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}{1 + \frac{v}{c_s}} \omega' \tag{1.16}$$

Esto es el efecto Doppler. Si $v > 0$, $\omega \leq \omega'$, y decimos que la señal está *corrida al rojo*.

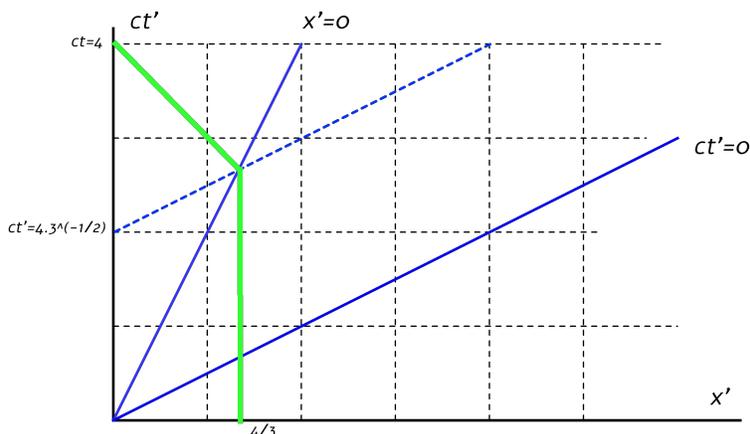


Figura 1.7: La señal emitida en $ct = 8/3$ demora un tiempo $ct = 4/3$ en alcanzar el origen $x = 0$, por lo tanto se la recibe en $ct = 4$. La frecuencia vista por S' es $\omega' = \sqrt{3}/4$, la frecuencia vista por S es $\omega = ((\sqrt{3}/2) / (3/2)) \times (\sqrt{3}/4) = 1/4$.

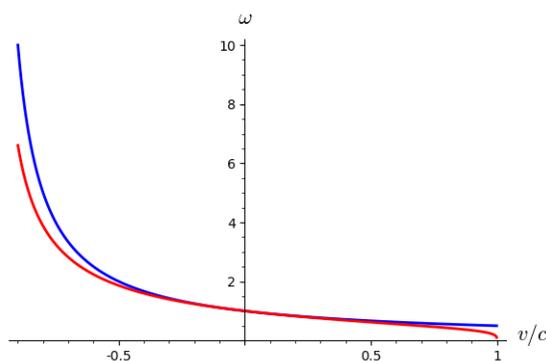


Figura 1.8: La frecuencia ω en función de v/c para $\omega' = 1$ (azul) según Galileo, (rojo) según Lorentz.

Supongamos que S' no es realmente un observador inercial, y lleva su reloj a lo largo de una curva cerrada Γ . La trayectoria puede pensarse como una sucesión de lapsos infinitesimales de movimiento rectilíneo y uniforme. Cada vez que el reloj de S' adelanta un tiempo dt' , S percibe transcurrir un tiempo $dt = \beta(t') dt'$. Como en todo caso $\beta(t') \geq 1$ siempre, el tiempo total transcurrido para S es mayor que el transcurrido para S' . Esta es la *paradoja de los gemelos*. El experimento por supuesto no permite intercambiar los roles de S y S' , porque S es un observador inercial y S' no.

1.2. Relatividad en 3 + 1 dimensiones

Ahora podemos plantearnos, si las coordenadas (x, t) se transforman de acuerdo a una transformación de Lorentz, ¿qué ocurre con las coordenadas transversales (y, z) ?

Como la transformación de Lorentz por construcción preserva la velocidad de la luz, si para un observador el intervalo

$$s^2 = -c^2 t^2 + x^2 + y^2 + z^2 = 0 \quad (1.17)$$

(es decir, el punto (x, y, z) se encuentra en la trayectoria de un rayo de luz que pasa por el origen), lo mismo ocurre para cualquier otro observador inercial

$$s^2 = 0 \Rightarrow s'^2 = -c^2 t'^2 + x'^2 + y'^2 + z'^2 = 0 \quad (1.18)$$

Es posible ver que en realidad $s^2 = s'^2$ aunque no sean cero. Tomemos (t, x, y, z) tan pequeños que términos de orden superior al cuadrático sean despreciables. Puesto que s^2 y s'^2 deben anularse juntos, debe ser $s'^2 = f s^2$. Como el espacio es homogéneo, f sólo puede depender de la velocidad relativa entre los dos observadores, y como es isótropo, sólo puede depender del módulo de la velocidad relativa.

Supongamos que tres observadores 1, 2 y 3, tales que la velocidad relativa de 2 respecto de 1 es V_{21} , la velocidad relativa de 3 respecto de 2 es V_{32} y la velocidad relativa de 3 respecto de 1 es V_{31} , observan los intervalos s_1^2 , s_2^2 y s_3^2 para un mismo evento. Entonces

$$\begin{aligned} s_2^2 &= f(V_{21}) s_1^2 \\ s_3^2 &= f(V_{32}) s_2^2 = f(V_{32}) f(V_{21}) s_1^2 = f(V_{31}) s_1^2 \end{aligned} \quad (1.19)$$

de manera que debe ser

$$f(V_{31}) = f(V_{32}) f(V_{21}) \quad (1.20)$$

Nos damos cuenta que hay algo raro en esta ecuación, porque el lado derecho depende sólo de los módulos de las velocidades, mientras que el izquierdo depende también de la orientación relativa. Por ejemplo, si tomamos $V_{32} = -V_{21}$, entonces $V_{31} = 0$, y resulta $f^2(V_{21}) = f(0) = 1$, de donde $f = 1$ para cualquier velocidad.

Ahora, hemos demostrado que las transformaciones de Lorentz preservan el intervalo $-c^2 t^2 + x^2 + y^2 + z^2$, pero la transformación 1.14 ya preserva $-c^2 t^2 + x^2$, por lo cual $y^2 + z^2$ debe conservarse independientemente. Es decir, la transformación de las coordenadas transversales es una rotación.

Decimos que una transformación de Lorentz es *propia* cuando las coordenadas transversales no se transforman: $y' = y$ y $z' = z$. Toda transformación de Lorentz es una transformación propia compuesta con una rotación ordinaria (no necesariamente confinada al plano transversal), la inversión temporal y la inversión espacial.

El intervalo nos permite clasificar los eventos en *temporales futuros* ($s^2 < 0$ con $t > 0$), *temporales pasados* ($s^2 > 0$ con $t < 0$), *espaciales* ($s^2 > 0$) o *nulos* ($s^2 = 0$). Esta clasificación es absoluta, todos los observadores inerciales clasifican un evento dado de la misma forma.

Sólo un evento temporal futuro puede depender causalmente del evento en el origen, porque si un evento es espacial, aunque $t > 0$ para un observador (es decir, ese evento está en el futuro del evento en el origen), existen otros observadores para los cuales $t' < 0$.

1.2.1. Transformación de la velocidad

Supongamos que un móvil sigue, en el sistema S' , la trayectoria $x' = V'_x t'$, $y' = V'_y t'$. En el sistema S tenemos

$$\begin{aligned} ct &= \beta \left(1 + \frac{v V'_x}{c^2} \right) ct' \\ x &= \frac{1}{c} (V'_x + v) \beta ct' \\ y &= \frac{V'_y}{c} ct' \end{aligned} \quad (1.21)$$

Por lo tanto S determina que la velocidad es

$$\begin{aligned} V_x &= \frac{V'_x + v}{1 + \frac{v V'_x}{c^2}} \\ V_y &= \frac{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}{1 + \frac{v V'_x}{c^2}} V'_y \end{aligned} \quad (1.22)$$

Nótese que aunque $y = y'$, $V_y \neq V'_y$.

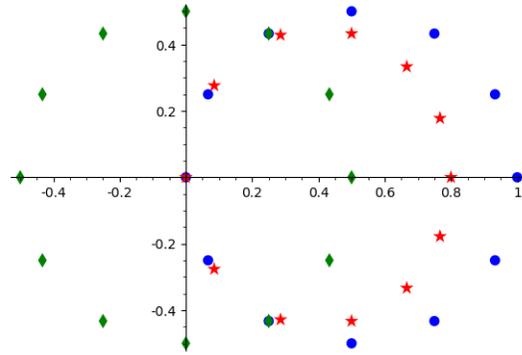


Figura 1.9: Los diamantes verdes representan las velocidades de 12 móviles moviéndose en distintas direcciones con velocidad $c/2$ respecto a un sistema con velocidad $c/2$ en la dirección x . Los puntos azules representan cuáles serían las velocidades respecto al sistema en reposo según la transformación de Galileo. Las estrellas dan el resultado que se deduce de la transformación de Lorentz.

1.2.2. La aberración de la luz

Si se trata de la trayectoria de un rayo de luz, entonces $V'_x = c \cos \theta'$, $V'_y = c \sin \theta'$. Encontramos que la velocidad es invariante

$$V_x^2 + V_y^2 = c^2 \quad (1.23)$$

Pero la dirección de propagación no

$$\theta = \tan^{-1} \frac{V_y}{V_x} = \tan^{-1} \left[\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}} \frac{\sin \theta'}{\cos \theta' + \frac{v}{c}} \right] \neq \theta' \quad (1.24)$$

este fenómeno es la *aberración de la luz*.

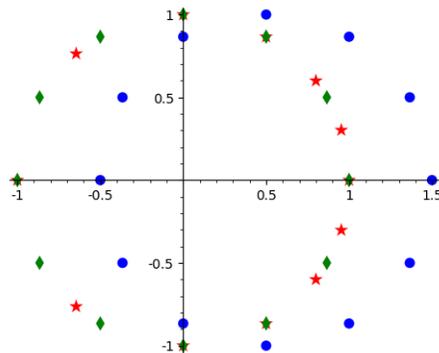


Figura 1.10: Lo mismo que fig. 1.9, pero ahora los móviles se mueven con velocidad c en el sistema S' . Nótese que en S la velocidad sigue siendo c , pero la dirección de propagación es distinta. Ese fenómeno es la *aberración de la luz*.

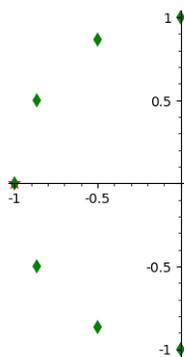


Figura 1.11: Lo mismo que fig. 1.10, pero ahora la velocidad del sistema S' es $v = 0,99c$. Nótese que aunque los diamantes son isótropos en S' , las estrellas están fuertemente concentradas en la dirección de v en S . Si S' estuviera emitiendo radiación, en S la radiación estaría concentrada en la dirección de movimiento. Este efecto es el *relativistic beaming*, y es claramente visible en la radiación de sincrotrón.

Debido a ésto, la posición aparente de una estrella en el cielo depende de la velocidad de la Tierra, y cambia de una manera perceptible a lo largo del año (este efecto es independiente del *paralaje*, que también es un cambio de la posición de una estrella en un ciclo anual). Este efecto fue observado a principios del siglo XVIII.

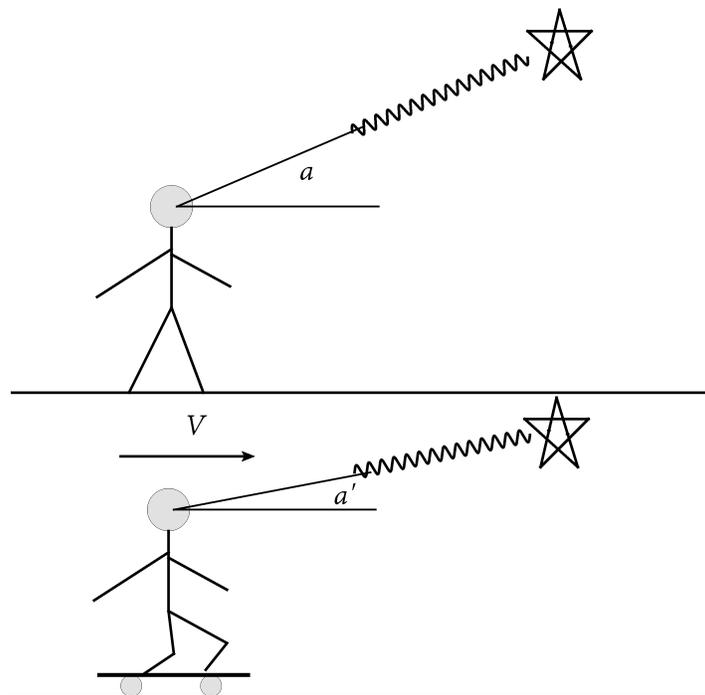


Figura 1.12: El ángulo aparente con que se ve una estrella lejana depende de la velocidad del observador.

Una aplicación importante de la fórmula de composición de velocidades es para calcular la velocidad de propagación de un rayo de luz en un material dieléctrico que a su vez fluye con velocidad v . La velocidad de la luz respecto del material es $c_n = c/n$, donde $n \geq 1$ es el índice de refracción. Por lo tanto la composición de ambas velocidades da

$$c_{n,v} = \frac{\frac{c}{n} + v}{1 + \frac{v}{nc}} = \frac{c}{n} + \left(1 - \frac{1}{n^2}\right) \frac{v}{1 + \frac{v}{nc}} \approx \frac{c}{n} + \left(1 - \frac{1}{n^2}\right) v \left(1 - \frac{v}{nc} + \dots\right) \quad (1.25)$$

Si despreciamos términos del orden de v^2/c^2 recuperamos una fórmula que fue deducida por Fresnel en 1818. Fresnel trabajaba dentro del paradigma de la teoría del éter, pero igual se las arregló para encontrar un resultado esencialmente correcto 87 años antes que Einstein. Recuerda a su contemporáneo Carnot que descubrió la 2a Ley

trabajando dentro de la teoría del calórico. Esto muestra que el proceso de cambio de la mecánica Newtoniana a la relativista fue mucho más matizado que lo que a veces se presenta en los libros de texto y/o de divulgación.

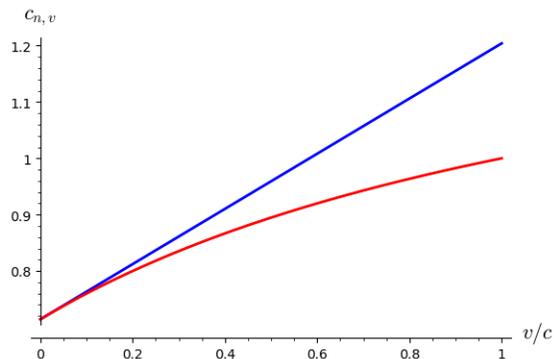


Figura 1.13: La velocidad de la luz en un medio en movimiento predicha por Fresnel (azul) y la fórmula relativista (rojo) en función de v/c para $n = 1,4$

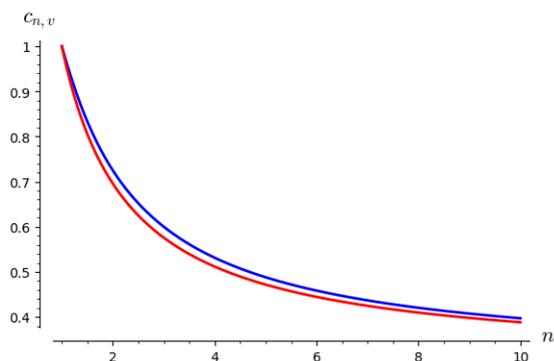


Figura 1.14: La velocidad de la luz en un medio en movimiento predicha por Fresnel (azul) y la fórmula relativista (rojo) en función de n para $v/c = 0,3$

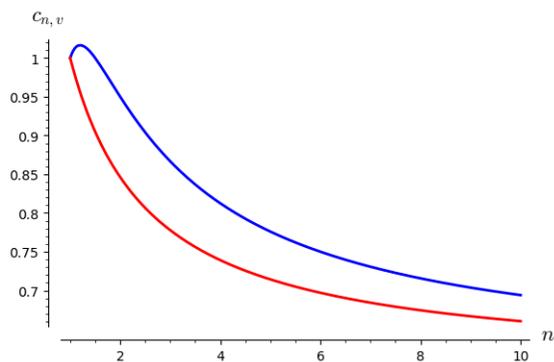


Figura 1.15: La velocidad de la luz en un medio en movimiento predicha por Fresnel (azul) y la fórmula relativista (rojo) en función de n para $v/c = 0,6$

1.3. Acerca de la literatura

Este curso va a estar generalmente basado en [1]. En temas de Relatividad, [2] es ineludible. Aunque un poco viejo, mirar qué dice [3] nunca está de más.

La referencia clásica sobre teorías del eter es [4], que reproduce los principales trabajos originales. Ver también [5].

[6] es una excelente discusión del complejo camino que llevó de la Física de Newton a la de Einstein.

Capítulo 2

El espacio-tiempo de Minkowski



Figura 2.1: Hermann Minkowski (1864-1909).

Una consecuencia inmediata de la transformación de Lorentz es que, mientras que distintos observadores inerciales adjudican distintas posiciones y tiempos a un mismo evento, el valor del *intervalo*

$$s^2 = -c^2t^2 + x^2 + y^2 + z^2 \quad (2.1)$$

es el mismo para todos. La gran innovación de Minkowski fue pensar a las coordenadas espaciales y a ct (la c se agrega para que todas las coordenadas tengan las mismas dimensiones) como las coordenadas $x^{\mu 1}$ de un nuevo espacio (el *espacio-tiempo*) donde s^2 define una (pseudo) distancia². Visto desde este punto de vista la ecuación [?] no es otra cosa que la manera de escribir el Teorema de Pitágoras en este espacio.

El intervalo se puede escribir como una forma cuadrática

$$s^2 = \eta_{\mu\nu} x^\mu x^\nu \quad (2.2)$$

donde $x^0 = ct$, $x^i = (x, y, z)$ para $1 \leq i \leq 3$. Estamos usando la convención de Einstein y la posición de los índices importa. La matriz

$$\eta = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad (2.3)$$

¹En este curso, índices griegos μ, ν, ρ, \dots van de 0 a 3 y $x^0 = ct$; índices latinos i, j, k, \dots van de 1 a 3 y denotan las coordenadas espaciales $x^i = (x, y, z)$.

²El *pseudo* es porque para un matemático es anatema que una distancia pueda ser negativa u (¡horror!) imaginaria. Nosotros no somos matemáticos...

define la (pseudo) *métrica de Minkowski*. La invariancia del intervalo implica la invariancia de la métrica, ya que si ante una transformación de Lorentz tenemos que

$$x^\mu \rightarrow x'^{\mu'} = \frac{\partial x'^{\mu'}}{\partial x^\nu} x^\nu \quad (2.4)$$

entonces

$$s'^2 = \eta_{\mu'\nu'} x'^{\mu'} x'^{\nu'} = \eta_{\mu'\nu'} \frac{\partial x'^{\mu'}}{\partial x^\rho} \frac{\partial x'^{\nu'}}{\partial x^\sigma} x^\rho x^\sigma \quad (2.5)$$

pero también

$$s'^2 = s^2 = \eta_{\rho\sigma} x^\rho x^\sigma \quad (2.6)$$

y como esto vale para cualquier conjunto de coordenadas, debe ser

$$\eta_{\rho\sigma} = \eta_{\mu'\nu'} \frac{\partial x'^{\mu'}}{\partial x^\rho} \frac{\partial x'^{\nu'}}{\partial x^\sigma} \quad (2.7)$$

La invariancia del intervalo conduce a la cuestión de si hay otras magnitudes que tengan leyes de transformación definidas frente a transformaciones de Lorentz. Por ejemplo, si un termómetro mide la temperatura en un punto dado en un momento dado, todos los observadores inerciales van a estar de acuerdo en cuál es la lectura del termómetro, pero no van a estar de acuerdo en dónde estaba el termómetro ni cuándo se realizó la medición. Es decir, si para un observador S la lectura del termómetro en el punto x^i en el instante ct está dada por la función $T(x^\mu)$, otro observador S' dirá en cambio que las lecturas del termómetro están dadas por la función

$$T'(x'^{\mu'}) = T(x^\mu) \quad (2.8)$$

donde x^μ son las coordenadas en que se convierte $x'^{\mu'}$ bajo la transformación de Lorentz que vincula a S' con S . Es importante no perder de vista que la función $T'(x'^{\mu'})$ podría ser completamente distinta de la función $T(x^\mu)$ que resultaría de simplemente reemplazar unas coordenadas por otras en la función T .

Cuando una magnitud se transforma como en la ecuación 2.8 decimos que es una *magnitud escalar*. El intervalo es un caso muy particular de escalar porque no sólo es invariante (todos los observadores concuerdan en cuál es el intervalo entre dos eventos dados) sino que también es invariante *de forma*, es decir, todos los observadores escriben a la métrica de Minkowski como la misma matriz 2.3

El concepto que sigue en nivel de complejidad es el de *vector*. Definimos un vector contravariante como un conjunto de cuatro números V^μ que se transforman frente a una transformación de Lorentz como se transforman los X^μ . Como la transformación de Lorentz es lineal, vale que

$$x^\mu = \frac{\partial x^\mu}{\partial x'^{\mu'}} x'^{\mu'} \quad (2.9)$$

Entonces, un vector V^μ se transforma como

$$V^\mu = \frac{\partial x^\mu}{\partial x'^{\mu'}} V'^{\mu'} \quad (2.10)$$

Las componentes del gradiente de un escalar ϕ son un vector contravariante, ya que

$$\frac{\partial \phi}{\partial x^\mu} = \frac{\partial x'^{\mu'}}{\partial x^\mu} \frac{\partial \phi}{\partial x'^{\mu'}} \quad (2.11)$$

Definimos un vector *covariante* como un conjunto de cuatro números V_μ que se transforman como el gradiente de un escalar.

La *contracción* de un vector covariante V_μ y uno contravariante W^μ ,

$$\phi = V_\mu W^\mu = V_0 W^0 + V_i W^i \quad (2.12)$$

define un escalar. Nótese el uso de la *convención de Einstein*: índices repetidos, uno arriba y otro abajo, están sumados sobre su rango, de 0 a 3 si son griegos o de 1 a 3 si son latinos. Además, en atención a lo que viene, hacemos notar que

Los signos en la ecuación 2.12 son correctos.

Más generalmente, se define un *tensor* m veces contravariante y n veces covariante como un objeto que se transforma como el producto de m vectores contravariantes y n vectores covariantes. La ecuación 2.7 implica que la métrica de Minkowski $\eta_{\mu\nu}$ es un tensor simétrico dos veces covariante. La contracción de la métrica de Minkowski con un vector contravariante da un vector covariante

$$V_\mu = \eta_{\mu\nu} V^\nu \quad (2.13)$$

Por lo tanto $V_0 = -V^0$, $V_i = V^i$. Decimos que la métrica “baja” el índice del vector. Viceversa, todo vector contravariante se puede pensar como proveniente de uno covariante

$$V^\mu = [\eta^{-1}]^{\mu\nu} V_\nu \quad (2.14)$$

O sea $V^0 = -V_0$, $V^i = V_i$. Como finalmente

$$\eta^{-1} = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \eta \quad (2.15)$$

se omite el “-1”, y se considera a $\eta^{\mu\nu}$ como la forma dos veces contravariante del tensor métrico. Si “subimos” un único índice obtenemos la forma mixta, que es el tensor de Kronecker

$$\eta^\mu_\nu = \eta^{\mu\rho} \eta_{\rho\nu} = \delta^\mu_\nu = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad (2.16)$$

Nótese que la posición de los índices importa, ya que la componente temporal de un vector cambia de signo cuando el índice sube o baja. Entonces la contracción de dos vectores resulta en

$$V_\mu U^\mu = V_0 U^0 + V_i U^i = -V^0 U^0 + V^i U^i \quad (2.17)$$

La propiedad más importante de las leyes de transformación que hemos introducido es la *homogeneidad*: si un escalar, un vector o un tensor se anulan en un referencial, entonces se anulan en todos. Por el mismo motivo, si dos vectores son iguales en un referencial, entonces son iguales en todos, ya que la diferencia entre ellos también es un vector y se anula en el referencial original. Las leyes de la física, si están bien conformadas, no sólo deben ser dimensionalmente correctas, sino también deben asociar cantidades del mismo tipo tensorial. Este principio del buen arte se conoce como *Principio de Curie*. A las leyes fundamentales se les pide algo todavía más exigente, a saber, que no sólo sean invariantes, sino también invariantes *de forma*. Por ejemplo, las ecuaciones de Maxwell

$$\left[\frac{1}{c^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} - \Delta \right] A^\mu = \frac{4\pi}{c} J^\mu \quad (2.18)$$

no sólo son invariantes porque implican la identidad entre dos magnitudes vectoriales, son invariantes de forma porque todos los observadores las escriben con el mismo valor de c .

2.1. Cinemática relativista

Como en la física clásica, la cinemática relativista se ocupa de la *descripción* del movimiento, dejando de lado sus causas. En la cinemática clásica, el concepto fundamental es el de *velocidad*, que es la tasa de cambio de la posición respecto del tiempo. Al pasar a la relatividad, es necesario preguntarse ¿el tiempo medido por quién? En general, se privilegia el tiempo medido por un reloj que estuviera acompañando el movimiento del cuerpo en cuestión. Pero debemos tener cuidado, ya que un sistema de coordenadas adherido al cuerpo podría no ser un sistema inercial. Para salvar esta dificultad se introduce el concepto de *sistema en reposo instantáneo*, que es el sistema inercial en el que ocurre que el cuerpo, en ese momento preciso, está en reposo. No lo estará ni un instante antes ni un instante después, pero justo en ese momento, sistema y cuerpo se mueven con la misma velocidad (ver fig. 2.2).

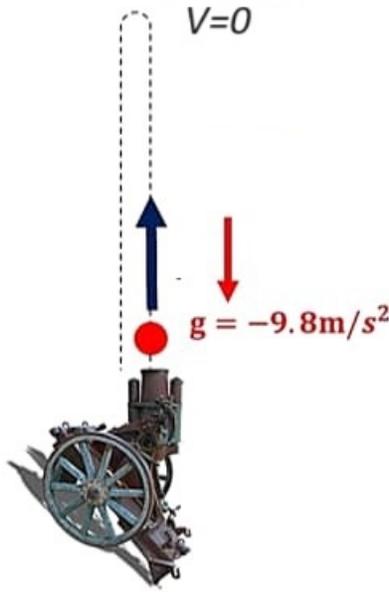


Figura 2.2: Una bala en tiro vertical está en reposo instantáneo en el punto más alto de su trayectoria.

Definimos la velocidad (o *tetra-velocidad*) como

$$u^\mu = \frac{dx^\mu}{cd\tau} \quad (2.19)$$

donde τ es el tiempo medido en el sistema en reposo instantáneo. Nótese que con esta definición la velocidad es definida adimensional. La invariancia del intervalo nos ahorra el problema de construir explícitamente la transformación de Lorentz al sistema en reposo instantáneo, ya que en este sistema, por definición, el cuerpo no se desplaza. Entonces

$$ds^2 = -c^2 dt^2 + d\vec{x}^2 = -c^2 d\tau^2 \quad (2.20)$$

o en otros términos

$$cd\tau = \sqrt{-ds^2} \quad (2.21)$$

Por supuesto la trayectoria de un cuerpo real está contenida en el cono de la luz, de manera que $-ds^2 \geq 0$. Con esta definición

$$u^2 = u_\mu u^\mu = \frac{1}{(-ds^2)} \eta_{\mu\nu} dx^\mu dx^\nu = -1 \quad (2.22)$$

de modo que la velocidad siempre es constante en módulo, pero puede cambiar su dirección. Por supuesto, en el referencial en reposo instantáneo la velocidad siempre es $u^0 = 1$, $u^i = 0$.

La velocidad ordinaria de la partícula es

$$v^i = \frac{dx^i}{dt} \quad (2.23)$$

usando que

$$cd\tau = cdt \sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}} \quad (2.24)$$

es fácil ver que

$$u^0 = \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}; \quad u^i = \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} \frac{v^i}{c} \quad (2.25)$$

El concepto que sucede al de velocidad es la aceleración, es decir, la tasa de cambio de la velocidad. Como antes, referimos esta tasa al tiempo medido en el referencial en reposo instantáneo, de manera que

$$a^\mu = \frac{du^\mu}{cd\tau} \quad (2.26)$$

Derivando la relación 2.22 obtenemos

$$u_\mu a^\mu = \frac{1}{2} \frac{d}{cd\tau} u_\mu u^\mu = 0 \quad (2.27)$$

De manera que la aceleración siempre es “perpendicular” a la velocidad, lo cual recuerda al movimiento circular uniforme de la cinemática clásica. Hay que tener cuidado porque el concepto de perpendicular en un espacio de Minkowski puede ser poco intuitivo, por ejemplo, un vector nulo es siempre perpendicular a sí mismo.

La relación 2.27 implica que la aceleración es siempre un vector espacial (porque la velocidad es siempre temporal, salvo que el cuerpo se esté moviendo con la velocidad de la luz) y que no puede haber un movimiento uniformemente acelerado, salvo el caso trivial en que $a^\mu = 0$. Efectivamente, derivando 2.27 encontramos

$$0 = \frac{d}{cd\tau} u_\mu a^\mu = u_\mu \frac{d}{cd\tau} a^\mu + a^2 \quad (2.28)$$

Por lo tanto si $da^\mu/cd\tau = 0$ debe ser $a^2 = 0$, que implica $a^\mu = 0$ porque a es espacial.

Se define la *aceleración propia* como el valor instantáneo de la aceleración en el sistema en reposo. La aceleración propia sí puede ser constante; esto no contradice lo que acabamos de decir porque al comparar las aceleraciones propias en tiempos distintos estamos comparando aceleraciones medidas en sistemas distintos.

2.2. Mecánica relativista

En mecánica, las ecuaciones de movimiento de un punto material se deducen de la acción

$$S = \int dt L(q, \dot{q}, t) \quad (2.29)$$

donde q y \dot{q} son las posiciones y velocidades de la partícula a lo largo de una trayectoria parametrizada por el tiempo t . La trayectoria que efectivamente sigue la partícula es la que es un extremo de la acción, y satisface las ecuaciones de Euler-Lagrange

$$\frac{dp}{dt} = \frac{\partial L}{\partial q} \quad (2.30)$$

Donde p es el *impulso*

$$p = \frac{\partial L}{\partial \dot{q}} \quad (2.31)$$

En mecánica relativista asociamos a un punto material la acción

$$S = -mc \int d\lambda \sqrt{-\eta_{\mu\nu} \frac{dx^\mu}{d\lambda} \frac{dx^\nu}{d\lambda}} \quad (2.32)$$

donde λ es un parámetro (con unidades de longitud) a lo largo de la trayectoria. El factor mc se agrega para que la acción tenga unidades de energía por tiempo, como en mecánica ordinaria. La elección del parámetro es arbitraria: si reparametrizamos la trayectoria haciendo que $\lambda = \lambda(\lambda')$, entonces

$$d\lambda' = \frac{d\lambda'}{d\lambda} d\lambda \quad (2.33)$$

pero también

$$\frac{dx^\mu}{d\lambda'} = \frac{d\lambda}{d\lambda'} \frac{dx^\mu}{d\lambda} \quad (2.34)$$

de manera que recuperamos el valor de la acción en la parametrización original.

En particular, podemos usar como parámetro el propio tiempo coordinado, es decir $\lambda = cdt$, en cuyo caso

$$S = -mc^2 \int dt \sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}} \quad (2.35)$$

donde v es la velocidad ordinaria, $v^i = dx^i/dt$. En el límite no relativista $v^2/c^2 \ll 1$

$$S \approx -mc^2 \int dt \left[1 - \frac{1}{2} \frac{v^2}{c^2} + \dots \right] \quad (2.36)$$

La constante no contribuye, y vemos que se recupera naturalmente la acción para una partícula libre no relativista (de paso, aprendemos que el parámetro m representa la masa de la partícula).

Volviendo a un parámetro general, definimos los impulsos

$$p_\mu = \frac{\partial L}{\partial x^\mu_{,\lambda}} \quad (2.37)$$

Haciendo la cuenta, encontramos

$$p_\mu = (-mc) \frac{1}{2\sqrt{-\eta_{\mu\nu} \frac{dx^\mu}{d\lambda} \frac{dx^\nu}{d\lambda}}} (-2) \eta_{\mu\nu} \frac{dx^\nu}{d\lambda} \quad (2.38)$$

que se simplifica a

$$p_\mu = mc u_\mu \quad (2.39)$$

Como en este caso el lagrangiano no depende de las coordenadas, las ecuaciones de movimiento se reducen a la conservación del impulso

$$\frac{dp_\mu}{d\lambda} = 0 \quad (2.40)$$

Supongamos que en vez de un único móvil tuviéramos un gas de partículas llenando una región del espacio-tiempo, de manera que una partícula tiene impulso p^μ cuando atraviesa el evento x^μ . Entonces podemos escribir la ecuación de movimiento como

$$mc \frac{cd\tau}{d\lambda} u^\nu u^\mu_{,\nu} = 0 \quad (2.41)$$

donde $u^\mu_{,\nu} = \partial u^\mu / \partial x^\nu$. Como el primer factor no es nulo, debe ser

$$u^\nu u^\mu_{,\nu} = 0 \quad (2.42)$$

que es la *ecuación geodésica* y nos va a tener bastante ocupados el resto del curso.

Usando la parametrización 2.25 para la tetravelocidad encontramos que los impulsos

$$p^i = \frac{mv^i}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} \quad (2.43)$$

de modo que pueden considerarse como la generalización relativista del impulso “masa por velocidad” de la mecánica clásica. La componente temporal

$$p^0 = \frac{mc}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} \quad (2.44)$$

En el límite no relativista

$$p^0 = \frac{1}{c} \left[mc^2 + \frac{1}{2} mv^2 + \dots \right] \quad (2.45)$$

Como el segundo sumando es la energía cinética ordinaria, esto sugiere asociar $p^0 = E/c$, donde E es la energía de la partícula. Vemos que la energía no tiende a cero cuando la velocidad tiende a cero, sino que en ese límite obtenemos la *energía en reposo*

$$E = mc^2 \quad (2.46)$$

que es probablemente la fórmula más famosa de toda la física



Figura 2.3: La tripulación del portaaviones Enterprise, el primer portaaviones nuclear del mundo, escribiendo la fórmula de Einstein 9.18 sobre la cubierta.

2.3. Acerca de la literatura

El tema de esta clase no presenta muchas variaciones entre los libros de texto usuales, el Schutz entre ellos. El tema de la mecánica relativista es una buena excusa para volver al Landau, [7].

Capítulo 3

Hacia la Relatividad General



Figura 3.1: Einstein, dibujo de George Gamow [8]

Como hemos visto, hacia fines del siglo XIX se acumulaba la evidencia de que la Transformación de Galileo tenía dificultades, y por lo tanto es razonable esperar que tarde o temprano alguien hubiera propuesto reemplazarla por la Transformación de Lorentz, que por supuesto ya era ampliamente conocida. Pero el paso siguiente fue una conexión de sentido que realmente es difícil de concebir sin la intermediación de un genio como Einstein ¹

Concretamente, lo que postuló Einstein es que los efectos no inerciales, la interacción gravitatoria, y la curvatura del espacio-tiempo no eran sino distintas descripciones de los mismos fenómenos, al menos localmente. Nosotros vamos a ver a continuación la equivalencia entre efectos no inerciales y gravitatorios, y luego como los efectos no inerciales pueden ser duplicados por efectos de curvatura del espacio (para lo cual vamos a tener que explicar qué entendemos por *curvatura del espacio*). La equivalencia entre gravitación y curvatura va a seguir por transitividad, y de hecho va a ser el tema de todo el resto del curso 3.2.

¹Esto se vuelve todavía más desconcertante cuando se considera que las contribuciones de Einstein a la teoría del movimiento Browniano comienzan con un golpe de genio similar: *La teoría de Einstein del Movimiento Browniano combinaba dos postulados que aparentemente no tenían nada que ver entre sí (quizás esto fuera típico de Einstein). Tomó una fórmula de la hidrodinámica, para la fuerza sobre una esfera moviéndose a través de un fluido viscoso, y otra fórmula, de la teoría de soluciones, para la presión osmótica de moléculas disueltas. Insertando estas caracterizaciones físicas (aparentemente incompatibles) en su descripción del movimiento aleatorio de la partícula, llegó a su famoso resultado para el desplazamiento cuadrático medio de la partícula* [9]. Y por supuesto, la teoría de Einstein del efecto fotoeléctrico introduce la dualidad onda-partícula [10].

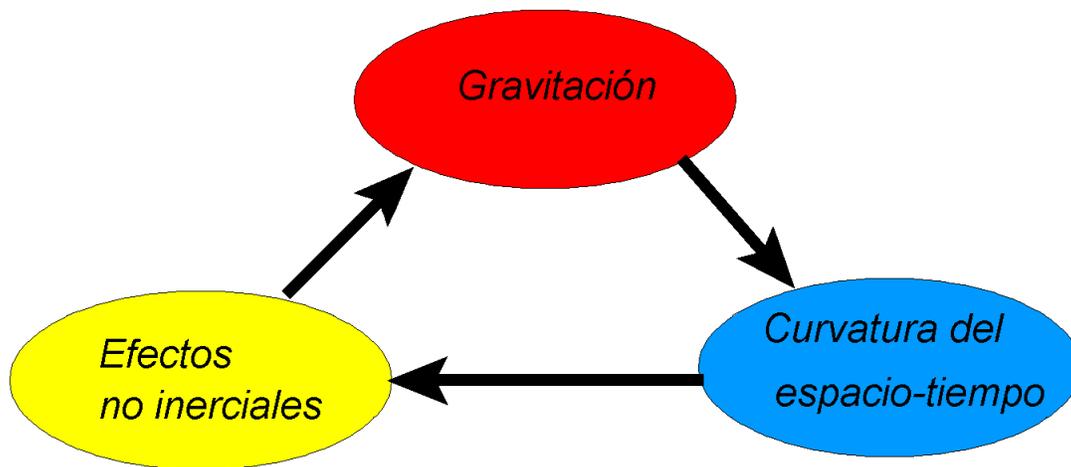


Figura 3.2: El golpe de genio de Einstein fue postular que los efectos no inerciales, la interacción gravitatoria, y la curvatura del espacio-tiempo, localmente, no son sino distintas descripciones del mismo fenómeno.

3.1. El Principio de Equivalencia

Mientras que las geometrías no euclidianas o curvas habían sido introducidas en las matemáticas por Gauss y Lobachevsky desde principios del Siglo XIX, a principios del XX eran todavía un territorio poco explorado por los físicos. En cambio, la existencia de una conexión entre los efectos gravitatorios y no inerciales era algo de larga data, por lo menos desde el experimento pensado de la Torre de Pisa que describe Galileo, ver la fig. (3.3) [11].

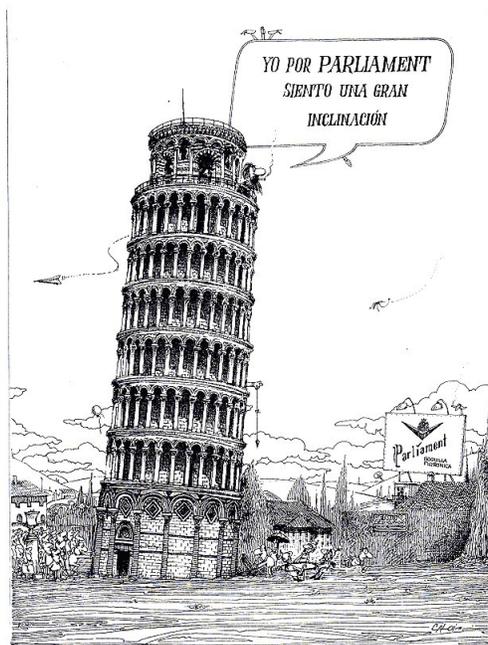


Figura 3.3: El experimento de Galileo demostrando la igualdad de las masas inercial y gravitatoria.

El revolver humeante era el doble rol de la masa cuando uno escribe que en un campo gravitatorio $ma = mg$, por lo cual las masas se cancelan y todos los cuerpos caen con la misma aceleración. Cuando uno escribe la ecuación de Newton para una partícula cargada en un campo eléctrico $ma = qE$, está claro que m y q son dos objetos completamente distintos: m es la *masa inercial*, que es el cociente entre la fuerza y la aceleración, mientras que q es la *carga*, que mide el cociente entre la fuerza y el campo eléctrico. Por eso para una partícula en un campo gravitatorio uno querría escribir $ma = \mu g$, donde μ sería una hipotética *masa gravitatoria*, es decir, la "carga" de la interacción gravitatoria. La demostración empírica de que $\mu = m$ para todas las partículas sugiere que algo muy raro está pasando.

Y la misma cosa rara ocurre en relación a las llamadas *fuerzas no inerciales* [12]

$$\mathbf{F}_{NI} = (-m) \left\{ \mathbf{a} + \boldsymbol{\Omega} \times (\boldsymbol{\Omega} \times \mathbf{r}) + 2\boldsymbol{\Omega} \times \mathbf{v} + \dot{\boldsymbol{\Omega}} \times \mathbf{r} \right\} \quad (3.1)$$

donde m , \mathbf{r} y \mathbf{v} son la masa, posición y velocidad del punto material, \mathbf{a} es la aceleración del observador no inercial, y $\boldsymbol{\Omega}$ es la velocidad angular con la que el sistema no inercial rota respecto de un sistema inercial. Como las gravitatorias, las fuerzas no inerciales son proporcionales a la masa inercial, y por lo tanto imprimen la misma aceleración a todas las partículas.

Supongamos que dos observadores S (Aquiles) y S' (la Tortuga), cada uno encerrado en una caja que les impide ver el exterior, observan la trayectoria de un rayo de luz. Aquiles es un observador inercial, y ve que la trayectoria es una línea recta. La caja de la Tortuga está acelerada hacia abajo, y ella ve que la trayectoria se curva hacia arriba. Aquiles atribuye que la Tortuga no vea una línea recta a su carácter de observador no inercial.

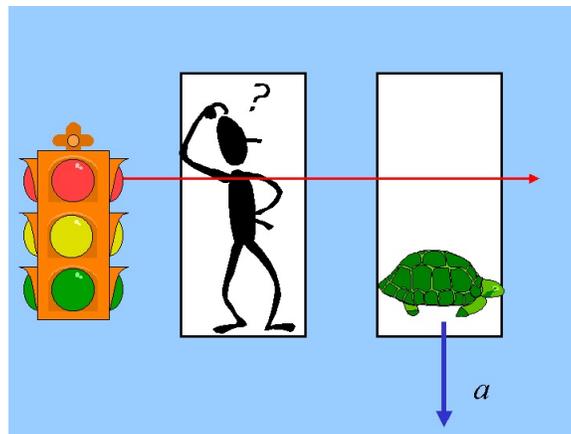


Figura 3.4: Aquiles (el observador inercial) y la Tortuga (observador no inercial) observan un rayo de luz.

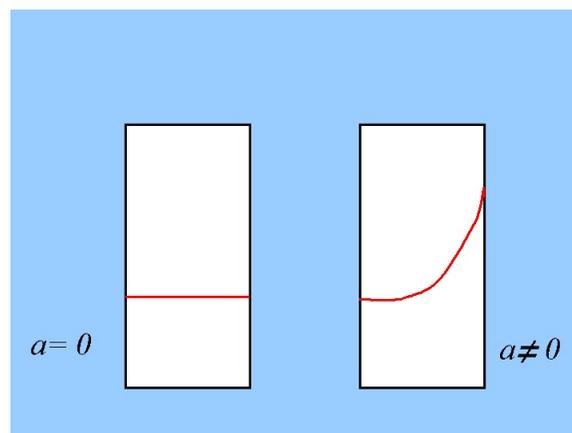


Figura 3.5: El resultado del experimento. Aquiles (el observador inercial) ve una línea recta, y la Tortuga (observador no inercial) ve una línea curva.

Ahora realicemos un experimento ligeramente distinto. Aquiles sigue siendo un observador inercial, pero ahora está inmerso en un campo gravitatorio, y observa que la luz se curva hacia abajo. La Tortuga sigue siendo no inercial, pero ahora cae en caída libre, y observa que la trayectoria del rayo de luz es recta.

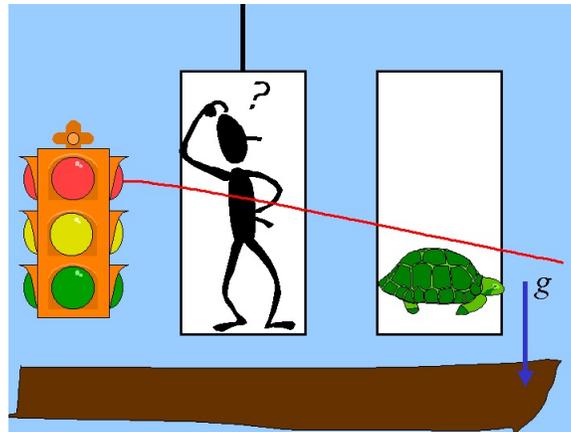


Figura 3.6: Aquiles (el observador inercial) y la Tortuga (observador no inercial) observan un rayo de luz inmersos en un campo gravitatorio. La Tortuga está cayendo libremente.

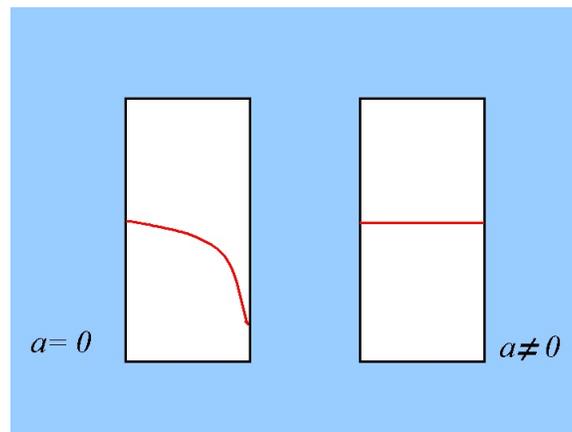


Figura 3.7: El resultado del experimento. La Tortuga (el observador no inercial) ve una línea recta, y Aquiles (observador inercial) ve una línea curva.

La perplejidad de Aquiles se debe que, comparando su resultado del segundo experimento con el resultado de la Tortuga en el primero, honestamente no es capaz de decir si él es un observador estacionario en un campo gravitatorio, o un observador acelerado en ausencia de fuerza gravitatoria. Por supuesto, Aquiles podría resolver esta incertidumbre si fuese capaz de expandir su caja hasta observar inhomogeneidades en el campo gravitatorio, o si pudiera mirar fuera de la caja y ver si hay o no fuentes de campo gravitatorio (es decir, otras masas) en la cercanía. Pero mientras esté limitado a experimentos *locales*, es imposible para Aquiles decidir por una de las dos alternativas. Nosotros vamos a tomar esta imposibilidad como un axioma, el llamado *Principio de Equivalencia*, y vamos a asumir que esta equivalencia abarca *todos* los fenómenos físicos.

3.1.1. Sistemas no inerciales y el balde de Newton

Un ejemplo más sofisticado de comportamiento no inercial es el *argumento del balde de Newton*. Este argumento es históricamente significativo porque fue utilizado por el propio Newton para demostrar que la aceleración respecto del espacio absoluto, a diferencia de la velocidad, era un observable.

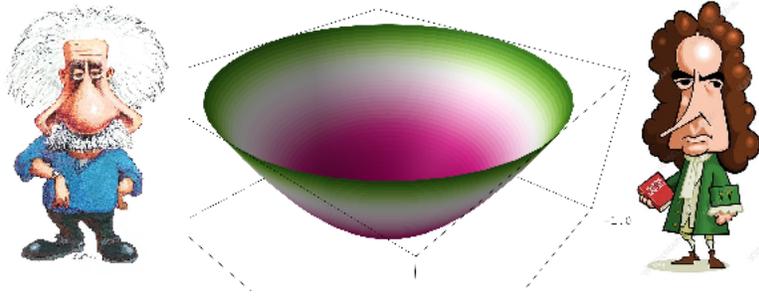


Figura 3.8: El balde de Newton.

Consideremos un fluido no viscoso (agua) contenido en un recipiente (balde). El movimiento del fluido es descrito por las ecuaciones de Euler

$$\frac{\partial}{\partial t} \mathbf{v} + (\mathbf{v} \cdot \nabla) \mathbf{v} = -\frac{1}{\rho} \nabla p - \nabla \Phi \quad (3.2)$$

Donde $\Phi = gz$ es el potencial gravitatorio, que tiene unidades de velocidad al cuadrado ($m\Phi$, donde m es una masa, tiene unidades de energía). La superficie libre del agua corresponde a una superficie de presión constante, igual a la presión ambiente.

Si el agua está quieta, $\mathbf{v} = 0$, entonces $p = p_0 - \rho gz$ y la superficie libre es un plano horizontal. Pero si el agua rota con velocidad angular $\boldsymbol{\Omega} = \Omega \hat{z}$, entonces $\mathbf{v} = \boldsymbol{\Omega} \times \mathbf{r}$. Ahora

$$\begin{aligned} (\epsilon_{jkl} \Omega^k r^l) \partial_j (\epsilon^{imn} \Omega^m r^n) &= (\epsilon_{jkl} \Omega^k r^l) (\epsilon^{imj} \Omega^m) \\ &= \Omega^i (\Omega_k r^k) - \Omega^2 r^i \end{aligned} \quad (3.3)$$

y entonces

$$[(\boldsymbol{\Omega} \times \mathbf{r}) \cdot \nabla] (\boldsymbol{\Omega} \times \mathbf{r}) = \frac{1}{2} \nabla [(\boldsymbol{\Omega} \times \mathbf{r})^2 - \Omega^2 r^2] \quad (3.4)$$

Por lo tanto

$$p = \rho \left[-gz + \frac{1}{2} [r^2 \Omega^2 - (\boldsymbol{\Omega} \cdot \mathbf{r})^2] \right] + \text{constante} \quad (3.5)$$

En particular, la superficie libre del fluido es un paraboloides

$$z \approx z_0 + \frac{\Omega^2}{2g} r^2 \quad (3.6)$$

que no es un plano. Newton utilizó este ejemplo para argumentar que los movimientos acelerados son absolutos, ya que realizando el experimento de mirar la superficie libre de un balde de agua en reposo podemos decidir si estamos en un sistema inercial o no. Si vemos el agua quieta y una superficie plana podemos afirmar que somos un observador inercial. Pero si vemos el agua rotar y una superficie plana tenemos una contradicción. La contradicción de debe a que realmente el agua está quieta, y los que estamos rotando (en sentido contrario) somos nosotros.

Por supuesto, la respuesta de Einstein es que, con experimentos puramente locales, no es posible descartar que haya una distribución de masas lejanas que efectivamente produzca un potencial gravitatorio igual al término entre corchetes en la ecuación 3.5. Al final del día, no hay división jerárquica entre los observadores inerciales y no inerciales, cualquier observador ve fenómenos atribuibles a efectos no inerciales en ausencia de campos gravitatorios, o a efectos gravitatorios en un sistema inercial, y no hay manera objetiva de decidir entre ambas alternativas [15].



Figura 3.9: Einstein liderando a los observadores no-inerciales, que reclaman la igualdad con los inerciales.

3.2. El Espacio-tiempo curvo



Figura 3.10: M. C: Escher, *Galera de grabados* (1956).

El paso siguiente de Einstein fue afirmar que, dado que observadores inerciales o no son equivalentes, si en el caso de la fig. 3.5 Aquiles veía una línea recta, el rayo que veía la Tortuga *también* era una línea recta. Pero mientras Aquiles veía las rectas de una geometría plana, la Tortuga veía las rectas de una geometría curva.

El caso más simple de geometría curva es probablemente una esfera en un espacio euclídeo de 3 dimensiones, es decir, los puntos (x, y, z) tales que $x^2 + y^2 + z^2 = R^2$.



Figura 3.11: Una esfera de dos dimensiones embebida en un espacio euclídeo de tres.

Dos puntos próximos sobre la esfera se pueden pensar como pertenecientes a un plano, y heredan la noción de distancia del espacio ambiente

$$ds^2 = dx^2 + dy^2 + dz^2 \quad (3.7)$$

Una curva de extensión finita puede descomponerse en incrementos infinitesimales, para cuya longitud vale la ec. 3.7. La longitud total de la curva es la suma de las longitudes de estos segmentos

$$S = \int ds \quad (3.8)$$

Si parametrizamos la curva con un parámetro t

$$S = \int dt \sqrt{\left(\frac{\partial x}{\partial t}\right)^2 + \left(\frac{\partial y}{\partial t}\right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial t}\right)^2} \quad (3.9)$$

La longitud definida de este modo es independiente de la parametrización. La distancia entre dos puntos se define como la longitud de una *curva geodésica*, que es un extremo del funcional en la ecuación 3.9.

Cuando queremos calcular dicho extremo nos encontramos que no podemos variar x , y y z independientemente, ya que debemos garantizar que la trayectoria permanece sobre la esfera antes y después de la variación. Alternativamente, poder agregar a la “acción” 3.9 un término de vínculo

$$S_V = \int dt N [x^2 + y^2 + z^2 - R^2] \quad (3.10)$$

Ahora sí podemos variar x , y , z y N como si fueran variables independientes, ya que la variación respecto de N sólo se anula cuando estamos sobre la esfera.

Lo que nos interesa en este momento es que tanto la longitud S 3.9 como el término de vínculos 3.10 son invariantes frente a rotaciones en el espacio ambiente, y como hemos aprendido en Física 1 al estudiar el problema de Kepler, cuando un sistema es invariante frente a traslaciones, se conserva el momento angular $\mathbf{L} = \mathbf{r} \times \mathbf{p}$, y la trayectoria, que debe permanecer ortogonal a este vector conservado, $\mathbf{L} \cdot \mathbf{r} = 0$, debe permanecer en un plano que pasa por el origen [12].

Esta última observación resuelve nuestro problema: *las líneas rectas en la esfera son la intersección entre la esfera y planos por el origen*. Estas líneas también se conocen como círculos máximos.

Nótese que un segmento de un meridiando es una línea recta, pero un segmento de un paralelo no, salvo que sea el Ecuador.

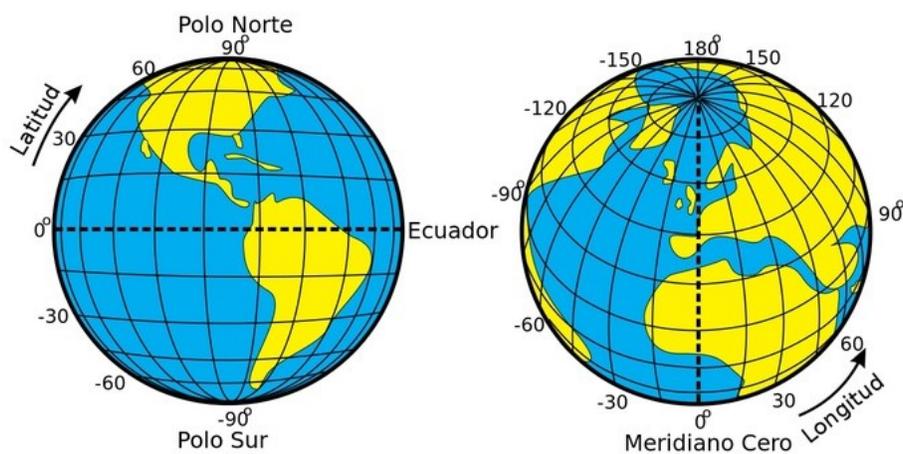


Figura 3.12: Los meridianos son líneas rectas en la esfera, los paralelos no.

La geometría de la esfera es demostrablemente distinta a la geometría euclídea. Por ejemplo, la suma de los ángulos internos de un triángulo es mayor que π . Es importante ver que mediante criterios como éste es posible determinar que la geometría es distinta a la euclídea mediante mediciones realizadas *sobre la esfera misma*: podemos hablar de la geometría de la esfera sin considerar en ningún momento si existe o no un espacio ambiente.

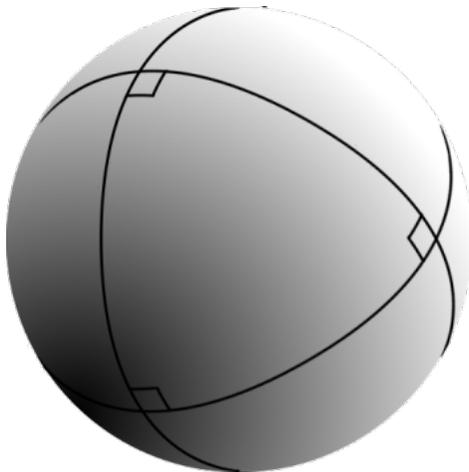


Figura 3.13: Un triángulo sobre la esfera. Si ponemos un vértice en el polo, y los otros dos en el ecuador, uno a longitud 0 y el otro a longitud 90° , entonces los tres ángulos son rectos, y la suma de los ángulos internos es $3\pi/2$. Notablemente $3\pi/2 = \pi + \pi/2$, y $\pi/2 = 4\pi/8$ es el área del triángulo (si el radio vale 1). En general, se define la *curvatura* como el coeficiente R tal que la suma de los ángulos internos de un triángulo de área A es $\pi + RA$.

3.2.1. Variedades diferenciales

Para formalizar un poco el concepto de espacio (-tiempo) curvo, tenemos que introducir la noción de *variedad diferencial*. Una variedad diferencial es un conjunto, tal que cada elemento de ese conjunto pertenece a su vez a un subconjunto que es isomorfo a un subconjunto de \mathbf{R}^n . Es decir, si P pertenece a la variedad \mathcal{M} , entonces P es la imagen de algún punto $x_P = (x_P^1, x_P^2, \dots, x_P^n)$ en \mathbf{R}^n según alguna función biunívoca ϕ de \mathbf{R}^n en \mathcal{M} , definida en algún conjunto abierto de \mathbf{R}^n que contiene a x_P . Definiendo que los conjuntos abiertos de \mathcal{M} son las imágenes de los conjuntos abiertos de \mathbf{R}^n según estos mapas (por lo cual ϕ es continua), la identificación $P \leftrightarrow x_P$ nos permite construir un “sistema de coordenadas” en un entorno de P .

Una función ψ de \mathcal{M} a \mathbf{R} define una función Ψ de \mathbf{R}^n en \mathbf{R} de acuerdo con la construcción $\Psi(x_P) = \psi(P)$. La función Ψ tiene un diferencial

$$d\Psi = \frac{\partial \Psi}{\partial x^\mu} dx^\mu \quad (3.11)$$

$1 \leq \mu \leq n$, y estamos usando la convención de Einstein. Nótese que estamos pensando los desplazamientos infinitesimales alrededor del punto P como si fueran los elementos de un espacio vectorial, el *plano tangente* en P . Por definición, los diferenciales de las coordenadas son una base en ese espacio.

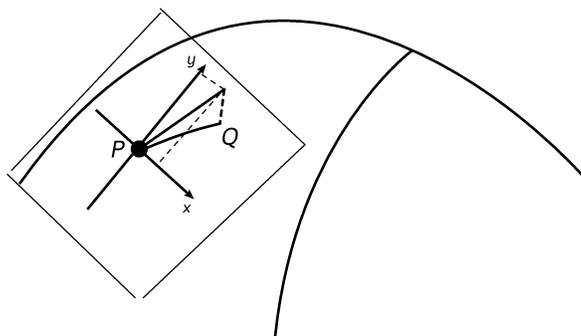


Figura 3.14: Dado un punto P , un punto próximo Q se puede identificar con un vector en el *plano tangente* de P .

Supongamos que el punto P pertenece a dos sistemas de coordenadas distintos, el sistema en que las coordenadas de P son los x_P^μ y el sistema en que las coordenadas son los ξ_P^α . La función que conecta x_P con ξ_P para cada P es un isomorfismo de \mathbf{R}^n en sí mismo. En el nuevo sistema de coordenadas podríamos definir

$$d\bar{\Psi} = \frac{\partial \Psi}{\partial \xi^\alpha} d\xi^\alpha \quad (3.12)$$

pero de hecho $d\bar{\Psi} = d\Psi$, porque

$$\frac{\partial \Psi}{\partial \xi^\alpha} = \frac{\partial \Psi}{\partial x^\mu} \frac{\partial x^\mu}{\partial \xi^\alpha} \quad (3.13)$$

$$d\xi^\alpha = \frac{\partial \xi^\alpha}{\partial x^\nu} dx^\nu \quad (3.14)$$

y

$$\frac{\partial x^\mu}{\partial \xi^\alpha} \frac{\partial \xi^\alpha}{\partial x^\nu} = \delta_\nu^\mu \quad (3.15)$$

es la delta de Kronecker. En general, decimos que una función Ψ que es invariante frente a cambios de coordenadas (en el sentido que $\bar{\Psi}(\xi_P) = \Psi(x_P)$) define un escalar. Un conjunto de cuatro funciones A_μ que se transforman como las derivadas de un escalar definen un *vector covariante*

$$\bar{A}_\alpha(\xi_P) = \frac{\partial x^\mu}{\partial \xi^\alpha} A_\mu(x_P) \quad (3.16)$$

Un conjunto de cuatro funciones A^μ que se transforman como los diferenciales de las coordenadas definen un *vector contravariante*

$$\bar{A}^\alpha(\xi_P) = \frac{\partial \xi^\alpha}{\partial x^\mu} A^\mu(x_P) \quad (3.17)$$

(nótese que la “contracción” $A_\mu B^\mu$ de un vector covariante y otro contravariante define un escalar). Un tensor mixto de orden (n, m) es un conjunto de funciones $T_{\nu_1 \dots \nu_m}^{\mu_1 \dots \mu_n}$ que se transforma como el producto de n vectores contravariantes y m vectores covariantes.

Todo esto es lo mismo que vimos en el espacio de Minkowski, la diferencia fundamental es que en Minkowski las matrices de cambio de base se daban una vez y para siempre, mientras que ahora las matrices de cambio de base $\partial \xi^\alpha / \partial x^\mu$ y su inversa cambian de punto a punto.

Como en el espacio de Minkowski, la propiedad fundamental de la regla de transformación de un vector es que es homogénea: si todas las componentes de un vector se anulan en algún sistema de coordenadas, entonces se anulan en todo sistema de coordenadas. Por eso mismo, si damos las componentes de un vector en algún sistema de coordenadas, éste queda automáticamente definido en todo sistema de coordenadas.

3.2.2. El tensor métrico.

Mientras que el único ejemplo de variedad diferencial que hemos visto hasta ahora era una superficie embebida en un espacio ambiente, el objetivo de la geometría diferencial es obtener una descripción intrínseca de las propiedades de la variedad. Es decir, queremos ver a la esfera desde el punto de vista de una hormiguita viviendo sobre la esfera, ignorante (e indiferente) acerca de la existencia o no de un espacio mayor.

Para avanzar en esta descripción intrínseca, vamos a asumir que nuestra variedad posee una estructura adicional a las que ya hemos visto (ya introdujimos una topología, es decir una noción de conjunto abierto, y la estructura vectorial de los espacios tangentes), a saber una noción de distancia (o pseudo distancia en el caso de un espacio tiempo curvo).

La manera más básica de introducir una distancia de manera intrínseca es mediante el tensor métrico.

En el plano euclídeo, un desplazamiento arbitrario ds se puede descomponer en dos desplazamientos ortogonales dx y dy . Entonces el desplazamiento total está dado por el Teorema de Pitágoras

$$ds^2 = dx^2 + dy^2 \quad (3.18)$$

El Teorema de Pitágoras dice que ds^2 es el resultado de aplicar una forma cuadrática al vector de desplazamientos (dx, dy) , explícitamente

$$ds^2 = \begin{pmatrix} dx & dy \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} dx \\ dy \end{pmatrix} \quad (3.19)$$

En realidad no es necesario que los desplazamientos sean según las coordenadas cartesianas; cualquier par de desplazamientos sirve, pero la forma cuadrática puede ser más complicada. Por ejemplo, uno puede usar coordenadas polares $x = r \cos \theta$, $y = r \sin \theta$. Entonces

$$\begin{aligned} dx &= \cos \theta dr - r \sin \theta d\theta \\ dy &= \sin \theta dr + r \cos \theta d\theta \end{aligned} \quad (3.20)$$

y el Teorema de Pitágoras se convierte en

$$ds^2 = dr^2 + r^2 d\theta^2 \quad (3.21)$$

de donde leemos el tensor métrico

$$g_{ab} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & r^2 \end{pmatrix} \quad (3.22)$$

La distancia sobre la esfera, para desplazamientos infinitesimales, es la misma que en el espacio

$$ds^2 = dx^2 + dy^2 + dz^2 \quad (3.23)$$

Pero un punto sobre la esfera (de radio 1) se puede parametrizar como

$$\begin{aligned} z &= \cos \theta \\ x &= \sin \theta \cos \varphi \\ y &= \sin \theta \sin \varphi \end{aligned} \quad (3.24)$$

de donde

$$\begin{aligned} dz &= -\sin \theta d\theta \\ dx &= \cos \theta \cos \varphi d\theta - \sin \theta \sin \varphi d\varphi \\ dy &= \cos \theta \sin \varphi d\theta + \sin \theta \cos \varphi d\varphi \end{aligned} \quad (3.25)$$

por lo que obtenemos el Teorema de Pitágoras para la esfera

$$ds^2 = d\theta^2 + \sin^2 \theta d\varphi^2 \quad (3.26)$$

Nótese la diferencia con el caso plano 3.21.

Hasta ahora hemos considerado solamente distancias sobre desplazamientos infinitesimales. Si queremos calcular la distancia entre dos puntos x_i , x_f a una distancia finita, consideramos una curva que comienza en x_i y termina en x_f y sumamos las distancias infinitesimales a lo largo de la curva

$$S = \int_{x_i}^{x_f} ds \quad (3.27)$$

La idea es extremar esta expresión sobre todas las curvas con extremos fijos, y entonces la distancia a secas es la integral calculada sobre la curva extremal o *geodésica*.

Para poder calcular la integral es necesario parametrizar la curva, y entonces

$$S = \int_{r_i}^{r_f} dr \frac{ds}{dr} \quad (3.28)$$

Usando la métrica $ds^2 = g_{ab} dx^a dx^b$

$$S = \int_{r_i}^{r_f} dr \sqrt{g_{ab} \frac{dx^a}{dr} \frac{dx^b}{dr}} \quad (3.29)$$

La invariancia del intervalo requiere que el tensor métrico sea un tensor dos veces covariante, pero a diferencia del caso del espacio de Minkowski, ya no pedimos que sea *invariante de forma*. Es decir, en Minkowski todos los observadores inerciales ven el mismo tensor métrico, la métrica de Minkowski $\eta_{\mu\nu} = \text{diag}(-1, 1, 1, 1)$. En cambio, ahora sólo

pedimos que distintos observadores conecten sus tensores métricos mediante las leyes de transformación tensoriales correspondientes, pero las matrices que expresan al tensor métrico en distintos sistemas de coordenadas pueden ser distintas hasta lo irreconocible.

Cabe decir que aunque la geometría diferencial era un recurso poco explorado en física, tampoco carecía completamente de antecedentes. Por ejemplo, el Principio de Fermat afirma que la trayectoria de un rayo de luz entre dos puntos es la que minimiza el camino óptico [13]

$$S = \int n ds \quad (3.30)$$

donde n es el índice de refracción y ds el intervalo euclídeo. Ahora reconocemos que Fermat está diciendo que los rayos de luz son las geodésicas de una geometría en la que el intervalo es $ds^2 = n^2 (dx^2 + dy^2 + dz^2)$.

Un ejemplo más sofisticado es el Principio variacional de Jacobi, que determina la trayectoria que sigue una partícula para unir dos puntos, moviéndose con una energía dada [14], en vez de en un intervalo de tiempo dado. Las soluciones son las geodésicas de la geometría $ds^2 = (E - V) (dx^2 + dy^2 + dz^2)$, donde E es la energía dada y V la energía potencial.

3.3. Geometría, efectos no inerciales y gravitación en el límite newtoniano

Para terminar este primer encuentro con la geometría diferencial, vamos a exhibir la forma de la métrica del espacio-tiempo que reproduce los efectos no inerciales que percibe un observador en rotación y un campo newtoniano débil, en ambos casos en el límite en que las velocidades y el potencial gravitatorio son chicos comparados con c .

El tratamiento habitual de sistemas en rotación [12] comienza con la observación de que la velocidad v_0 percibida por un observador inercial es la velocidad v en el sistema rotante más un término de arrastre $\Omega \times r$

$$v_0 = v + \Omega \times r \quad (3.31)$$

Repitiendo este argumento, encontramos que para la aceleración

$$a_0 = \frac{d}{dt} [v + \Omega \times r] + \Omega \times [v + \Omega \times r] \quad (3.32)$$

demodo que si la rotación es constante

$$a_0 = a + 2\Omega \times v + \Omega \times (\Omega \times r) \quad (3.33)$$

Reemplazando ésto en la ley de Newton del observador inercial, encontramos que

$$ma = f - 2m\Omega \times v - m\Omega \times (\Omega \times r) \quad (3.34)$$

El primer término es la fuerza de Coriolis y el segundo la fuerza centrífuga.

Para describir ésto mismo como un efecto geométrico, observamos que si para el observador rotante se produce un desplazamiento dr en un lapso dt , el observador inercial observa

$$dr_0 = dr + \Omega \times r dt \quad (3.35)$$

(asumimos que ambos observadores perciben los mismos tiempos). Por lo tanto el intervalo es

$$\begin{aligned} ds^2 &= -c^2 dt^2 + (dr + \Omega \times r dt)^2 \\ &= - \left[1 - \frac{1}{c^2} (\Omega \times r)^2 \right] c^2 dt^2 + dr^2 + 2 (\Omega \times r) \cdot dr dt \end{aligned} \quad (3.36)$$

La trayectoria de la partícula es la curva geodésica, que es el extremo del funcional

$$S = - \int d\lambda \sqrt{\left[1 - \frac{1}{c^2} (\Omega \times r)^2 \right] c^2 \frac{dt^2}{d\lambda^2} - \frac{dr^2}{d\lambda^2} - 2 (\Omega \times r) \cdot \frac{dr}{d\lambda} \frac{dt}{d\lambda}} \quad (3.37)$$

Como la distancia es independiente de la parametrización, podemos poner $\lambda = ct$, en cuyo caso

$$S = - \int c dt \sqrt{1 - \frac{1}{c^2} (\boldsymbol{\Omega} \times \mathbf{r})^2 - \frac{1}{c^2} \frac{d\mathbf{r}^2}{dt} - \frac{2}{c^2} (\boldsymbol{\Omega} \times \mathbf{r}) \cdot \frac{d\mathbf{r}}{dt}} \quad (3.38)$$

Desarrollando la raíz cuadrada a primer orden en $1/c^2$, obtenemos la “acción”

$$S \approx \int dt \left[\frac{1}{2} \frac{d\mathbf{r}^2}{dt} + \frac{1}{2} (\boldsymbol{\Omega} \times \mathbf{r})^2 + (\boldsymbol{\Omega} \times \mathbf{r}) \cdot \frac{d\mathbf{r}}{dt} \right] \quad (3.39)$$

Que genera las ecuaciones de Euler-Lagrange

$$\frac{d}{dt} [\mathbf{v} + \boldsymbol{\Omega} \times \mathbf{r}] = -\boldsymbol{\Omega} \times (\boldsymbol{\Omega} \times \mathbf{r}) - \boldsymbol{\Omega} \times \mathbf{v} \quad (3.40)$$

donde reconocemos los mismos términos no inerciales que en 3.34.

Consideremos ahora la trayectoria de una partícula bajo un potencial Newtoniano φ en el límite $\varphi \ll c^2$. Desde el punto de vista de la mecánica, diríamos que la trayectoria es un extremo de la acción

$$S = \int dt \left[\frac{1}{2} m v^2 - m \varphi \right] \quad (3.41)$$

Repitiendo los pasos del ejercicio anterior, pero en orden inverso, reconocemos el desarrollo a primer orden de

$$S = -m c^2 \int dt \sqrt{1 + \frac{1}{c^2} (2\varphi - v^2)} \quad (3.42)$$

que resulta de poner $\lambda = ct$ en el principio variacional

$$S = -m c \int d\lambda \sqrt{\left[1 + \frac{2\varphi}{c^2}\right] c^2 \frac{dt^2}{d\lambda} - \frac{d\mathbf{r}^2}{d\lambda}} \quad (3.43)$$

que corresponde encontrar las geodésicas de un espacio-tiempo curvo con tensor métrico

$$ds^2 = - \left(1 + \frac{2\varphi}{c^2}\right) c^2 dt^2 + \delta_{ij} dx^i dx^j \quad (3.44)$$

Capítulo 4

La descripción intrínseca de un espacio-tiempo curvo



Figura 4.1: Einstein descubre que $E = mc^2$.

En esta clase vamos a introducir herramientas que nos van a permitir describir la curvatura de un espacio-tiempo en el resto del curso.

4.1. Sistemas localmente inerciales

Volviendo a la geometría del espacio-tiempo, vamos a asumir que la variedad \mathcal{M} está dotada de una métrica, es decir, un tensor dos veces covariante simétrico $g_{\mu\nu}$. Entonces

$$ds^2 = g_{\mu\nu}(P) dx^\mu dx^\nu \quad (4.1)$$

define un escalar, que interpretamos como el “intervalo” entre los puntos x_P y $x_Q = x_P + dx$. Asumimos que $g_{\mu\nu}$ es una “métrica de Minkowski”, es decir, que en cada punto la matriz $g_{\mu\nu}(P)$ tiene un autovalor negativo y tres positivos (a diferencia de las métricas de Riemann, que tienen todos sus autovalores positivos), ninguno de ellos nulo.

Asociamos la coordenada x^0 con el autovector de $g_{\mu\nu}$ con autovalor negativo, es decir el tiempo, $x^0 = ct$. También conviene definir

$$g = \det g_{\mu\nu} \quad (4.2)$$

Claramente $g < 0$.

Vamos a usar la convención de que las componentes $g_{\mu\nu}$ de la métrica son adimensionales y los desplazamientos dx^μ tienen unidades de longitud. Para eso debemos identificar $dx^0 = cdt$.

Puesto que asumimos que $g_{\mu\nu}$ no tiene autovalores nulos, es invertible. Si

$$g_{\mu\nu} = \frac{\partial \xi^\alpha}{\partial x^\mu} g_{\alpha\beta} \frac{\partial \xi^\beta}{\partial x^\nu} \quad (4.3)$$

Entonces, invirtiendo el producto de matrices, su inversa

$$g^{\nu\mu} = \frac{\partial x^\nu}{\partial \xi^\alpha} g^{\alpha\beta} \frac{\partial x^\mu}{\partial \xi^\beta} \quad (4.4)$$

Por lo tanto $g^{\mu\nu}$ es un tensor simétrico dos veces contravariante. En general, si A_μ es un vector covariante, entonces $A^\mu = g^{\mu\rho} A_\rho$ es contravariante, y viceversa. La forma mixta de la métrica

$$g^\mu_\nu = g^{\mu\rho} g_{\rho\nu} = \delta^\mu_\nu \quad (4.5)$$

es el tensor de Kronecker.

En cada punto P es posible definir un cambio de coordenadas $x^\mu \rightarrow \xi^\alpha$ tal que, en las nuevas coordenadas, $g_{\alpha\beta}(P) = \eta_{\alpha\beta}$, donde $\eta_{\alpha\beta} = \text{diag}(-1, 1, 1, 1)$ es la métrica de Minkowski. Para eso introducimos una *tétrada*. Una tétrada es un conjunto de cuatro vectores e_α , cuyas componentes e^μ_α satisfacen, en el sistema original,

$$e^\mu_\alpha g_{\mu\nu} e^\nu_\beta = \eta_{\alpha\beta} \quad (4.6)$$

La matriz e^μ_α posee una inversa, que llamamos e^α_μ , de modo que

$$e^\alpha_\mu \eta_{\alpha\beta} e^\beta_\nu = g_{\mu\nu} \quad (4.7)$$

Nótese que aunque α, β, \dots no son índices vectoriales (sino que identifican a los distintos miembros de la tétrada) igual los “subimos” y “bajamos” con la métrica de Minkowski. Los vectores de la tétrada forman una base en el plano tangente en el punto P , ya que para cualquier vector

$$A^\mu = A^\alpha e^\mu_\alpha \quad (4.8)$$

donde los $A^\alpha = e^\alpha_\mu A^\mu$ son escalares. La tétrada no es única, una tétrada se convierte en otra mediante una transformación de Lorentz; en particular, $A_\mu A^\mu = \eta_{\alpha\beta} A^\alpha A^\beta$ es invariante.

Volviendo al problema de reducir la métrica a la forma de Minkowski en un punto P dado, definimos, para cada punto Q próximo a P

$$x^\mu_Q = x^\mu_P + e^\mu_\alpha(P) \xi^\alpha_Q + \dots \quad (4.9)$$

y por 4.6

$$g_{\alpha\beta} = \frac{\partial x^\mu}{\partial \xi^\alpha} \frac{\partial x^\nu}{\partial \xi^\beta} g_{\mu\nu} = \eta_{\alpha\beta} \quad (4.10)$$

Trabajando un poco más podemos lograr que las derivadas primeras de $g_{\mu\nu}$ se anulen en el punto P dado.

Supongamos que ya estamos trabajando con las coordenadas ξ^α y que en esas coordenadas el punto P es el origen. Hacemos un cambio de coordenadas a nuevas coordenadas ζ^α de la forma

$$\xi^\alpha = \zeta^\alpha - \frac{1}{2} C^\alpha_{\beta\gamma} \zeta^\beta \zeta^\gamma + \dots \quad (4.11)$$

Entonces $g_{\alpha\beta}(P) = \eta_{\alpha\beta}$ en ambos sistemas, y

$$\frac{\partial g'_{\alpha\beta}}{\partial \zeta^\gamma}(P) = \frac{\partial g_{\alpha\beta}}{\partial \xi^\gamma}(P) - C^\mu_{\alpha\gamma} g_{\mu\beta} - g_{\alpha\nu} C^\nu_{\beta\gamma} \quad (4.12)$$

$g'_{\alpha\beta,\gamma} = 0$ si

$$C_{\nu\rho}^{\mu} \equiv \Gamma_{\nu\rho}^{\mu} = \frac{1}{2}g^{\mu\lambda} \{g_{\nu\lambda,\rho} + g_{\rho\lambda,\nu} - g_{\nu\rho,\lambda}\} \quad (4.13)$$

Esta combinación de derivadas de la métrica va a volver a aparecer, se la llama la *conexión* (a veces se define un concepto más general de conexión, y en este caso se dice que 4.13 es la *conexión de Levi-Civita*). Decimos que el sistema de coordenadas ζ^{α} , donde la métrica tiene la forma de Minkowski y derivadas primeras nulas en el origen, es *localmente inercial* en P .

Por supuesto, si calculamos la conexión en un sistema localmente inercial, nos da cero en P . Como en otros sistemas no es cero, eso indica que *la conexión no es un tensor*. En general, si en un sistema de coordenadas x^{μ} la métrica es $g_{\mu\nu}$ y la conexión es $\Gamma_{\nu\rho}^{\mu}$, en otro sistema de coordenadas ξ^{α} tenemos

$$\begin{aligned} \Gamma_{\beta\gamma}^{\alpha} &= \frac{1}{2}g^{\alpha\delta} [g_{\delta\beta,\gamma} + g_{\delta\gamma,\beta} - g_{\beta\gamma,\delta}] \\ &= \frac{1}{2} \frac{\partial \xi^{\alpha}}{\partial x^{\mu}} g^{\mu\lambda} \frac{\partial \xi^{\delta}}{\partial x^{\lambda}} \left[\frac{\partial}{\partial \xi^{\gamma}} \left(\frac{\partial x^{\sigma}}{\partial \xi^{\delta}} \frac{\partial x^{\nu}}{\partial \xi^{\beta}} g_{\sigma\nu} \right) + \frac{\partial}{\partial \xi^{\beta}} \left(\frac{\partial x^{\sigma}}{\partial \xi^{\delta}} \frac{\partial x^{\rho}}{\partial \xi^{\gamma}} g_{\sigma\rho} \right) - \frac{\partial}{\partial \xi^{\delta}} \left(\frac{\partial x^{\nu}}{\partial \xi^{\beta}} \frac{\partial x^{\rho}}{\partial \xi^{\gamma}} g_{\nu\rho} \right) \right] \\ &= \frac{\partial \xi^{\alpha}}{\partial x^{\mu}} \frac{\partial x^{\nu}}{\partial \xi^{\beta}} \frac{\partial x^{\rho}}{\partial \xi^{\gamma}} \Gamma_{\nu\rho}^{\mu} + \frac{1}{2} \frac{\partial \xi^{\alpha}}{\partial x^{\mu}} g^{\mu\lambda} \frac{\partial \xi^{\delta}}{\partial x^{\lambda}} g_{\nu\rho} \left[\frac{\partial}{\partial \xi^{\gamma}} \left(\frac{\partial x^{\rho}}{\partial \xi^{\delta}} \frac{\partial x^{\nu}}{\partial \xi^{\beta}} \right) + \frac{\partial}{\partial \xi^{\beta}} \left(\frac{\partial x^{\nu}}{\partial \xi^{\delta}} \frac{\partial x^{\rho}}{\partial \xi^{\gamma}} \right) - \frac{\partial}{\partial \xi^{\delta}} \left(\frac{\partial x^{\nu}}{\partial \xi^{\beta}} \frac{\partial x^{\rho}}{\partial \xi^{\gamma}} \right) \right] \\ &= \frac{\partial \xi^{\alpha}}{\partial x^{\mu}} \frac{\partial x^{\nu}}{\partial \xi^{\beta}} \frac{\partial x^{\rho}}{\partial \xi^{\gamma}} \Gamma_{\nu\rho}^{\mu} + \frac{\partial \xi^{\alpha}}{\partial x^{\mu}} \frac{\partial^2 x^{\mu}}{\partial \xi^{\beta} \partial \xi^{\gamma}} \end{aligned} \quad (4.14)$$

Nótese que la conexión 4.13 es simétrica en el par (ρ, λ)

$$\Gamma_{\rho\lambda}^{\mu} = \Gamma_{\lambda\rho}^{\mu} \quad (4.15)$$

Las derivadas de la métrica se pueden expresar en términos de la conexión

$$g_{\mu\nu,\rho} = \Gamma_{\rho\mu}^{\lambda} g_{\lambda\nu} + \Gamma_{\rho\nu}^{\lambda} g_{\mu\lambda} \quad (4.16)$$

Recordemos que por la fórmula

$$\ln \det M = \text{tr} \ln M \quad (4.17)$$

para cualquier matriz M , tenemos

$$\frac{1}{g} g_{,\rho} = g^{\mu\nu} g_{\mu\nu,\rho} \quad (4.18)$$

y entonces por la fórmula 4.16

$$\Gamma_{\mu\rho}^{\mu} = \frac{1}{(-2g)} (-g_{,\rho}) = \frac{1}{2} \partial_{\rho} \ln (-g) \quad (4.19)$$

(agregamos los signos porque $g < 0$, para evitar un logaritmo complejo).

Ya hemos visto que mediante un cambio de coordenadas a un sistema localmente inercial es posible anular las derivadas de la métrica, y por lo tanto la conexión, en cualquier punto dado, pero ¿Podríamos matar igualmente las derivadas de la conexión?

Supongamos que ya tenemos un sistema de coordenadas ζ^{α} que es localmente inercial en el origen, y buscamos una transformación a nuevas coordenadas r^{μ} que también son localmente inerciales en el origen, pero donde además las derivadas de la conexión en el origen se anulan. Para preservar que ambos sistemas sean localmente inerciales, el cambio de coordenadas debe tener la forma

$$\zeta^{\alpha} = r^{\alpha} + \frac{1}{6} M_{\mu\nu\rho}^{\alpha} r^{\mu} r^{\nu} r^{\rho} + \dots \quad (4.20)$$

Como las derivadas segundas se anulan, la conexión se anula en el origen en ambos sistemas. Pero, derivando la regla de transformación 4.14 encontramos que

$$\Gamma_{\beta\gamma,\delta}^{(r)\alpha}(P) = \Gamma_{\beta\gamma,\delta}^{(\zeta)\alpha}(P) + \frac{\partial^3 \zeta^{\alpha}}{\partial r^{\beta} \partial r^{\gamma} \partial r^{\delta}}(P) \quad (4.21)$$

(en el lado izquierdo es la conexión evaluada en las coordenadas r^{α} , en el lado derecho la conexión está evaluada en el sistema original ζ^{α}). Queremos encontrar las derivadas terceras $\partial^3 \zeta^{\alpha} / \partial r^{\beta} \partial r^{\gamma} \partial r^{\delta}$ que hacen que $\Gamma_{\beta\gamma,\delta}^{(r)\alpha} = 0$. El

problema es que la derivada tercera es simétrica en (β, γ, δ) , pero la conexión sólo es simétrica en (β, γ) . Para poder matar las derivadas de la conexión es necesario que se anule la combinación antisimétrica $\Gamma_{\beta\delta, \gamma}^{\alpha} - \Gamma_{\beta\gamma, \delta}^{\alpha}$, de manera que las derivadas primeras de la conexión sean completamente simétricas.

Definimos el *tensor de Riemann* como el tensor cuyas componentes en un sistema localmente inercial son las diferencias

$$R_{\beta\gamma\delta}^{\alpha} = \Gamma_{\beta\delta, \gamma}^{\alpha} - \Gamma_{\beta\gamma, \delta}^{\alpha} \quad (4.22)$$

Y en un sistema general se obtiene usando que el tensor de Riemann es, efectivamente, un tensor (vamos a dar la fórmula explícita más adelante).

El tensor de Riemann obedece

$$\begin{aligned} R_{\alpha\beta\gamma\delta} &= R_{\gamma\delta\alpha\beta} = -R_{\alpha\beta\delta\gamma} \\ R_{\alpha\beta\gamma\delta} + R_{\alpha\gamma\delta\beta} + R_{\alpha\delta\beta\gamma} &= 0 \end{aligned} \quad (4.23)$$

Estas simetrías son fáciles de demostrar cuando las coordenadas son localmente inerciales, pero por su carácter tensorial valen en cualquier sistema de coordenadas. Debido a estas simetrías el tensor de Riemann tiene 20 componentes independientes (en vez de $4^4 = 256$).

4.2. Derivación Covariante

Las derivadas de las componentes de un vector respecto a las coordenadas NO definen un tensor. Efectivamente, si un vector tiene componentes A^{α} en las coordenadas ξ^{α} , entonces en las coordenadas x^{μ} tenemos

$$A^{\mu} = \frac{\partial x^{\mu}}{\partial \xi^{\alpha}} A^{\alpha} \quad (4.24)$$

y

$$\frac{\partial A^{\mu}}{\partial x^{\nu}} = \frac{\partial \xi^{\beta}}{\partial x^{\nu}} \frac{\partial}{\partial \xi^{\beta}} \left[\frac{\partial x^{\mu}}{\partial \xi^{\alpha}} A^{\alpha} \right] \quad (4.25)$$

que no es la manera en que debe transformarse un tensor. Por eso reemplazamos la derivación convencional por la *derivación covariante*. La *derivada covariante* $\nabla_{\nu} A^{\mu}$ o $A^{\mu}_{;\nu}$ es el *tensor* cuyas componentes son iguales a las derivadas ordinarias en un sistema localmente inercial. Es decir, si las ξ^{α} son un sistema localmente inercial en P , entonces

$$\nabla_{\nu} A^{\mu}(P) = \frac{\partial \xi^{\beta}}{\partial x^{\nu}} \frac{\partial x^{\mu}}{\partial \xi^{\alpha}} A^{\alpha}_{;\beta}(P) \quad (4.26)$$

Esta expresión se puede elaborar un poco más

$$\begin{aligned} \nabla_{\nu} A^{\mu}(P) &= \frac{\partial \xi^{\beta}}{\partial x^{\nu}} \frac{\partial x^{\mu}}{\partial \xi^{\alpha}} A^{\alpha}_{;\beta}(P) \\ &= \frac{\partial x^{\mu}}{\partial \xi^{\alpha}} \frac{\partial}{\partial x^{\nu}} A^{\alpha}(P) \\ &= \frac{\partial x^{\mu}}{\partial \xi^{\alpha}} \frac{\partial}{\partial x^{\nu}} \left[\frac{\partial \xi^{\alpha}}{\partial x^{\rho}} A^{\rho} \right](P) \\ &= A^{\mu}_{;\nu} + \frac{\partial x^{\mu}}{\partial \xi^{\alpha}} \frac{\partial^2 \xi^{\alpha}}{\partial x^{\nu} \partial x^{\rho}}(P) A^{\rho} \end{aligned} \quad (4.27)$$

Como la conexión se anula en P en las coordenadas ξ^{α} , reconocemos que en el segundo término se ha formado la conexión en las coordenadas x^{μ}

$$\nabla_{\nu} A^{\mu} = \partial_{\nu} A^{\mu} + \Gamma_{\nu\rho}^{\mu} A^{\rho} \quad (4.28)$$

Al escribir la derivada covariante de esta forma hemos eliminado toda referencia al sistema localmente inercial.

La derivación covariante se define para tensores arbitrarios pidiendo que la derivada covariante de un escalar coincida con la derivada ordinaria, y que valga la regla de Leibniz. Entonces, por ejemplo,

$$\nabla_{\rho}(A_{\mu}B^{\mu}) = A_{\mu,\rho}B^{\mu} + A_{\sigma}B_{,\rho}^{\sigma} \quad (4.29)$$

pero también

$$\nabla_{\rho}(A_{\mu}B^{\mu}) = (\nabla_{\rho}A_{\mu})B^{\mu} + A_{\sigma}(B_{,\rho}^{\sigma} + \Gamma_{\rho\mu}^{\sigma}B^{\mu}) \quad (4.30)$$

Por lo tanto

$$\nabla_{\rho}A_{\mu} = \frac{\partial A_{\mu}}{\partial x^{\rho}} - \Gamma_{\rho\mu}^{\lambda}A_{\lambda} \quad (4.31)$$

La derivada covariante de la métrica se obtiene transformando las derivadas ordinarias calculadas en el sistema localmente inercial, pero éstas son cero, de modo que

$$\nabla_{\rho}g_{\mu\nu} = 0 \quad (4.32)$$

de donde recuperamos la relación 4.16.

Nótese que esta definición vale solamente para las derivadas primeras, derivadas de orden superior deben calcularse iterativamente. Por ejemplo, para calcular $\nabla_{\mu}\nabla_{\nu}A^{\rho}$ usamos que $\nabla_{\nu}A^{\rho}$ es un tensor mixto; entonces

$$\nabla_{\mu}\nabla_{\nu}A^{\rho} = \partial_{\mu}(\nabla_{\nu}A^{\rho}) + \Gamma_{\mu\lambda}^{\rho}\nabla_{\nu}A^{\lambda} - \Gamma_{\mu\nu}^{\lambda}\nabla_{\lambda}A^{\rho} \quad (4.33)$$

y ahora sí podemos usar 4.28 para las derivadas primeras. En general, esta expresión no se reduce a las derivadas ordinarias segundas en un sistema localmente inercial (ni en ningún otro).

A diferencia de las derivadas ordinarias, las derivadas covariantes NO conmutan. En cambio vale la relación de conmutación

$$[\nabla_{\rho}\nabla_{\sigma} - \nabla_{\sigma}\nabla_{\rho}]A^{\mu} = R_{\nu\rho\sigma}^{\mu}A^{\nu} \quad (4.34)$$

Es notable que no haya derivadas en el lado derecho de esta ecuación. Como el lado izquierdo define un tensor, $R_{\nu\rho\sigma}^{\mu}$ también es un tensor, nuestro ya conocido *Tensor de Riemann* 4.22. Con esta ecuación es fácil leer las componentes de Riemann en un sistema de coordenadas cualquiera

$$R_{\nu\rho\sigma}^{\mu} = \Gamma_{\nu\sigma,\rho}^{\mu} - \Gamma_{\nu\rho,\sigma}^{\mu} + \Gamma_{\rho\lambda}^{\mu}\Gamma_{\nu\sigma}^{\lambda} - \Gamma_{\sigma\lambda}^{\mu}\Gamma_{\nu\rho}^{\lambda} \quad (4.35)$$

El tensor de Riemann, que ya había aparecido como el obstáculo que impide convertir un espacio-tiempo curvo en el espacio de Minkowski mediante un cambio de coordenadas, reaparece entonces como la medida de la no-conmutatividad de las derivadas covariantes, lo cual subraya la diferencia cualitativa entre las derivadas covariantes (que tienen carácter tensorial definido) y las ordinarias (que no lo tienen). No hemos agotado los motivos que hacen que el tensor de Riemann sea el objeto central en la relatividad general.

4.3. Geodésicas

Dada una curva $x^\mu(r)$ en \mathcal{M} , que empieza en el punto $P = x^\mu(r_i)$ y termina en el punto $Q = x^\mu(r_f)$, entonces el intervalo entre P y Q se define como

$$S = -mc \int_{r_i}^{r_f} dr \sqrt{-g_{\mu\nu} \frac{dx^\mu}{dr} \frac{dx^\nu}{dr}} \quad (4.36)$$

Una geodésica entre P y Q , si existe, es un extremo de S (nótese que S no depende de la parametrización particular que se use para calcularlo).

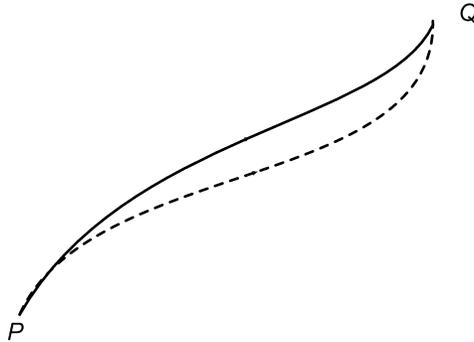


Figura 4.2: La geodésica entre dos puntos P y Q es la curva extremal del tiempo propio 4.36.

Resolviendo el problema variacional, encontramos la forma de la ecuación geodésica

$$\frac{d}{ds} \left[g_{\mu\nu} \frac{dx^\nu}{ds} \right] = \frac{1}{2} g_{\rho\nu,\mu} \frac{dx^\rho}{ds} \frac{dx^\nu}{ds} \quad (4.37)$$

Introduciendo la *tetravelocidad*

$$u^\mu = \frac{dx^\mu}{ds} \quad (4.38)$$

Entonces

$$\frac{d}{ds} = u^\lambda \frac{\partial}{\partial x^\lambda} \quad (4.39)$$

y recordando la forma de la conexión obtenemos la ecuación geodésica como

$$u^\lambda \nabla_\lambda u^\mu = 0 \quad (4.40)$$

La tetravelocidad es un vector (a diferencia de la velocidad ordinaria $v^i = dx^i/dt$). Las componentes u^μ son adimensionales, y por definición $u_\mu u^\mu = -1$.

A partir de la forma (4.36) de la acción podemos definir los impulsos

$$p^\mu = mc u^\mu \quad (4.41)$$

Por la normalización de la tetravelocidad $p_\mu p^\mu = -m^2 c^2$. Se identifica $E = cp^0$ como la energía de la partícula y p^i como el impulso. Por lo tanto, en un sistema en que $g_{\mu\nu}$ es localmente la métrica de Minkowski, obtenemos la fórmula de Einstein

$$E^2 = m^2 c^4 + c^2 p^2 \quad (4.42)$$

4.3.1. La ecuación de desviación geodésica

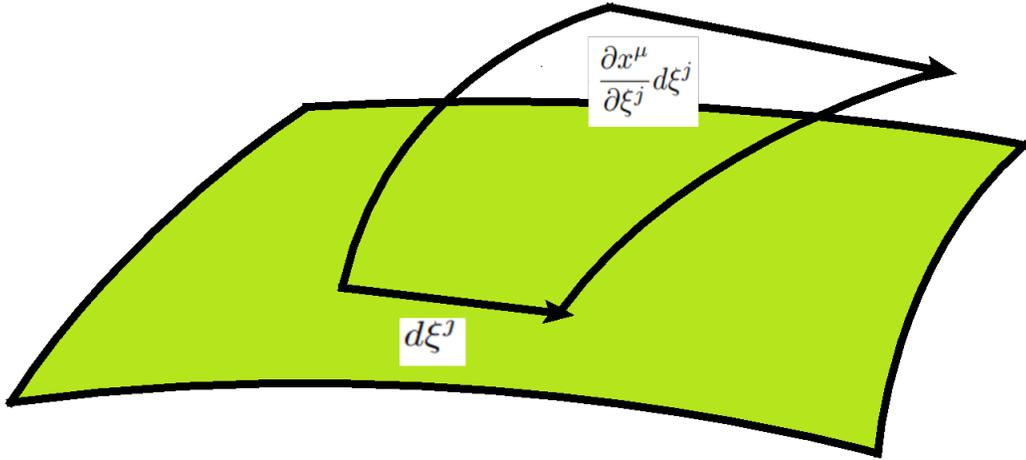


Figura 4.3: Buscamos la condición para que una curva próxima a una geodésica dada también sea una geodésica.

Supongamos que tenemos un sistema de coordenadas x^μ tales que la superficie $t = 0$ está parametrizada por coordenadas ξ^j . Consideramos el flujo de las geodésicas que emergen de esta superficie. Esto quiere decir que cada punto P queda identificado por a) el valor de las coordenadas ξ^j del punto en el que comienza la geodésica que pasa por P , y b) el tiempo propio s entre $t = 0$ y P a lo largo de esa geodésica. En otras palabras, las coordenadas x^μ de P se pueden pensar como funciones de s y ξ^j , de modo que $x^\mu(s, \xi^j)$ describe una geodésica mientras ξ^j permanece constante. Dicho de otra manera, las ξ^j son coordenadas Lagrangianas para el flujo geodésico.

En cada punto tenemos una tetravelocidad

$$u^\mu = \left. \frac{\partial x^\mu}{\partial s} \right|_{\xi^j} \quad (4.43)$$

y vale la ecuación geodésica

$$\frac{\partial^2 x^\mu}{\partial s^2} + \Gamma_{\nu\rho}^\mu u^\nu u^\rho = 0 \quad (4.44)$$

Como tenemos una ecuación de éstas para cada ξ^j , la derivada respecto de ξ^j se anula

$$\frac{\partial^2}{\partial s^2} \frac{\partial x^\mu}{\partial \xi^j} + \Gamma_{\nu\sigma\rho}^\mu \frac{\partial x^\rho}{\partial \xi^j} u^\nu u^\sigma + 2\Gamma_{\nu\rho}^\mu u^\nu \frac{\partial^2 x^\rho}{\partial s \partial \xi^j} = 0 \quad (4.45)$$

La idea es simplificar sistemáticamente esta ecuación usando que a) $\partial x^\mu / \partial \xi^j$ es un vector, ya que ante un cambio de coordenadas

$$\frac{\partial x'^{\mu'}}{\partial \xi^j} = \frac{\partial x'^{\mu'}}{\partial x^\mu} \frac{\partial x^\mu}{\partial \xi^j} \quad (4.46)$$

y b) que si A^μ es un vector, entonces

$$\frac{\partial A^\mu}{\partial s} = u^\nu A_{;\nu}^\mu = u^\nu A_{;\nu}^\mu - u^\nu \Gamma_{\nu\rho}^\mu A^\rho \quad (4.47)$$

El resultado final es que

$$u^\nu u^\rho \left[\nabla_\nu \nabla_\rho \frac{\partial x^\mu}{\partial \xi^j} + R_{\nu\sigma\rho}^\mu \frac{\partial x^\sigma}{\partial \xi^j} \right] = 0 \quad (4.48)$$

Esta es la *ecuación de desviación geodésica*, y describe la aceleración relativa de dos geodésicas vecinas.

A esta altura podemos tomar simplemente (s, ξ^j) como coordenadas. Nótese que

$$dx^\mu = u^\mu ds + \frac{\partial x^\mu}{\partial \xi^j} d\xi^j \quad (4.49)$$

Por lo tanto en las nuevas coordenadas el intervalo se reduce a

$$-ds^2 + 2u_\mu \frac{\partial x^\mu}{\partial \xi^j} d\xi^j ds + g_{\mu\nu} \frac{\partial x^\mu}{\partial \xi^j} \frac{\partial x^\nu}{\partial \xi^k} d\xi^j d\xi^k \quad (4.50)$$

Pero se deduce de la ecuación geodésica que, si inicialmente $u_\mu x^\mu_{;j}$ y $(u_\mu x^\mu_{;j})_{,s}$ se anulan, entonces $u_\mu x^\mu_{;j}$ permanece idénticamente cero. Entonces el intervalo toma la forma

$$-ds^2 + g_{jk} d\xi^j d\xi^k \quad (4.51)$$

Un referencial donde el intervalo toma esta forma se dice *síncrono*.

Más generalmente, podemos reparametrizar el tiempo haciendo $s = s(\tau)$, Entonces el intervalo

$$-N^2 d\tau^2 + g_{jk} d\xi^j d\xi^k \quad (4.52)$$

donde $N = ds/d\tau$ se llama el *lapse*. Nótese que la normal a las superficies $\tau = \text{constante}$ es

$$n^\mu = \frac{1}{N} (1, 0, 0, 0) \quad (4.53)$$

en forma covariante

$$n_\mu = (-N, 0, 0, 0) \quad (4.54)$$

de modo que $n_\mu n^\mu = -1$

4.4. El Teorema de Gauss

Como en la formulación matemática del electromagnetismo, el Teorema de Gauss juega un rol central en la formulación de la relatividad general.

Empecemos analizando la divergencia covariante de un vector contravariante

$$\nabla_\mu A^\mu = A^\mu_{;\mu} + \Gamma^\mu_{\rho\mu} A^\rho \quad (4.55)$$

Por la definición de la conexión tenemos que

$$\Gamma^\mu_{\rho\mu} = \frac{1}{2} \frac{g_{,\rho}}{g} = \frac{1}{\sqrt{-g}} \frac{\partial}{\partial x^\rho} \sqrt{-g} \quad (4.56)$$

de modo que podemos escribir

$$\nabla_\mu A^\mu = \frac{1}{\sqrt{-g}} \frac{\partial}{\partial x^\rho} [\sqrt{-g} A^\rho] \quad (4.57)$$

El signo menos se pone porque sabemos que g es un número real negativo.

Ahora analizamos el elemento de volumen. Definimos que en un sistema localmente inercial con coordenadas ξ^α el elemento de volumen es $dv = d^4\xi = d\xi^0 d\xi^1 d\xi^2 d\xi^3$. En un sistema de coordenadas arbitrario x^μ , el elemento de volumen es definido por la fórmula de cambio de variables

$$dv = d^4\xi = \left| \det \frac{\partial \xi^\alpha}{\partial x^\mu} \right| d^4x \quad (4.58)$$

Para evitar tener que resolver el cambio de variables al sistema inercial cada vez, observamos que

$$g_{\mu\nu} = \frac{\partial \xi^\alpha}{\partial x^\mu} \frac{\partial \xi^\beta}{\partial x^\nu} \eta_{\alpha\beta} \quad (4.59)$$

Tomando determinante a ambos miembros encontramos que

$$g = - \left(\det \frac{\partial \xi^\alpha}{\partial x^\mu} \right)^2 \quad (4.60)$$

de manera que el elemnto de volumen resulta

$$dv = \sqrt{-g} d^4x \quad (4.61)$$

Esto define una medida de integración que es invariante frente a cambios de coordenadas.

El teorema de Gauss es un enunciado acerca de integrales del tipo

$$I = \int_V dv \nabla_\mu A^\mu \quad (4.62)$$

sobre regiones del espacio tiempo. Como hemos visto, esto se reduce a

$$I = \int d^4x \frac{\partial}{\partial x^\rho} [\sqrt{-g} A^\rho] \quad (4.63)$$

a la que es posible aplicar el Teorema de Gauss habitual.

Por ejemplo, consideremos el caso en que tenemos un sistema de coordenadas con un intervalo del tipo 4.52 y V es el volumen comprendido entre las hipersuperficies $x^0 = ct_-$ y $x^0 = ct_+$.

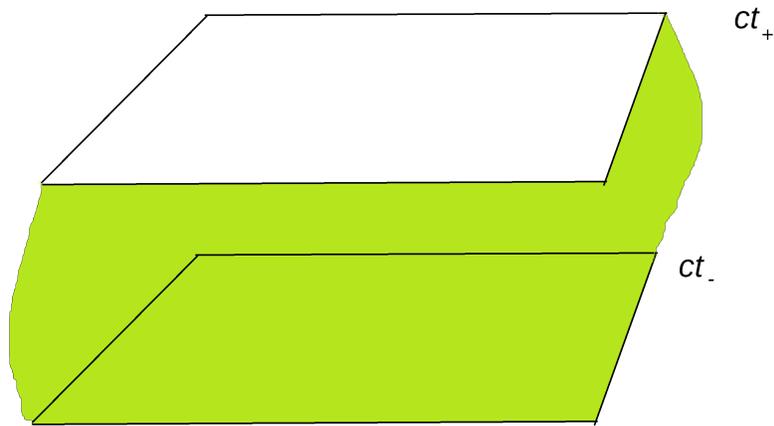


Figura 4.4: Un volumen cuyo borde son superficies espaciales.

Aplicando el teorema de Gauss habitual en 4.63 obtenemos

$$I = \int d^3x [[\sqrt{-g}A^0] (ct_+, x^1, x^2, x^3) - (ct_+ \leftrightarrow ct_-)] \quad (4.64)$$

Ahora,

$$\sqrt{-g} = \sqrt{\det g_{jk}} N \quad (4.65)$$

donde N es el lapse. Reconocemos que $d^3x \sqrt{\det g_{jk}}$ es la medida de integración invariante sobre cada hipersuperficie, mientras que por su lado $NA^0 = -n_\mu A^\mu$ donde n^μ es la normal a cada hipersuperficie. El signo menos aparece porque la normal es un vector temporal.

Resumiendo, la expresión del Teorema de Gauss, válida para cualquier volumen, es

$$I = \int_V dv \nabla_\mu A^\mu = \int_{\partial V} dS \varepsilon (n_\mu A^\mu) \quad (4.66)$$

donde

$$\varepsilon = n_\mu n^\mu \quad (4.67)$$

y $dS = d^3x \sqrt{\det g_{jk}}$ es la medida de integración invariante, con g_{jk} la métrica inducida sobre la superficie.

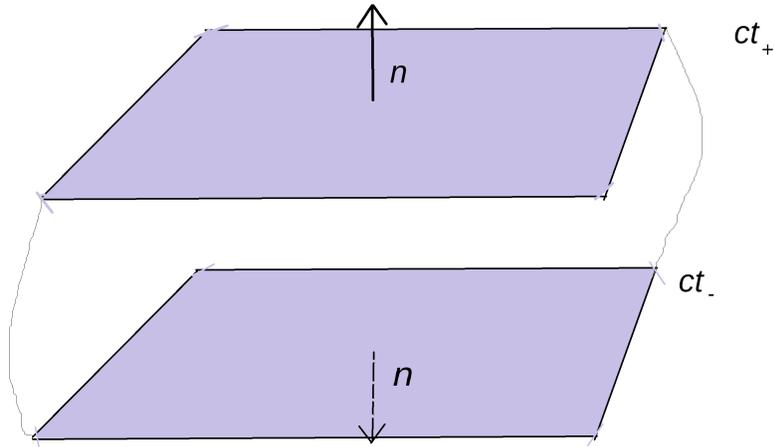


Figura 4.5: El teorema de Gauss relativista requiere incluir un signo “-” cuando la normal a la superficie es temporal.

4.4.1. Leyes de conservación relativistas

La idea básica en la forma en que se describe la dinámica de la materia en relatividad general es que la misma se expresa mediante una serie de leyes de conservación.

En física no relativista, una ley de conservación para una cantidad extensiva Q (número de partículas, carga eléctrica) se expresa como

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla \cdot \mathbf{j} = 0 \quad (4.68)$$

donde ρ es la densidad y \mathbf{j} el flujo. Dividiendo por c esto toma la forma

$$\frac{\partial J^\mu}{\partial x^\mu} = 0 \quad (4.69)$$

donde $J^\mu = (\rho, \mathbf{j}/c)$ es la tetracorriente. Para que esta expresión sea invariante Lorentz J^μ debe ser un vector.

El paso a relatividad general se obtiene asumiendo que la expresión relativista 4.69 sigue valiendo en un sistema localmente inercial. Entonces en un sistema arbitrario

$$\nabla_\mu J^\mu = 0 \quad (4.70)$$

Nótese que la densidad y flujo no relativistas son integrados en un único objeto con una naturaleza vectorial definida. En general

$$J^\mu = (\text{densidad}, \text{flujo}/c) \quad (4.71)$$

La densidad de la cantidad Q tiene unidades de $[Q]/L^3$, mientras que el flujo tiene unidades de $[Q]/L^2T$, por lo cual todas las componentes de la tetracorriente tienen las mismas unidades.

Consideremos nuevamente un sistema de coordenadas del tipo 4.52. Si la cantidad Q se conserva, la variación de la cantidad Q contenida en un volumen tridimensional $V^{(3)}$ entre dos instantes sucesivos t_- y t_+ se debe al flujo de la cantidad Q a través del borde de $V^{(3)}$, es decir

$$Q(t_+) - Q(t_-) = - \int_{t_-}^{t_+} dt \int_{\partial V^{(3)}} dS (\mathbf{n} \cdot \mathbf{j}) \quad (4.72)$$

donde \mathbf{n} es la normal ordinaria y \mathbf{j} es la corriente ordinaria.

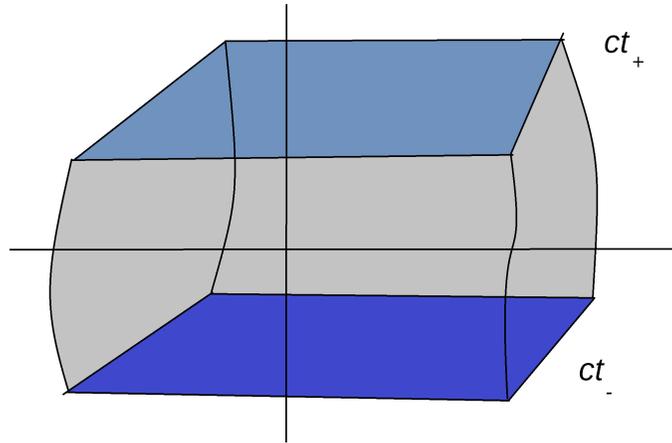


Figura 4.6: Si la cantidad Q se conserva, la variación de Q entre dos instantes sucesivos t_- y t_+ se debe al flujo de la cantidad Q a través del borde de $V^{(3)}$.

Agrupando, vemos que esto se puede escribir como

$$Q(t_+) - Q(t_-) = - \int_{[x_-^0, x_+^0] \times \partial V^{(3)}} dS (n_\mu J^\mu) \quad (4.73)$$

donde las componentes espaciales de la corriente $J^i = \mathbf{j}^i/c$, que tiene unidades de densidad. Por otro lado, aplicando el Teorema de Gauss a la identidad obvia

$$\int_{[t_-, t_+] \times V^{(3)}} dv \nabla_\mu J^\mu = 0 \quad (4.74)$$

Vemos que podemos identificar

$$Q(t) = \int_{V^{(3)}} dS (-n_\mu A^\mu) \quad (4.75)$$

Es decir, la cantidad de Q en un volumen tridimensional es el *flujo* de la tetracorriente a través de ese volumen. J^0 representa la densidad de la magnitud extensiva en cuestión vista por un observador en reposo.

Para saber la densidad de energía vista por un observador con velocidad v (digamos, en la dirección x) debemos hacer una transformación de Lorentz local al referencial en que éste observador está en reposo. Usando que un vector contravariante se transforma igual que las coordenadas encontramos que para el nuevo observador

$$J'^0 = \frac{J^0 - (v/c) J^1}{\sqrt{1 - (v/c)^2}} \quad (4.76)$$

Resulta claro que

$$J'^0 = -u_\mu J^\mu \quad (4.77)$$

El caso de la energía es especial porque ya en relatividad restringida la energía y el impulso se conectan en una única cantidad de naturaleza vectorial, con $p^\mu = (E, c\vec{p})$. Por lo tanto, su tetracorriente corresponde en realidad a un tensor dos veces contravariante $T^{\mu\nu}$, donde asociamos T^{00} con la densidad ordinaria de energía, T^{0i} con el flujo de energía dividido por c , T^{i0} con la densidad de impulso por c , y T^{ij} con el flujo de impulso.

$$T^{\mu\nu} = \begin{pmatrix} \text{densidad de energía} & \text{flujo de energía}/c \\ c \times \text{densidad de impulso} & \text{flujo de impulso} \end{pmatrix} \quad (4.78)$$

Los factores de c hacen que las unidades sean consistentes.

La corriente de energía - impulso vista por un observador con tetravelocidad u^μ es $-T^{\mu\nu}u_\nu$.

Capítulo 5

Fluidos ideales

Nuestro objetivo es mostrar que las ecuaciones de movimiento de un fluido ideal no relativista (es decir, uno que fluye sin creación de entropía) se puede describir en términos de un sistema de leyes de conservación, y encontrar las relaciones constitutivas correspondientes. Las leyes de conservación relevantes son a) la conservación de la energía

$$\rho_{,t} = -\partial_j J_U^j \quad (5.1)$$

b) la conservación del número de partículas

$$n_{,t} = -\partial_j J_N^j \quad (5.2)$$

y c) la conservación del impulso

$$p^k_{,t} = -\partial_j T^{kj} \quad (5.3)$$

Vamos a asumir la forma de la corriente de partículas

$$J_N^j = nv^j \quad (5.4)$$

y de la densidad de impulso

$$p^k = nmv^k \quad (5.5)$$

queremos deducir la forma de la corriente de energía y del tensor de esfuerzos.

Nuestro punto de partida es la Primera ley, escrita como

$$TdS = dU + pdV - \mu DN - v_j dP^j \quad (5.6)$$

Por homogeneidad debe ser

$$TS = U + pV - \mu n - v_j P^j \quad (5.7)$$

Dividiendo por el volumen encontramos una identidad para las densidades

$$Ts = \rho + p - \mu n - v_j p^j \quad (5.8)$$

Mientras que la primera ley se convierte en

$$Tds = d\rho - \mu dn - v_j dp^j \quad (5.9)$$

De las últimas dos ecuaciones encontramos la identidad de Gibbs-Duhem

$$sdT = dp - nd\mu - p_j dv^j \quad (5.10)$$

Para un fluido ideal, la entropía se conserva

$$s_{,t} = -\partial_j J_S^j \quad (5.11)$$

Pero por la primera ley

$$\begin{aligned}
Ts_{,t} &= \rho_{,t} - \mu n_{,t} - v_k p_{,t}^k \\
&= -\partial_j J_U^j + \mu \partial_j J_N^j + v_k \partial_j T^{kj}
\end{aligned} \tag{5.12}$$

Dividiendo por la temperatura encontramos

$$\begin{aligned}
s_{,t} &= \partial_j \left[-\frac{1}{T} J_U^j + \frac{\mu}{T} J_N^j + \frac{v_k}{T} T^{kj} \right] \\
&+ J_U^j \partial_j \left(\frac{1}{T} \right) - J_N^j \partial_j \left(\frac{\mu}{T} \right) - T^{kj} \partial_j \left(\frac{v_k}{T} \right) \\
&= \partial_j \left[-\frac{1}{T} J_U^j + \frac{\mu}{T} J_N^j + \frac{v_k}{T} T^{kj} \right] \\
&+ \frac{1}{T^2} (\partial_j T) \left[-J_U^j + \mu J_N^j + v_k T^{kj} \right] - \frac{1}{T} T^{kj} v_{k,j} - \frac{1}{T} J_N^j \partial_j \mu
\end{aligned} \tag{5.13}$$

ahora

$$\begin{aligned}
\frac{1}{T} J_N^j \partial_j \mu &= \frac{1}{T} v^j n \partial_j \mu = \frac{1}{T} v^j [\partial_j p - s \partial_j T - p^k v_{k,j}] \\
&= \partial_j \left[\frac{1}{T} v^j p \right] + \frac{1}{T^2} p v^j T_{,j} - \frac{1}{T} v_{,j}^j p - \frac{1}{T^2} (Ts) v^j \partial_j T - \frac{1}{T} v^j p^k v_{k,j}
\end{aligned} \tag{5.14}$$

De modo que ahora

$$\begin{aligned}
s_{,t} &= \partial_j \left[-\frac{1}{T} J_U^j + \frac{\mu}{T} J_N^j + \frac{v_k}{T} T^{kj} - \frac{1}{T} v^j p \right] \\
&+ \frac{1}{T^2} (\partial_j T) \left[-J_U^j + \mu J_N^j + v_k T^{kj} - p v^j + (Ts) v^j \right] - \frac{1}{T} [T^{kj} - p \delta^{kj} - v^j p^k] v_{k,j}
\end{aligned} \tag{5.15}$$

Como el segundo renglón debe anularse, deducimos que

$$T^{kj} = p \delta^{kj} + v^j p^k \tag{5.16}$$

y entonces

$$\begin{aligned}
s_{,t} &= \partial_j \left[-\frac{1}{T} J_U^j + \frac{\mu}{T} J_N^j + \frac{v_k}{T} v^j p^k \right] \\
&+ \frac{1}{T^2} (\partial_j T) \left[-J_U^j + \mu J_N^j + v_k v^j p^k + (Ts) v^j \right]
\end{aligned} \tag{5.17}$$

Para terminar, ponemos

$$J_U^j = (\rho + p) v^j \tag{5.18}$$

De paso, encontramos la expresión para la corriente de entropía,

$$J_S^j = s v^j \tag{5.19}$$

Las ecuaciones de movimiento resultan

$$\begin{aligned}
n_{,t} + \partial_j (n v^j) &= 0 \\
\rho_{,t} + \partial_j (\rho v^j) &= -p v_{,j}^j - v^j p_{,j} \\
v_{j,t} + v^k v_{j,k} &= \frac{-1}{mn} p_{,j}
\end{aligned} \tag{5.20}$$

5.1. Fluidos ideales relativistas

La teoría de los fluidos ideales relativistas se basa en las leyes de conservación para el número de partículas

$$J_{N;\mu}^{\mu} = 0 \quad (5.21)$$

y para la energía-impulso

$$T_{;\nu}^{\mu\nu} = 0 \quad (5.22)$$

En términos de densidades y corrientes tridimensionales, tenemos que

$$\begin{aligned} J^0 &= n, & J^j &= \frac{1}{c} J_N^j \\ T^{00} &= \rho, & T^{0j} &= \frac{1}{c} J_U^j \\ T^{j0} &= cp^j; & T^{ij} &= \text{flujo de impulso} \end{aligned} \quad (5.23)$$

Además, tenemos la tetravelocidad

$$u^{\mu} = \frac{\left(1, \frac{v^j}{c}\right)}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} \quad (5.24)$$

Para obtener las relaciones constitutivas relativistas, pedimos que las corrientes relativistas se reduzcan a las no relativistas en el referencial localmente inercial en el que el fluido está instantáneamente en reposo, es decir $u^{\mu} = (1, 0)$. Nótese que debemos considerar a la energía en reposo de las partículas, de modo que en este referencial $\rho = nmc^2 + u$. Entonces, en el referencial en reposo

$$\begin{aligned} J^0 &= n, & J^j &= 0 \\ T^{00} &= \rho, & T^{0j} &= 0 \\ T^{j0} &= 0; & T^{ij} &= p\delta^{ij} \end{aligned} \quad (5.25)$$

Eso determina las corrientes en cualquier referencial

$$\begin{aligned} J_N^{\mu} &= nu^{\mu} \\ T^{\mu\nu} &= \rho u^{\mu} u^{\nu} + p(g^{\mu\nu} + u^{\mu} u^{\nu}) \end{aligned} \quad (5.26)$$

Observamos que $\Delta_{\nu}^{\mu} = \delta_{\nu}^{\mu} + u^{\mu} u_{\nu}$ obedece $\Delta_{\rho}^{\mu} \Delta_{\nu}^{\rho} = \Delta_{\nu}^{\mu}$, por lo cual puede considerarse un proyector, y $\Delta_{\nu}^{\mu} u^{\nu} = 0$, es decir que proyecta sobre la hipersuperficie ortogonal a la tetravelocidad.

Nótese que el tensor de energía-impulso es simétrico. En particular, para pequeñas velocidades encontramos

$$p^k = \frac{1}{c^2} (\rho + p) v^k \quad (5.27)$$

que efectivamente coincide con el límite no relativista porque ρ está dominada por la energía en reposo.

Es interesante escribir las ecuaciones de conservación de la energía-impulso

$$(\rho + p)_{;\nu} u^{\mu} u^{\nu} + (\rho + p) u_{;\nu}^{\mu} u^{\nu} + (\rho + p) u^{\mu} u_{;\nu}^{\nu} + p^{;\nu} = 0 \quad (5.28)$$

Proyectando en la dirección de u^{μ} y en la dirección ortogonal encontramos

$$\begin{aligned} \rho_{;\nu} u^{\nu} + (\rho + p) u_{;\nu}^{\nu} &= 0 \\ (\rho + p) u_{;\nu}^{\mu} u^{\nu} + (g^{\mu\nu} + u^{\mu} u^{\nu}) p_{;\nu} &= 0 \end{aligned} \quad (5.29)$$

Nótese que en la teoría relativista la presión contribuye a la inercia. También que las trayectorias de los elementos de fluido no son geodésicas, lo cual es natural ya que no son partículas libres, sino que están sujetas a las fuerzas de presión.

5.2. Acerca de la simetría de $T^{\mu\nu}$

La forma del tensor de energía impulso que hemos deducido para el fluido ideal es simétrica. Eso es importante en relatividad general porque más adelante vamos a querer escribir las ecuaciones de Einstein

$$G^{\mu\nu} = \frac{8\pi G}{c^4} T^{\mu\nu} \quad (5.30)$$

y el tensor de Einstein en el lado izquierdo es simétrico por definición. Sin embargo, cuando pensamos que T^{0j} representa una corriente de energía mientras que T^{j0} representa una densidad de impulso no es obvio que éstas sean idénticas para *todo* sistema físico.

El libro de fluidos de Batchelor tiene un argumento a favor de la simetría del tensor de esfuerzos no relativista T^{jk} (ver la sección 1.3). Esencialmente dice que asociada a la densidad impulso p^j y su flujo T^{jk} es posible definir una densidad de momento angular

$$L^{jk} = x^j p^k - x^k p^j \quad (5.31)$$

con un flujo dado por el torque de las fuerzas

$$L^{jkl} = x^j T^{kl} - x^k T^{jl} \quad (5.32)$$

de manera que la ley de conservación

$$\partial_t L^{jk} + \partial_l L^{jkl} = 0 \quad (5.33)$$

implica que

$$T^{jk} - T^{kj} = 0 \quad (5.34)$$

Este argumento se puede trasladar a relatividad restringida definiendo un tensor de momento angular

$$L^{\mu\nu\rho} = x^\mu T^{\nu\rho} - x^\nu T^{\mu\rho} \quad (5.35)$$

de tal manera que

$$L^{\mu\nu\rho}_{,\rho} = 0 \Rightarrow T^{\nu\mu} = T^{\mu\nu} \quad (5.36)$$

El argumento tiene un *loophole*, porque lo que se conserva no es el impulso angular “orbital” $L^{\mu\nu\rho}$ sino el momento angular total

$$J^{\mu\nu\rho} = L^{\mu\nu\rho} + S^{\mu\nu\rho} \quad (5.37)$$

donde $S^{\mu\nu\rho}$ es el flujo del spin, de manera que

$$J^{\mu\nu\rho}_{,\rho} = 0 \Rightarrow T^{\nu\mu} - T^{\mu\nu} = -S^{\mu\nu\rho}_{,\rho} \quad (5.38)$$

En otras palabras, cuando las partículas del fluido tienen spin, cabe esperar que $T^{\mu\nu}$ *no* sea simétrico.

La próxima clase vamos a ver como salimos de este lío.

5.3. El Teorema de Noether

Dada la importancia de las leyes de conservación, es importante contar con maneras sistemáticas de encontrar las leyes de conservación que se aplican a un sistema dado. Cuando la dinámica admite una formulación variacional, la manera más potente de encontrar leyes de conservación es mediante el *Teorema de Noether*.

Supongamos una partícula cuya dinámica se deduce de una acción

$$S = \int dt L [q, \dot{q}] \quad (5.39)$$

y que existe una transformación $q \rightarrow q' = q + \delta q$ tal que deja invariante la acción. Eso quiere decir que el Lagrangiano se transforma en una derivada total

$$L \rightarrow L' = L + \frac{dQ}{dt} \quad (5.40)$$

Pero tambien

$$L \rightarrow L' = L + \frac{\partial L}{\partial q} \delta q + \frac{\partial L}{\partial \dot{q}} \delta \dot{q} \quad (5.41)$$

Si

$$\delta \dot{q} = \frac{d}{dt} \delta q \quad (5.42)$$

Entonces

$$L' = L + \frac{d}{dt} \left[\delta q \frac{\partial L}{\partial \dot{q}} \right] + \delta q \left\{ \frac{\partial L}{\partial q} - \frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}} \right\} \quad (5.43)$$

El último corchete se anula porque q , que es un extremo de la acción, cumple con las ecuaciones de movimiento. Comparando las dos maneras de calcular δL obtenemos

$$\frac{d}{dt} \left[\delta q \frac{\partial L}{\partial \dot{q}} - Q \right] = 0 \quad (5.44)$$

que es la ley de conservación que estamos buscando.

Por ejemplo, consideremos la acción para la partícula relativista

$$S = -mc \int d\tau \sqrt{-\eta_{\mu\nu} \frac{\partial x^\mu}{\partial \tau} \frac{\partial x^\nu}{\partial \tau}} \quad (5.45)$$

La acción es invariante ante una traslación rígida

$$x^\mu \rightarrow x^\mu + \xi^\mu, \quad \xi^\mu = \text{constante} \quad (5.46)$$

En este caso $\delta L = 0$ y finalmente

$$\frac{d}{ds} [\xi^\mu p_\mu] = 0 \quad (5.47)$$

que como los ξ^μ son arbitrarios implica la conservación del impulso.

La partícula relativista también es invariante frente a transformaciones de Lorentz. Una transformación de Lorentz infinitesimal se escribe como

$$x^\mu \rightarrow x'^\mu = x^\mu + \epsilon^\mu_\nu x^\nu \quad (5.48)$$

con

$$\epsilon_{\mu\nu} = -\epsilon_{\nu\mu} \quad (5.49)$$

Como el Lagrangiano no depende de las coordenadas, nuevamente $\delta L = 0$ y obtenemos

$$\frac{d}{ds} [\epsilon_{\mu\nu} x^\nu p^\mu] = 0 \quad (5.50)$$

que es la generalización relativista del momento angular.

El Teorema de Noether se generaliza a teorías de campos. Ahora el sistema se describe por variables $\varphi^a(x)$, que tomamos simplemente como un número enorme de coordenadas generalizadas. La acción

$$S = \int d^4x L[\varphi^a(x), \varphi^a_{,\mu}(x)] \quad (5.51)$$

y las ecuaciones de Euler-Lagrange

$$\partial_\mu \frac{\partial L}{\partial \varphi^a_{,\mu}} - \frac{\partial L}{\partial \varphi^a} = 0 \quad (5.52)$$

Supongamos que los campos se transforman como escalares. Ante una traslación rígida, tenemos

$$\varphi^a(x^\mu) \rightarrow \varphi^a(x^\mu + \xi^\mu) = \varphi^a(x^\mu) + \xi^\mu \varphi^a_{,\mu}(x) \quad (5.53)$$

La densidad Lagrangiana L también se transforma como un escalar

$$L(x^\mu) \rightarrow L(x^\mu + \xi^\mu) = L(x^\mu) + \xi^\mu L_{,\mu}(x) \quad (5.54)$$

de modo que finalmente

$$\xi^\mu \partial_\nu \left[\varphi^a_{,\mu} \frac{\partial L}{\partial \varphi^a_{,\nu}} - \delta^\nu_\mu L \right] = 0 \quad (5.55)$$

Lo que nos permite identificar un tensor conservado

$$T_{can}^{\mu\nu} = -\varphi^a_{,\mu} \frac{\partial L}{\partial \varphi^a_{,\nu}} + \eta^{\mu\nu} L \quad (5.56)$$

que es el tensor de energía-impulso *canónico*. Por ejemplo, para un campo de Klein-Gordon

$$L = \frac{-1}{2} [\eta^{\mu\nu} \phi_{,\mu} \phi_{,\nu} + m^2 \phi^2] \quad (5.57)$$

y

$$T_{KG,can}^{\mu\nu} = \phi^{,\mu} \phi^{,\nu} - \frac{1}{2} \eta^{\mu\nu} [\eta^{\rho\sigma} \phi_{,\rho} \phi_{,\sigma} + m^2 \phi^2] \quad (5.58)$$

que es simétrico.

Para el campo de Maxwell las variables de campo son las componentes del tetrapotencial A_μ y el Lagrangiano es

$$L = \frac{-1}{4} F^{\mu\nu} F_{\mu\nu} \quad (5.59)$$

donde

$$F_{\mu\nu} = \partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu = \begin{pmatrix} 0 & -E_k \\ E_j & \epsilon_{jkl} B^l \end{pmatrix} \quad (5.60)$$

Ahora

$$T_{Maxwell,can}^{\mu\nu} = -A_{\rho,\mu} \frac{\partial L}{\partial A_{\rho,\nu}} + \eta^{\mu\nu} L = -A_{\rho,\mu} F^{\rho\nu} - \frac{1}{4} \eta^{\mu\nu} F^{\rho\sigma} F_{\rho\sigma} \quad (5.61)$$

Cuando se cumplen las ecuaciones de Maxwell $F_{,\nu}^{\mu\nu} = 0$, $T_{Maxwell,can}^{\mu\nu}$ es un tensor conservado

$$T_{Maxwell,can,\nu}^{\mu\nu} = -\eta^{\mu\nu} \left[A_{\rho,\sigma\mu} F^{\rho\sigma} + \frac{1}{2} F^{\rho\sigma} F_{\rho\sigma,\nu} \right] = 0 \quad (5.62)$$

pero no es simétrico en general.

Para entender lo que está pasando tenemos que ver cual es la ley de conservación asociada a la invarianza frente a transformaciones de Lorentz. Ahora vamos a tener que

$$\delta \phi^a = \epsilon^\mu_\nu x^\nu \phi^a_{,\mu} + \epsilon_{\mu\nu} \Lambda^{\mu\nu} \phi^a \quad (5.63)$$

$\Lambda^{\mu\nu}|_b^a$ es el elemento (a, b) de la matriz $\Lambda^{\mu\nu}$. Estas matrices son los generadores de transformaciones de Lorentz infinitesimales correspondientes a la representación del grupo de Lorentz a la que pertenece el multiplete de campos ϕ^a . Por ejemplo, para un campo escalar $\Lambda^{\mu\nu} = 0$, para el campo de Maxwell

$$\delta A_\mu = \epsilon_\nu^\rho A_{\mu,\rho} + \epsilon_\mu^\rho A_\rho \quad (5.64)$$

El teorema de Noether conduce a la ley de conservación

$$\partial_\rho J^{\mu\nu\rho} = 0 \quad (5.65)$$

donde

$$\epsilon_{\mu\nu} J^{\mu\nu\rho} = -\delta\phi^a \frac{\partial L}{\partial\phi_{,\rho}^a} + \epsilon_\nu^\rho x^\nu L \quad (5.66)$$

Reconocemos que efectivamente

$$J^{\mu\nu\rho} = L^{\mu\nu\rho} + S^{\mu\nu\rho} \quad (5.67)$$

donde $L^{\mu\nu\rho}$ representa la parte “orbital”

$$L^{\mu\nu\rho} = x^\nu T_{can}^{\mu\rho} - x^\mu T_{can}^{\nu\rho} \quad (5.68)$$

y $S^{\mu\nu\rho}$ es el término de spin, que proviene de los $\Lambda^{\mu\nu}$. La conservación del momento total implica que

$$T_{can}^{\mu\nu} - T_{can}^{\nu\mu} + S_{,\rho}^{\mu\nu\rho} = 0 \quad (5.69)$$

o sea, la parte antisimétrica del tensor de energía-impulso canónico es la fuente del momento angular de spin.

5.4. Simetrizando al EMT

El resultado de la clase anterior indica que, en general, no podemos utilizar al EMT (*energy-momentum tensor*) canónico como fuente en las ecuaciones de Einstein. Por suerte, el EMT canónico no es el único tensor conservado en la teoría.

En general, si $T^{\mu\nu}$ es un tensor conservado, también lo es

$$T^{\mu\nu} + \partial_\rho \Psi^{\mu\nu\rho} \quad (5.70)$$

provisto que

$$\Psi^{\mu\nu\rho} + \Psi^{\mu\rho\nu} = 0 \quad (5.71)$$

Además, tanto el tensor viejo como el nuevo tienen en mismo significado, en el sentido que

$$\int d^3x T^{\mu 0} = \int d^3x [T^{\mu 0} + \partial_\rho \Psi^{\mu 0\rho}] = \int d^3x [T^{\mu 0} + \partial_j \Psi^{\mu 0j}] \quad (5.72)$$

En este caso, queremos que además

$$T^{\mu\nu} - T^{\nu\mu} + \partial_\rho \Psi^{\mu\nu\rho} - \partial_\rho \Psi^{\nu\mu\rho} = 0 \quad (5.73)$$

que para el EMT canónico se convierte en

$$\partial_\rho \Psi^{\mu\nu\rho} - \partial_\rho \Psi^{\nu\mu\rho} = \partial_\rho S^{\mu\nu\rho} \quad (5.74)$$

Con condiciones de contorno razonables esto se convierte en

$$\begin{aligned} \Psi^{\mu\nu\rho} + \Psi^{\mu\rho\nu} &= 0 \\ \Psi^{\mu\nu\rho} + \Psi^{\nu\rho\mu} &= S^{\mu\nu\rho} \end{aligned} \quad (5.75)$$

Es natural probar con

$$\Psi^{\mu\nu\rho} = \alpha S^{\mu\nu\rho} + \beta S^{\nu\rho\mu} + \gamma S^{\rho\mu\nu} \quad (5.76)$$

Entonces $\alpha + \gamma = 1$, $\alpha + \beta = \gamma + \beta = 0$, o sea

$$\Psi^{\mu\nu\rho} = \frac{1}{2} [S^{\mu\nu\rho} + S^{\rho\mu\nu} - S^{\nu\rho\mu}] \quad (5.77)$$

que es conocido como el *Tensor de Belinfante*. Más adelante vamos a ver una forma mucho más sencilla de encontrar un EMT conservado y simétrico.

5.5. Derivada de Lie

Además de la derivación covariante, la *derivada de Lie* también un juega un rol protagónico en la teoría.

Consideremos una función escalar ϕ y un punto P del espacio tiempo que tiene coordenadas x^μ en un sistema de coordenadas y $x^\mu + \xi^\mu$ en otro. Entonces en el segundo sistema el escalar está representado por la función

$$\phi'(x^\mu + \xi^\mu) = \phi(x^\mu) \quad (5.78)$$

Si ξ^μ es infinitesimal, podemos desarrollar

$$\phi'(x^\mu) - \phi(x^\mu) \equiv \mathcal{L}_\xi \phi = -\xi^\mu \phi_{,\mu}(x) \quad (5.79)$$

esta identidad define la derivada de Lie $\mathcal{L}_\xi \phi$ del escalar.

Si consideramos en cambio un vector contravariante, entonces

$$A'^\mu(x^\nu + \xi^\nu) = \frac{\partial(x^\mu + \xi^\mu)}{\partial x^\rho} A^\rho(x^\nu) \quad (5.80)$$

Definimos

$$A'^{\mu}(x^{\nu}) = A^{\mu}(x^{\nu}) + \mathcal{L}_{\xi}A^{\mu} + \dots \quad (5.81)$$

donde

$$\mathcal{L}_{\xi}A^{\mu} = \frac{\partial \xi^{\mu}}{\partial x^{\rho}}A^{\rho} - \xi^{\rho}\frac{\partial A^{\mu}}{\partial x^{\rho}} \quad (5.82)$$

por la simetría de la conexión podemos escribir igualmente

$$\mathcal{L}_{\xi}A^{\mu} = A^{\rho}\nabla_{\rho}\xi^{\mu} - \xi^{\rho}\nabla_{\rho}A^{\mu} \quad (5.83)$$

que muestra que la derivada de Lie es un tensor. Para un vector covariante

$$\mathcal{L}_{\xi}A_{\mu} = -A_{\rho}\nabla_{\mu}\xi^{\rho} - \xi^{\rho}\nabla_{\rho}A_{\mu} \quad (5.84)$$

Para el tensor métrico, cuyas derivadas covariantes se anulan, encontramos que

$$\mathcal{L}_{\xi}g_{\mu\nu} = -\nabla_{\mu}\xi_{\nu} - \nabla_{\nu}\xi_{\mu} \quad (5.85)$$

5.6. EL EMT simétrico

Vamos a considerar una teoría cuyas ecuaciones de conservación se deducen de una acción covariante

$$S = \int d^4x \sqrt{-g} L[\phi^a, \partial_{\mu}\phi^a, g_{\mu\nu}] \quad (5.86)$$

Nótese que la acción es covariante *a pesar de que* la expresamos en términos de derivadas ordinarias de los campos. Por ejemplo, en el caso de Klein-Gordon

$$L = \left(\frac{-1}{2}\right) [g^{\mu\nu}\partial_{\mu}\phi\partial_{\nu}\phi + m^2\phi^2] \quad (5.87)$$

y en el caso de Maxwell

$$L = \left(\frac{-1}{4}\right) g^{\mu\nu}g^{\rho\sigma}F_{\mu\rho}F_{\nu\sigma} \quad (5.88)$$

con el tensor de campos

$$F_{\mu\nu} = \partial_{\mu}A_{\nu} - \partial_{\nu}A_{\mu} \quad (5.89)$$

Nótese que esta expresión efectivamente define un tensor por la simetría de la conexión de Levi-Civita, ya que igualmente podemos escribir

$$F_{\mu\nu} = \nabla_{\mu}A_{\nu} - \nabla_{\nu}A_{\mu} \quad (5.90)$$

Las ecuaciones de movimiento se obtienen pidiendo que la acción sea estacionaria frente a variaciones en los campos, para una métrica fija, de modo que

$$\partial_{\mu}\frac{\partial\sqrt{-g}L}{\partial\phi^a_{,\mu}} = \frac{\partial\sqrt{-g}L}{\partial\phi^a} \quad (5.91)$$

Para el campo de Klein-Gordon obtenemos

$$\partial_{\mu}\sqrt{-g}g^{\mu\nu}\phi_{,\nu} = \sqrt{-g}m^2\phi \quad (5.92)$$

Donde reconocemos la forma de la tetradivergencia de un vector contravariante

$$\nabla_{\mu}A^{\mu} = \frac{1}{\sqrt{-g}}\partial_{\mu}\sqrt{-g}A^{\mu} \quad (5.93)$$

de manera que obtenemos la ecuación explícitamente covariante

$$g^{\mu\nu}\nabla_{\mu}\partial_{\nu}\phi - m^2\phi = 0 \quad (5.94)$$

Por definición la acción no cambia si hacemos un cambio de coordenadas. El formalismo de derivadas de Lie nos permite pensar en el cambio de coordenadas como una transformación de los campos, dejando las coordenadas sin transformar.

$$\delta S = \int d^4x \left\{ \frac{\partial \sqrt{-g} L}{\partial g_{\mu\nu}} \mathcal{L}_\xi g_{\mu\nu} + \frac{\partial \sqrt{-g} L}{\partial \phi^a} \mathcal{L}_\xi \phi^a + \frac{\partial \sqrt{-g} L}{\partial \phi^a_{,\rho}} \partial_\rho \mathcal{L}_\xi \phi^a \right\} = 0 \quad (5.95)$$

Entonces, si $\delta \phi^a = \mathcal{L}_\xi \phi^a$, también $\delta \partial_\mu \phi^a = \partial_\mu \mathcal{L}_\xi \phi^a$, y si imponemos las ecuaciones de movimiento, la variación de los campos no va a inducir cambio alguno en la acción. Pero ahora debemos considerar también la transformación de la métrica

$$\delta S = -2 \int d^4x \frac{\partial \sqrt{-g} L}{\partial g_{\mu\nu}} \nabla_\nu \xi_\mu = 0 \quad (5.96)$$

Integrando por partes encontramos que el tensor simétrico

$$T^{\mu\nu} = \frac{2}{\sqrt{-g}} \frac{\partial \sqrt{-g} L}{\partial g_{\mu\nu}} \quad (5.97)$$

debe ser conservado. Este es el tensor que vamos a usar como fuente en las ecuaciones de Einstein.

Para calcular las derivadas, observamos que de la identidad obvia

$$d(g^{\rho\sigma} g_{\sigma\lambda}) = d\delta^\rho_\lambda = 0 \quad (5.98)$$

resulta

$$d(g^{\rho\sigma}) g_{\sigma\lambda} = g^{\rho\sigma} dg_{\sigma\lambda} \quad (5.99)$$

y finalmente

$$\frac{\partial g^{\rho\sigma}}{\partial g_{\mu\nu}} = \left(\frac{-1}{2} \right) [g^{\rho\mu} g^{\nu\sigma} + g^{\rho\nu} g^{\mu\sigma}] \quad (5.100)$$

Mientras que de la identidad

$$\ln g = \text{tr} \ln g_{\mu\nu} \quad (5.101)$$

con

$$\ln [g_{\mu\nu} + dg_{\mu\nu}] = \ln [g_{\mu\rho} (\delta^\rho_\nu + g^{\rho\sigma} dg_{\sigma\nu})] \quad (5.102)$$

se deduce que

$$\frac{dg}{g} = g^{\rho\sigma} dg_{\sigma\rho} \quad (5.103)$$

y por lo tanto

$$\frac{\partial \sqrt{-g}}{\partial g_{\mu\nu}} = \frac{1}{2} \sqrt{-g} g^{\mu\nu} \quad (5.104)$$

Con estas dos fórmulas podemos calcular el emt de cualquier teoría. Para el caso de Klein-Gordon

$$T^{\mu\nu} = \partial^\mu \phi \partial^\nu \phi - \frac{1}{2} g^{\mu\nu} [g^{\rho\sigma} \partial_\rho \phi \partial_\sigma \phi + m^2 \phi^2] \quad (5.105)$$

En este caso $T^{\mu\nu} = T^{\mu\nu}_{can}$, como cabía esperar ya que éste ya era simétrico. En el caso de Maxwell

$$T^{\mu\nu} = F^{\mu\rho} F^\nu_\rho - \frac{1}{4} g^{\mu\nu} F^{\rho\sigma} F_{\rho\sigma} \quad (5.106)$$

que efectivamente se conserva cuando $F^\mu_{\nu} = 0$ y $F_{(\mu\nu,\rho)} = 0$, y además

$$T^{\mu\nu} - T^{\mu\nu}_{can} = \partial_\rho A^\mu F^{\nu\rho} \quad (5.107)$$

cuando se cumplen las ecuaciones de movimiento, lo cual muestra la equivalencia física de ambos tensores.

5.7. Campos de Killing

Los *campos de Killing* son aquéllos para los cuales $\mathcal{L}_\xi g_{\mu\nu} = 0$. Estos representan las *isometrías* del espacio tiempo, ya que generan cambios de coordenadas en que la forma funcional del tensor métrico permanece invariante.

Los campos de Killing están asociados con leyes de conservación. En efecto, si ξ^μ es un vector de Killing y u^μ la tetravelocidad de una partícula que se mueve a lo largo de una geodésica, entonces

$$\frac{d}{ds} \xi_\mu u^\mu = 0 \quad (5.108)$$

Ya que

$$\frac{d}{ds} \xi_\mu u^\mu = u^\nu \partial_\nu (\xi_\mu u^\mu) = \xi_\mu u^\nu \partial_\nu u^\mu + u^\mu u^\nu \partial_\nu \xi_\mu = 0 \quad (5.109)$$

El primer término se anula por la ecuación geodésica y el segundo porque ξ^μ es Killing.

Cuando la métrica es independiente de una coordenada, digamos x^a , entonces el vector $\xi^\mu = \delta_a^\mu$ es Killing. Efectivamente,

$$\begin{aligned} \xi_{;\nu}^\mu &= \Gamma_{a\nu}^\mu \\ &= \frac{1}{2} g^{\mu\lambda} [g_{a\lambda,\nu} - g_{a\nu,\lambda}] \end{aligned} \quad (5.110)$$

que va a dar algo antisimétrico cuando “bajemos” μ . Entonces, en un espacio-tiempo estacionario $-u_0$ se conserva, y puede asociarse con la energía de la partícula. Si el Universo tiene simetría axial, u_φ se conserva y puede asociarse con el momento angular.

Los vectores de Killing también están asociados a leyes de conservación en sistemas extensos, ya que si $T^{\mu\nu}$ es un tensor simétrico conservado, entonces $J^\mu = \xi^\nu T_\nu^\mu$ es una corriente conservada. En un espacio tiempo estacionario T_0^μ se conserva, y en un espacio tiempo con simetría axial T_φ^μ se conserva.

Supongamos un espacio-tiempo estacionario con métrica

$$ds^2 = -N^2(\vec{x}) dx^{02} + g_{jk}(\vec{x}) dx^j dx^k \quad (5.111)$$

Entonces $\xi^\mu = (1, 0, 0, 0)$ es Killing, y por lo tanto

$$- \int d^3x \sqrt{g} n_\mu T_0^\mu = \int d^3x \sqrt{g} N T_0^0 \quad (5.112)$$

es una cantidad conservada. Esto es curioso porque la densidad de energía vista por un observador estacionario es $\rho = n_\mu n^\nu T_\nu^\mu = T_0^0$, de modo que la cantidad de energía total sería

$$\int d^3x \sqrt{g} T_0^0 \quad (5.113)$$

Vemos que la cantidad que se conserva *no* es la energía total. Cabe sospechar que la diferencia se relaciona con una reencarnación relativista de la “energía potencial” Newtoniana.

Capítulo 6

Las ecuaciones de Einstein

Las ecuaciones de Einstein tienen la forma

$$G^{\mu\nu} = KT^{\mu\nu} \quad (6.1)$$

donde $T^{\mu\nu}$ es el tensor de energía-impulso, $G^{\mu\nu}$ es un tensor que caracteriza a la métrica, y K es una constante. La conservación de $T^{\mu\nu}$ además impone el vínculo $G^{\mu\nu}_{;\nu} = 0$, que como vamos a ver es determinante.

La primer elección de $G^{\mu\nu}$ que a uno podría ocurrírsele sería poner simplemente $G^{\mu\nu} = g^{\mu\nu}$. Eso no tendría mucho sentido porque las derivadas covariantes el tensor métrico son idénticamente cero, no así las del EMT.

La segunda cosa que viene a la mente es echar mano a la conexión

$$\Gamma^{\mu}_{\nu\sigma} = \frac{1}{2}g^{\mu\lambda} [g_{\nu\lambda,\sigma} + g_{\sigma\lambda,\nu} - g_{\nu\sigma,\lambda}] \quad (6.2)$$

No sirve porque no tiene el número correcto de índices y ni siquiera era un tensor. Sigue el tensor de Riemann

$$R^{\mu}_{\nu\rho\sigma} = \Gamma^{\mu}_{\nu\sigma,\rho} - \Gamma^{\mu}_{\nu\rho,\sigma} + \Gamma^{\mu}_{\rho\lambda}\Gamma^{\lambda}_{\nu\sigma} - \Gamma^{\mu}_{\sigma\lambda}\Gamma^{\lambda}_{\nu\rho} \quad (6.3)$$

Este es un tensor pero le sobran índices. Sin embargo, una vez que tenemos Riemann podemos definir el tensor de Ricci

$$R_{\nu\sigma} = R^{\mu}_{\nu\mu\sigma} \quad (6.4)$$

Ya nos estamos acercando, pero falta ver si el tensor de Ricci cumple con la condición de conservación.

Para eso es útil notar que el tensor de Riemann satisface las *identidades de Bianchi*

$$R^{\mu}_{\nu\rho\sigma;\lambda} + R^{\mu}_{\nu\sigma\lambda;\rho} + R^{\mu}_{\nu\lambda\rho;\sigma} = 0 \quad (6.5)$$

Estas son fáciles de verificar en un referencial localmente inercial

$$\begin{aligned} 0 &= \Gamma^{\mu}_{\nu\sigma,\rho\lambda} - \Gamma^{\mu}_{\nu\rho,\sigma\lambda} \\ &+ \Gamma^{\mu}_{\nu\lambda,\sigma\rho} - \Gamma^{\mu}_{\nu\sigma,\lambda\rho} \\ &+ \Gamma^{\mu}_{\nu\rho,\lambda\sigma} - \Gamma^{\mu}_{\nu\lambda,\rho\sigma} \end{aligned} \quad (6.6)$$

Contrayendo las identidades de Bianchi en μ y ρ obtenemos

$$R_{\nu\sigma;\lambda} + R^{\mu}_{\nu\sigma\lambda;\mu} - R_{\nu\lambda;\sigma} = 0 \quad (6.7)$$

Ahora contraemos en ν y λ y obtenemos

$$2R^{\nu}_{\sigma;\nu} - R_{,\sigma} = 0 \quad (6.8)$$

donde

$$R = g^{\mu\nu} R_{\mu\nu} \quad (6.9)$$

es el *escalar de curvatura*. Entonces en general el tensor de Ricci no es conservado, pero el *tensor de Einstein*

$$G^{\mu\nu} = R^{\mu\nu} - \frac{1}{2}g^{\mu\nu}R \quad (6.10)$$

sí lo es. Encontramos el lado izquierdo de las ecuaciones de Einstein.

La venganza de la curvatura es que el tensor de Einstein es simétrico, por lo cual el EMT también tiene que ser simétrico, lo cual descarta usar el EMT canónico como fuente en las ecuaciones de Einstein.

Nótese que la traza del tensor de Einstein

$$g^{\mu\nu}G_{\mu\nu} = -R = -g^{\mu\nu}R_{\mu\nu} \quad (6.11)$$

decimos que el tensor de Einstein es el *inverso de traza* del tensor de Ricci. La inversión de traza es una conjugación: el inverso del inverso es el tensor original.

6.1. La acción de Einstein-Hilbert

Ya que nos tomamos el trabajo de demostrar que el EMT simétrico se puede deducir de un principio variacional, es lícito preguntarse si el tensor de Einstein se puede encontrar de una manera similar.

Empecemos repasando el concepto de derivada variacional. Tenemos un *funcional*, es decir, una función que atribuye un número no al valor de los campos en un punto dado, sino a toda la configuración de campos en la variedad \mathcal{M} (por ejemplo, \mathcal{M} podría ser un espacio-tiempo)

$$F = F[\{\phi(x), x \in \mathcal{M}\}] \quad (6.12)$$

Si comparamos el valor de F para dos configuraciones de campo similares, digamos $\phi(x)$ y $\phi(x) + \delta\phi(x)$, esperamos que los valores de F también sean similares, y escribimos

$$F[\phi + \delta\phi] = F[\phi] + \int d^4x \frac{\delta F}{\delta\phi(x)} \delta\phi(x) \quad (6.13)$$

que generaliza el concepto de diferencial a funciones de variables continuas. El coeficiente de $\delta\phi(x)$ es por definición la *derivada variacional* de F .

Una clase importante de funcionales son los *funcionales locales*, es decir aquéllos para los que

$$F[\phi] = \int d^d x f[\phi(x)] \quad (6.14)$$

donde d es la dimensión de la variedad y f es una función ordinaria de los campos (y eventualmente, un número finito de derivadas) en cada punto. En este caso, se comprueba fácilmente que

$$\frac{\delta F}{\delta\phi(x)} = \frac{df}{d\phi}(x) \quad (6.15)$$

La derivada en el lado derecho es en el sentido del cálculo ordinario. Esta fórmula se generaliza fácilmente al caso en que hay varios campos definidos en cada punto, y cuando f también depende de las derivadas en ese punto.

Volviendo a Einstein, la idea es tener un funcional de acción

$$S = S_M + S_{E-H} \quad (6.16)$$

donde S_M es la acción de la materia, por ejemplo para un campo de Maxwell escribiríamos

$$S_M = -\frac{1}{4} \int d^4x \sqrt{-g} F^{\mu\nu} F_{\mu\nu} \quad (6.17)$$

La vez pasada vimos cómo calcular la derivada variacional

$$\frac{\delta S_M}{\delta g_{\mu\nu}(x)} = \frac{1}{2} \sqrt{-g} T^{\mu\nu} \quad (6.18)$$

donde $T^{\mu\nu}$ es el EMT simétrico y conservado. El problema ahora es mostrar que podemos encontrar un funcional S_{E-H} tal que

$$\frac{\delta S_{E-H}}{\delta g_{\mu\nu}(x)} = -\frac{1}{2K} \sqrt{-g} G^{\mu\nu} \quad (6.19)$$

ya que de esa manera el principio de que la acción sea estacionaria frente a variaciones de la métrica

$$\frac{\delta(S_M + S_{E-H})}{\delta g_{\mu\nu}(x)} = 0 \quad (6.20)$$

nos devuelve las ecuaciones de Einstein.

Efectivamente, el funcional de acción correspondiente es la *acción de Einstein-Hilbert*

$$S_{E-H} = \frac{1}{2K} \int d^4x \sqrt{-g} R = \frac{1}{2K} \int d^4x \sqrt{-g} g^{\mu\nu} R_{\mu\nu} \quad (6.21)$$

Ante una variación de la métrica tenemos

$$\delta S_{E-H} = \frac{1}{2K} \int d^4x \{ (\delta\sqrt{-g}) g^{\mu\nu} R_{\mu\nu} + \sqrt{-g} (\delta g^{\mu\nu}) R_{\mu\nu} + \sqrt{-g} g^{\mu\nu} \delta R_{\mu\nu} \} \quad (6.22)$$

Ya hemos visto que

$$\delta\sqrt{-g} = \frac{1}{2}\sqrt{-g}g^{\mu\nu}\delta g_{\mu\nu} \quad (6.23)$$

y

$$\delta g^{\rho\sigma} = -g^{\rho\mu}g^{\sigma\nu}\delta g_{\mu\nu} \quad (6.24)$$

de manera que

$$\delta S_{E-H} = \frac{1}{2K} \int d^4x \sqrt{-g} \{ -G^{\mu\nu} \delta g_{\mu\nu} + g^{\mu\nu} \delta R_{\mu\nu} \} \quad (6.25)$$

Lo cual es extraño porque parece que el último término sobra; con el primero más la acción de los campos de materia nos alcanza para encontrar las ecuaciones de Einstein.

El tema es que el último término es una divergencia total, y por lo tanto no contribuye a la variación. Para ver ésto, observamos que aunque la conexión no es un tensor, la diferencia de dos conexiones sí es un tensor. En particular, la variación de la conexión es un tensor, y la variación del tensor de Ricci entonces

$$\delta R_{\mu\nu} = \nabla_\rho [\delta\Gamma_{\mu\nu}^\rho] - \nabla_\nu [\delta\Gamma_{\mu\rho}^\rho] \quad (6.26)$$

(esto se puede ver haciendo la cuenta en un sistema localmente inercial y volviendo a un sistema genérico usando el carácter tensorial de la variación de la conexión). Ahora es evidente que podemos usar el teorema de Gauss y convertir el término molesto en una integral en el borde.

Sin embargo, subsiste una singularidad. Normalmente cuando uno aplica un principio variacional para obtener las ecuaciones de una teoría de campos, uno pide que la variación *de los campos* se anule en el borde. Acá es evidente que lo que tenemos que pedir es que se anule la variación *de la conexión*. Es posible agregar una divergencia total a la acción de Einstein-Hilbert para convertirla en un principio variacional normal. Eso es irrelevante desde el punto de vista de obtener las ecuaciones de Einstein, pero importa si uno quiere cuantificar la gravedad.

Nótese que el hecho de que el tensor de Einstein pueda obtenerse por la variación de un funcional de acción covariante demuestra que el tensor de Einstein es simétrico y conservado, sin apelar a las identidades de Bianchi.

6.2. El tensor de Weyl

Una consecuencia inmediata de las ecuaciones de Einstein es que el EMT determina el tensor de Ricci en un punto, pero el tensor de Riemann tiene 20 componentes independientes y el tensor de Ricci sólo tiene 10. Por lo tanto conocer el EMT no determina unívocamente el tensor de Riemann, en particular, es posible tener curvatura en ausencia de materia.

Si conocemos el escalar de curvatura, es posible construir un tensor con las simetrías del tensor de Riemann

$$R [\delta_\rho^\mu g_{\nu\sigma} - \delta_\sigma^\mu g_{\nu\rho}] \quad (6.27)$$

similarmente si conocemos el tensor de Ricci

$$\delta_\rho^\mu R_{\nu\sigma} - \delta_\sigma^\mu R_{\nu\rho} + R_\rho^\mu g_{\nu\sigma} - R_\sigma^\mu g_{\nu\rho} \quad (6.28)$$

Entonces podemos formar un tensor tal que todas sus trazas son nulas

$$C_{\nu\rho\sigma}^{\mu} = R_{\nu\rho\sigma}^{\mu} - \alpha [\delta_{\rho}^{\mu} R_{\nu\sigma} - \delta_{\sigma}^{\mu} R_{\nu\rho} + R_{\rho}^{\mu} g_{\nu\sigma} - R_{\sigma}^{\mu} g_{\nu\rho}] + \beta R [\delta_{\rho}^{\mu} g_{\nu\sigma} - \delta_{\sigma}^{\mu} g_{\nu\rho}] \quad (6.29)$$

Efectivamente trazando en μ y ρ obtenemos

$$0 = R_{\nu\sigma} - \alpha [2R_{\nu\sigma} + g_{\nu\sigma} R] + 3\beta g_{\nu\sigma} R \quad (6.30)$$

de modo que debe ser

$$\alpha = \frac{1}{2}; \quad \beta = \frac{1}{6} \quad (6.31)$$

$C_{\nu\rho\sigma}^{\mu}$ es el *tensor de Weyl*, y es la parte de la curvatura que no es determinada por la materia.

Incidentalmente, en $d = 3$ dimensiones tanto el tensor de Riemann como el de Ricci tienen 6 componentes independientes. En 3 dimensiones, por lo tanto, no puede haber curvatura en ausencia de materia.

6.3. La masa de Planck

Como vamos a ver la próxima clase, la constante K en las ecuaciones de Einstein se relaciona con la constante de gravitación universal de Newton

$$K = \frac{8\pi G}{c^4} \quad (6.32)$$

G aparece en la ecuación de Poisson

$$\Delta\phi = 4\pi G\rho \quad (6.33)$$

donde ρ es la densidad de materia y ϕ es el potencial gravitatorio newtoniano. Para una masa puntual M

$$\phi = -\frac{GM}{r} \quad (6.34)$$

Como el potencial Newtoniano tiene unidades de velocidad al cuadrado, las unidades de la constante de gravitación Universal tiene unidades de

$$[G] = \frac{L^3}{MT^2} \quad (6.35)$$

y su valor es de $6,6 \cdot 10^{-11} \text{ m}^3 \text{ s}^{-2} \text{ kg}^{-1}$. Con la constante de Planck

$$[h] = \frac{ML^2}{T} \quad (6.36)$$

y la velocidad de la luz, podemos fabricar una constante con unidades de energía

$$M_p c^2 = \sqrt{\frac{hc^5}{G}} \approx 10^9 \text{ J} \approx 10^{19} \text{ GeV} \quad (6.37)$$

M_p es la *masa de Planck*. El hecho de que $G \propto 1/M_p^2$ explica porqué los efectos gravitatorios son tan débiles.

6.4. Las pequeñas oscilaciones del espacio de Minkowski

Es obvio que las ecuaciones de Einstein admiten una solución en que $T^{\mu\nu} = 0$ y $g_{\mu\nu} = \eta_{\mu\nu}$. Queremos encontrar las pequeñas oscilaciones alrededor de esa solución.

Para eso escribimos

$$g_{\mu\nu} = \eta_{\mu\nu} + h_{\mu\nu} \quad (6.38)$$

y vamos a linealizar en $h_{\mu\nu}$. También escribimos, a orden lineal

$$g^{\mu\nu} = \eta^{\mu\nu} - h^{\mu\nu} \quad (6.39)$$

donde

$$h^{\mu\nu} = \eta^{\mu\rho}\eta^{\nu\sigma}h_{\rho\sigma} \quad (6.40)$$

y

$$h = \eta^{\mu\nu}h_{\mu\nu} \quad (6.41)$$

Resulta que es conveniente tomar como variable independiente no $h_{\mu\nu}$ sino su inverso de traza

$$\bar{h}_{\mu\nu} = h_{\mu\nu} - \frac{1}{2}\eta_{\mu\nu}h \quad (6.42)$$

Al perturbar la métrica, también tenemos el derecho de realizar un ajuste en las coordenadas

$$x^\mu \rightarrow x^\mu + \xi^\mu \quad (6.43)$$

Ante este cambio de coordenadas

$$h_{\mu\nu} \rightarrow h_{\mu\nu} - \xi_{\mu,\nu} - \xi_{\nu,\mu} \quad (6.44)$$

$$h \rightarrow h - 2\xi^\mu_{,\mu} \quad (6.45)$$

y entonces

$$\bar{h}_{\mu\nu} \rightarrow \bar{h}_{\mu\nu} - \xi_{\nu,\mu} - \xi_{\mu,\nu} + \eta_{\mu\nu}\xi^\rho_{,\rho} \quad (6.46)$$

usamos esta libertad para imponer las *condiciones de gauge de Lorenz*

$$\bar{h}^{\mu\nu}_{,\nu} = 0 \quad (6.47)$$

Vamos a ver que ésto es efectivamente posible. Si en el sistema original vale el gauge de Lorenz no hay nada que mostrar, si no, tenemos que encontrar un campo de vectores ξ^μ tales que

$$\bar{h}^{\mu\nu}_{,\nu} - \square\xi^\mu = 0 \quad (6.48)$$

($\square = \eta^{\mu\nu}\partial_\mu\partial_\nu$) lo cual es efectivamente posible; notar que la solución no es única.

Habiendo aclarado el tema de la elección de gauge, continuamos con el cálculo del tensor de Einstein linealizado. Primero tenemos que calcular la conexión

$$\begin{aligned} \Gamma^\mu_{\nu\sigma} &= \frac{1}{2}\eta^{\mu\lambda} [h_{\nu\lambda,\sigma} + h_{\sigma\lambda,\nu} - h_{\nu\sigma,\lambda}] \\ &= \frac{1}{2}\eta^{\mu\lambda} [\bar{h}_{\nu\lambda,\sigma} + \bar{h}_{\sigma\lambda,\nu} - \bar{h}_{\nu\sigma,\lambda}] - \frac{1}{4} [\delta^\mu_\nu \bar{h}_{,\sigma} + \delta^\mu_\sigma \bar{h}_{,\nu} - \eta^{\mu\lambda}\eta_{\nu\sigma}\bar{h}_{,\lambda}] \end{aligned} \quad (6.49)$$

Ahora Riemann

$$\begin{aligned} R^\mu_{\nu\rho\sigma} &= \Gamma^\mu_{\nu\sigma,\rho} - \Gamma^\mu_{\nu\rho,\sigma} \\ &= \frac{1}{2}\eta^{\mu\lambda} [\bar{h}_{\sigma\lambda,\nu\rho} - \bar{h}_{\nu\sigma,\lambda\rho}] - \frac{1}{4} [\delta^\mu_\sigma \bar{h}_{,\nu\rho} - \eta^{\mu\lambda}\eta_{\nu\sigma}\bar{h}_{,\lambda\rho}] \\ &\quad - \frac{1}{2}\eta^{\mu\lambda} [\bar{h}_{\rho\lambda,\nu\sigma} - \bar{h}_{\nu\rho,\lambda\sigma}] + \frac{1}{4} [\delta^\mu_\rho \bar{h}_{,\nu\sigma} - \eta^{\mu\lambda}\eta_{\nu\rho}\bar{h}_{,\lambda\sigma}] \end{aligned} \quad (6.50)$$

Ahora Ricci

$$\begin{aligned}
R_{\nu\sigma} &= R_{\nu\mu\sigma}^{\mu} \\
&= -\frac{1}{2}\square\bar{h}_{\nu\sigma} - \frac{1}{4}[\bar{h}_{,\nu\sigma} - \eta_{\nu\sigma}\square\bar{h}] - \frac{1}{2}\bar{h}_{,\nu\sigma} + \frac{3}{4}\bar{h}_{,\nu\sigma} \\
&= -\frac{1}{2}\square\bar{h}_{\nu\sigma} + \frac{1}{4}\eta_{\nu\sigma}\square\bar{h}
\end{aligned} \tag{6.51}$$

Por lo tanto la curvatura escalar

$$R = \frac{1}{2}\square\bar{h} \tag{6.52}$$

y el tensor de Einstein

$$G_{\nu\sigma} = -\frac{1}{2}\square\bar{h}_{\nu\sigma} \tag{6.53}$$

Finalmente las ecuaciones de Einstein linealizadas

$$\square\bar{h}_{\nu\sigma} = -2KT_{\nu\sigma} \tag{6.54}$$

6.5. El campo lejano en el caso estacionario

Para una solución independiente del tiempo, encontramos que *cada* componente de $\bar{h}_{\nu\sigma}$ obedece la ecuación de Poisson

$$\Delta\bar{h}_{\nu\sigma} = -2KT_{\nu\sigma} \tag{6.55}$$

cuya solución es

$$\bar{h}_{\nu\sigma}(\vec{x}) = \frac{K}{2\pi} \int d^3x' \frac{T_{\nu\sigma}(\vec{x}')}{|\vec{x} - \vec{x}'|} \tag{6.56}$$

Si la fuente es compacta, lejos de la fuente podemos hacer un desarrollo multipolar

$$\bar{h}_{\nu\sigma}(\vec{x}) \approx \frac{K}{2\pi} \left\{ \frac{1}{r} \int d^3x' T_{\nu\sigma}(\vec{x}') + \frac{x_j}{r^3} \int d^3x' T_{\nu\sigma}(\vec{x}') x'^j + \frac{3}{2r^5} \left[x_j x_k - \frac{1}{3} \delta_{jk} r^2 \right] \int d^3x' T_{\nu\sigma}(\vec{x}') x'^j x'^k + \dots \right\} \tag{6.57}$$

Los multipolos están restringidos por la condición de que $T_{\nu\sigma}$ es un tensor conservado, que en el caso estacionario se reduce a $T_{\nu j,j} = 0$. Por ejemplo, tenemos que

$$\int d^3x' T_{\nu}^j(\vec{x}') = \int d^3x' T_{\nu}^k(\vec{x}') \frac{\partial x'^j}{\partial x'^k} = - \int d^3x' T_{\nu,k}^k(\vec{x}') x'^j = 0 \tag{6.58}$$

O sea que todos los monopolos se anulan, salvo el correspondiente a $(0, 0)$. Al orden más bajo, entonces

$$\bar{h}_{00} = \frac{Kc^2 M}{2\pi r} \tag{6.59}$$

,donde identificamos M con la masa total de la fuente, y todas las otras componentes de $\bar{h}_{\mu\nu}$ son cero. Entonces

$$\bar{h} = -\frac{Kc^2 M}{2\pi r} \tag{6.60}$$

y

$$h_{00} = \frac{Kc^2 M}{4\pi r} \tag{6.61}$$

Al principio del curso habíamos visto que un campo Newtoniano ϕ podía reproducirse con una métrica tal que

$$h_{00} = -\frac{2\phi}{c^2} \tag{6.62}$$

El desarrollo monopolar del campo Newtoniano es

$$\phi = -\frac{GM}{r} \quad (6.63)$$

donde G es la constante de gravitación universal. Comparando, vemos que

$$K = \frac{8\pi G}{c^4} \quad (6.64)$$

Pudimos recuperar nuestro resultado “ingenuo”, pero además

$$h_{jk} = -\frac{1}{2}\delta_{jk}\bar{h} = -\frac{2\phi}{c^2} \quad (6.65)$$

En nuestro análisis “ingenuo” no vimos éstos términos porque sólo aparecen en la ecuación geodésica en términos de orden superior.

Los términos dipolares están sometidos a limitaciones parecidas. El término 00 puede anularse simplemente eligiendo bien el origen de coordenadas. Para los otros términos, tenemos

$$\int d^3x' T_\nu^k(\vec{x}') x'^j = \int d^3x' T_\nu^l(\vec{x}') x'^j \frac{\partial x'^k}{\partial x'^l} = - \int d^3x' T_\nu^j(\vec{x}') x'^k \quad (6.66)$$

o sea que podemos escribir cada dipolo como

$$\frac{1}{2} \int d^3x' (T_\nu^k(\vec{x}') x'^j - T_\nu^j(\vec{x}') x'^k) \quad (6.67)$$

Si $\nu = n$ también es un índice espacial, el tensor entre paréntesis se conserva, por la simetría de T_{kn}

$$(T^{kn}(\vec{x}') x'^j - T^{jn}(\vec{x}') x'^k)_{,n} = 0 \quad (6.68)$$

Y de ahí vemos que los términos dipolares se anulan. Los únicos términos dipolares no nulos son los que tienen $\nu = 0$, en cuyo caso reconocemos que el dipolo es

$$\frac{1}{2} \int d^3x' (T^{j0}(\vec{x}') x'^k - T^{k0}(\vec{x}') x'^j) = \frac{1}{2} \epsilon^{ikj} L^i \quad (6.69)$$

donde \vec{L} es el momento angular de la fuente. La métrica adquiere un término

$$2h_{0k} c dt dx^k = \frac{x_j}{r^3} \epsilon^{ikj} L^i c dt dx^k = c dt (\vec{x} \times \vec{L}) \cdot d\vec{x} \quad (6.70)$$

que muestra la relación entre los términos $0k$ de la métrica y la rotación de la fuente.

Aunque nosotros asumimos que la fuente era débil, aún para una fuente no lineal el campo lejano fuera de la fuente es armónico y admite un desarrollo multipolar. En este caso, la estructura que hemos visto sigue vigente, debido a las restricciones impuestas por el gauge de Lorenz. En otros términos, cualquier función armónica para $r > R$, digamos, puede escribirse como un potencial Newtoniano con una fuente que se anula para $r > R$, y si la métrica es simétrica y obedece el gauge de Lorenz, la fuente debe ser un tensor simétrico y conservado, que es lo único que hemos asumido.

Capítulo 7

Ondas gravitatorias

Continuamos con el estudio de las ecuaciones de Einstein linealizadas

$$\square \bar{h}_{\nu\sigma} = -\frac{16\pi G}{c^4} T_{\nu\sigma} \quad (7.1)$$

donde

$$\bar{h}_{\mu\nu} = h_{\mu\nu} - \frac{1}{2}\eta_{\mu\nu}h \quad (7.2)$$

La conservación de $T^{\mu\nu}$ implica que $h_{\mu\nu}$ está en el gauge de Lorenz

$$\bar{h}_{\nu,\mu}^{\mu} = 0 \quad (7.3)$$

Para empezar, vamos a considerar las soluciones en vacío, $T^{\mu\nu} = 0$. En este caso, las ecuaciones de Einstein se reducen a ecuaciones de onda para cada componente de la métrica, y las soluciones correspondientes se denominan *ondas gravitatorias*.

Cualquier onda gravitatoria se puede considerar una superposición de ondas planas

$$\bar{h}_{\mu\nu} = h_{\mu\nu}^{(0)} e^{ik_{\mu}x^{\mu}} \quad (7.4)$$

A partir de ahora vamos a sobreentender el superíndice 0 para las amplitudes y el factor exponencial. En estas ondas $k^2 = 0$. Vamos a suponer que $k^0 > 0$ de manera que $k^0 = k = \sqrt{\vec{k}^2}$, y por lo tanto

$$k_{\mu}x^{\mu} = \vec{k} \cdot \vec{x} - ckt \quad (7.5)$$

lo que muestra que la onda tiene frecuencia $\omega = ck$.

Las amplitudes $h_{\mu\nu}$ no son todas independientes, ya que están vinculadas por la condición

$$k^{\mu}\bar{h}_{\mu\nu} = k\bar{h}_{0\nu} + k^j\bar{h}_{j\nu} = 0 \quad (7.6)$$

Una onda plana sigue siendo una onda plana ante un cambio de coordenadas

$$x^{\mu} \rightarrow x'^{\mu} - \xi^{(0)\mu} e^{ik_{\mu}x^{\mu}} \quad (7.7)$$

Las amplitudes se transforman como

$$\bar{h}_{\mu\nu} \rightarrow \bar{h}'_{\mu\nu} = \bar{h}_{\mu\nu} + ik_{\mu}\xi_{\nu} + ik_{\nu}\xi_{\mu} - i\eta_{\mu\nu}k^{\lambda}\xi_{\lambda} \quad (7.8)$$

La condición de gauge de Lorenz es invariante ante esta transformación. Explotando esta libertad suplementaria podemos pedir más condiciones sobre las amplitudes $h_{\mu\nu}$, a saber a) $\bar{h}_{0\nu} = 0$, y b) $\bar{h}_{\mu}^{\mu} = 0$. Cuando $\bar{h}_{\mu\nu}$ satisface estas condiciones decimos que es *transverso* y *sin traza*.

Podemos pedir cinco condiciones en vez de cuatro porque no son todas independientes; como la combinación lineal $\bar{h}_{0\nu}k^{\nu} = 0$, $\bar{h}_{00} = 0$ se deduce de $\bar{h}_{0i} = 0$. Por invariancia Lorentz, si podemos lograr a), también podemos lograr $u^{\nu}\bar{h}_{\mu\nu} = 0$ para cualquier vector temporal u^{μ} .

Supongamos que tenemos una métrica que no satisface ni a) ni b). Buscamos un vector constante ξ_{μ} tal que

$$\begin{aligned}\bar{h}'_0 + ik_0\xi^\nu + ik^\nu\xi_0 - i\eta'_0 k^\lambda\xi_\lambda &= 0 \\ \bar{h}'_\mu - 2ik^\lambda\xi_\lambda &= 0\end{aligned}\quad (7.9)$$

o usando la segunda en la primera

$$\bar{h}'_0 - \frac{1}{2}\eta'_0\bar{h}'_\mu + ik_0\xi^\nu + ik^\nu\xi_0 = 0 \quad (7.10)$$

que a su vez se divide en

$$\begin{aligned}\frac{1}{2}[\bar{h}'_0 - \bar{h}'_j] + 2ik\xi_0 &= 0 \\ \bar{h}'_0 - ik\xi_j + ik^j\xi_0 &= 0\end{aligned}\quad (7.11)$$

Este sistema tiene solución única, por lo que vemos que hemos agotado nuestra libertad de gauge.

El número de onda k^μ es invariante frente a este cambio de coordenadas. Respecto a las nuevas componentes de la métrica, tenemos por construcción que $\bar{h}'_{00} = \bar{h}'_{0j} = \bar{h}'_{jj} = k^k\bar{h}'_{jk} = 0$.

Por ejemplo, consideremos una onda que se propaga en la dirección x , $k^\mu = k(1, 1, 0, 0)$. Entonces, si $\bar{h}'_{\mu\nu}$ es transverso y sin traza, tenemos que $\bar{h}'_{0\mu} = \bar{h}'_{1\mu} = 0$. Además $\bar{h}'_{\mu\mu} = 0 = \bar{h}'_{22} + \bar{h}'_{33}$ (de paso, $\bar{h}'_{\mu\nu} = h_{\mu\nu}$). Las únicas componentes independientes son $\bar{h}'_+ = \bar{h}'_{22} = -\bar{h}'_{33}$ y $\bar{h}'_\times = \bar{h}'_{23}$. Por la regla de transformación 7.8, con $k_2 = k_3 = 0$, encontramos que

$$\bar{h}'_+ = \frac{1}{2}(\bar{h}_{22} - \bar{h}_{33}) \quad (7.12)$$

y

$$\bar{h}'_\times = \bar{h}_{23} \quad (7.13)$$

Estos dos tipos de onda representan las dos polarizaciones lineales independientes de una onda gravitatoria.

7.1. Detección de ondas gravitatorias

Habiendo determinado que las ecuaciones de Einstein admiten soluciones que se propagan en forma de ondas planas, el paso siguiente es ver cómo el paso de una onda impactaría sobre la materia en su camino.

Supongamos una partícula libre que en el momento de ser alcanzada por la onda estaba en reposo, $u^\mu = (1, 0, 0, 0)$. A partir de ese momento obedece la ecuación geodésica

$$\frac{du^\mu}{ds} + \Gamma^\mu_{\nu\rho}u^\nu u^\rho = 0 \quad (7.14)$$

En el instante inicial

$$\frac{du^\mu}{ds} = -\Gamma^\mu_{00} \quad (7.15)$$

pero

$$\Gamma^\mu_{00} = \frac{1}{2}\eta^{\mu\nu}[2h_{0\nu,0} - h_{00,\nu}] = 0 \quad (7.16)$$

de modo que si la partícula está en reposo respecto al sistema de coordenadas, seguirá en reposo indefinidamente.

Sin embargo, el paso de la onda afectará las *distancias* entre partículas: si la onda se propaga en la dirección x , el intervalo entre dos partículas en la dirección y es $ds^2 = (1 + h_+)dy^2$, y por lo tanto la distancia propia es $(1 + h_+/2)dy$.

Por ejemplo, supongamos que las dos partículas están unidas por un resorte, inicialmente en reposo. Es decir, la longitud en reposo del resorte y la distancia entre partículas, antes del paso de la onda, son ambas l_0 . Bajo el efecto de la onda, la longitud en reposo del resorte sigue siendo l_0 , pero la distancia entre las partículas es $l = (1 + h_+/2)l_0$. Por lo tanto el resorte está en tensión, y comenzará a oscilar. De paso, como el resorte gana energía de esta manera, y la energía solo puede provenir de la onda, queda demostrado que la onda transporta energía.

Este fue el método empleado en el primer intento de detección directa de ondas gravitatorias, usando como “re-sortes” los modos normales de una barra de aluminio. La historia de este experimento (y la controversia a la que dió lugar) está contada en Harry Collins, *Gravity’s shadow* (University of Chicago Press, 2004).

Otra manera de explotar el cambio de las distancias entre objetos por el paso de una onda gravitatoria es haciendo rebotar un láser en un espejo. Al cambiar la distancia entre la fuente y el espejo cambia el tiempo de vuelo del láser (la velocidad de la luz no cambia) y por lo tanto la fase acumulada de la luz cuando el haz vuelve a la fuente. Midiendo ese cambio de fase podemos determinar el cambio en la distancia.

Este es el principio de funcionamiento de los interferómetros como LIGO, del cual volveremos a ocuparnos más adelante.

Por el mismo motivo, una onda gravitatoria que pase por el vecindario del planeta Tierra afecta los tiempos de llegada de los haces emitidos por púlsares. Esto es significativo porque estos haces llegan a intervalos extremadamente regulares. Por supuesto, el período de un pulsar en particular puede verse afectado por una serie de efectos sin relación alguna con las ondas gravitatorias. Lo que distingue a la onda es que afecta a *todos* los púlsares simultáneamente, y en una manera que depende de una forma relativamente sencilla de la posición del pulsar respecto de la dirección de propagación de una onda. Por lo tanto, si uno monitorea un gran número de púlsares, y busca las correlaciones esperadas entre las alteraciones del período de pares de púlsares, puede determinar el paso de ondas gravitatorias. Para eso es necesario disponer de un *pulsar timing array*, que también describiremos en más detalle más adelante.

Todos estos métodos apuntan a la detección directa de ondas gravitatorias. Históricamente, la demostración de la existencia real de las ondas gravitatorias siguió un método indirecto. Como las ondas transportan energía, cuando un sistema binario emite gravitacionalmente (como veremos en la próxima clase), pierde energía, y eso disminuye el período de la órbita. La coincidencia entre la reducción del período de un pulsar particular y la predicción a partir del cálculo de la energía emitida bajo forma de radiación gravitatoria ha sido la primer demostración concluyente de la existencia de las ondas.

7.2. Acerca de la ecuación de D’Alambert

Si pasamos ahora al tema de la generación de las ondas gravitatorias, tenemos que volver a las ecuaciones 9.18.

En principio, estas son diez ecuaciones de ondas escalares desacopladas para cada componente de la métrica, por lo cual podemos tomarlas de a una. Además, como todo es lineal e invariante frente a traslaciones, basta con encontrar la *respuesta a un impulso* o *solución fundamental* o *función de Green*

$$\square G(t, \vec{x}) = \delta(t) \delta(\vec{x}) \quad (7.17)$$

ya que entonces

$$h_{\mu\nu}(t, \vec{x}) = \frac{-16\pi G}{c^4} \int dt' d^3x' G(t-t', \vec{x}-\vec{x}') T_{\mu\nu}(t', \vec{x}') \quad (7.18)$$

Resulta conveniente buscar no a G sino a su transformada de Fourier

$$G(t, \vec{x}) = \int \frac{d\omega}{2\pi} e^{-i\omega t} G_\omega(\vec{x}) \quad (7.19)$$

que obedece la ecuación de helmholtz

$$\Delta G_\omega(\vec{x}) + k^2 G_\omega(\vec{x}) = \delta(\vec{x}) \quad (7.20)$$

donde

$$k = \frac{\omega}{c} \quad (7.21)$$

El laplaciano de un escalar ϕ es la divergencia del vector $g^{\mu\nu} \phi_{,\nu}$ y por lo tanto se aplica la fórmula

$$\Delta \phi = \frac{1}{\sqrt{g}} \partial_\mu \sqrt{g} g^{\mu\nu} \phi_{,\nu} \quad (7.22)$$

Usamos esta fórmula en un espacio con métrica

$$ds^2 = dr^2 + r^2 (d\theta^2 + \sin^2 \theta d\varphi^2) \quad (7.23)$$

($\sqrt{g} = r^2 \sin \theta$) y obtenemos el famoso *Laplaciano en esféricas*

$$\nabla\phi = \frac{1}{r^2}\partial_r r^2\partial_r\phi + \frac{1}{r^2}\left[\frac{1}{\sin^2\theta}\partial_\theta\sin\theta\partial_\theta + \frac{1}{\sin^2\theta}\partial_\varphi^2\right] \quad (7.24)$$

En nuestro caso, esperamos que la función G_ω sólo dependa de r

$$\frac{1}{r^2}\partial_r r^2\partial_r G_\omega(\vec{x}) + k^2 G_\omega(\vec{x}) = \delta(\vec{x}) \quad (7.25)$$

Para todo $r \neq 0$ esto se reduce a una ecuación homogénea. Conviene definir

$$G_\omega = \frac{g}{r} \quad (7.26)$$

de este modo

$$\begin{aligned} \left(\frac{g}{r}\right)' &= \frac{g'}{r} - \frac{g}{r^2} \\ r^2\left(\frac{g}{r}\right)' &= rg' - g \\ \left(r^2\left(\frac{g}{r}\right)'\right)' &= rg'' \end{aligned} \quad (7.27)$$

O sea, si $r \neq 0$

$$g'' + k^2 g = 0 \quad (7.28)$$

Esta ecuación admite las soluciones Ae^{ikr} y Be^{-ikr} . Reemplazando en 7.19 vemos que la primera representa una onda saliente y la segunda una onda entrante. Como el comportamiento esperado es el primero, rechazamos la segunda solución.

Para encontrar la constante A integramos la ecuación de Helmholtz 7.20 en una bola de radio ϵ centrada en el origen. En el primer término usamos el teorema de Gauss, y obtenemos

$$4\pi\epsilon^2 A \left(\frac{e^{ikr}}{r}\right)'(r=\epsilon) + 4\pi A \int_0^\epsilon r dr e^{ikr} = 1 \quad (7.29)$$

que en el límite $\epsilon \rightarrow 0$ da

$$A = \frac{-1}{4\pi} \quad (7.30)$$

Finalmente obtenemos nuestra solución

$$h_{\mu\nu}(t, \vec{x}) = \frac{4G}{c^4} \int dt' d^3x \int \frac{d\omega}{2\pi} e^{-i\omega(t-t')} \frac{e^{i\omega|\vec{x}-\vec{x}'|/c}}{|\vec{x}-\vec{x}'|} T_{\mu\nu}(t', \vec{x}') \quad (7.31)$$

Acá tenemos dos alternativas. La primera es transformar Fourier ambos miembros, con lo cual obtenemos una relación entre las transformadas del EMT y de la métrica

$$h_{\omega\mu\nu}(\vec{x}) = \frac{4G}{c^4} \int d^3x \frac{e^{i\omega|\vec{x}-\vec{x}'|/c}}{|\vec{x}-\vec{x}'|} T_{\omega\mu\nu}(\vec{x}') \quad (7.32)$$

La otra es integrar explícitamente en ω

$$h_{\mu\nu}(t, \vec{x}) = \frac{4G}{c^4} \int dt' d^3x \frac{T_{\mu\nu}(t', \vec{x}')}{|\vec{x}-\vec{x}'|} \delta\left(t-t' - \frac{|\vec{x}-\vec{x}'|}{c}\right) \quad (7.33)$$

que muestra que al adoptar la solución de ondas salientes impusimos causalidad, ya que la δ sólo se enciende si $t \geq t'$. Ahora integramos en t'

$$h_{\mu\nu}(t, \vec{x}) = \frac{4G}{c^4} \int d^3x \frac{T_{\mu\nu}\left(t - \frac{|\vec{x}-\vec{x}'|}{c}, \vec{x}'\right)}{|\vec{x}-\vec{x}'|} \quad (7.34)$$

que es análogo a usar potenciales retardados en electromagnetismo.

7.3. Ondas gravitatorias II

Retomamos la clase anterior

$$h_{\omega\mu\nu}(\vec{x}) = \frac{4G}{c^4} \int d^3x' \frac{e^{ik|\vec{x}-\vec{x}'|}}{|\vec{x}-\vec{x}'|} T_{\omega\mu\nu}(\vec{x}') \quad (7.35)$$

Como habíamos hecho en el caso estacionario, en el campo lejano es suficiente hacer un desarrollo multipolar. En este caso, nos quedamos sólo con el primer término

$$h_{\omega\mu\nu} \approx \frac{4G}{c^4} \frac{e^{ikr}}{r} \int d^3x' T_{\omega\mu\nu}(\vec{x}') \quad (7.36)$$

Las componentes del EMT están relacionadas por las leyes de conservación

$$-ikT_{\omega\mu}^0 + T_{\omega\mu,j}^j = 0 \quad (7.37)$$

Por este motivo las componentes temporales se anulan

$$-ik \int d^3x T_{\omega\mu}^0 = - \int d^3x T_{\omega\mu,j}^j = 0 \quad (7.38)$$

En cuanto a las espaciales, tenemos

$$\begin{aligned} \int d^3x T_{\omega}^{jk} &= \int d^3x T_{\omega}^{jl} \frac{\partial x^k}{\partial x^l} \\ &= - \int d^3x T_{\omega,l}^{jl} x^k = -ik \int d^3x T_{\omega}^{j0} x^k \end{aligned} \quad (7.39)$$

Repitiendo el teorema con el otro índice, encontramos

$$\int d^3x T_{\omega}^{jk} = -k^2 \int d^3x T_{\omega}^{00} x^j x^k \quad (7.40)$$

que es la llamada *fórmula cuadrupolar de Einstein*. Nótese que la conservación del EMT implican que los momentos monopulares y dipolares de T_{ω}^{00} se anulan, si $\omega \neq 0$. También que es conveniente escribir

$$h_{\omega}^{jk}(\vec{x}) \approx \frac{-4G}{c^4} \frac{e^{ikr}}{r} k^2 \left[\int d^3x T_{\omega}^{00} x^j x^k \right]_{\omega} \quad (7.41)$$

Ahora podemos resolver nuestro primer problema de radiación de ondas gravitatorias. Consideramos un sistema binario de dos masas m iguales en una órbita circular. Primero ponemos un sistema de coordenadas (x', y', z') con origen en el centro de masa del sistema y la dirección x' perpendicular a la órbita. Cada masa ocupa dos puntos opuestos respecto del centro de masa a distancia r . El problema es equivalente al de una masa $m/2$ orbitando a una distancia $2r$ de un centro de fuerzas fijo. Por la tercera ley de Kepler la relación entre r y la frecuencia Ω de la órbita es

$$r^3 = \frac{\pi^2 Gm}{\Omega^2} \quad (7.42)$$

y entonces podemos escribir para una de las masas

$$\begin{aligned} y' &= r \cos \Omega t \\ z' &= r \sin \Omega t \end{aligned} \quad (7.43)$$

y los valores opuestos para la otra.

Supongamos que miramos la radiación en una dirección

$$\hat{x} = \cos \theta \hat{x}' + \sin \theta \hat{z}' \quad (7.44)$$

Para discriminar al máximo entre la radiación y accidentes relacionados con la elección de coordenadas, queremos escribir la onda en el gauge transverso y sin traza. Para eso definimos nuevas coordenadas

$$\begin{aligned} y &= y' \\ z &= -\sin\theta x' + \cos\theta z' \end{aligned} \quad (7.45)$$

Las componentes del momento cuadrupolar que necesitamos son

$$\begin{aligned} T^{yy} &= mc^2 r^2 [1 + \cos 2\Omega t] \\ T^{zz} &= mc^2 r^2 \cos^2 \theta [1 - \cos 2\Omega t] \\ T^{yz} &= mc^2 r^2 \cos \theta \sin 2\Omega t \end{aligned} \quad (7.46)$$

Está claro que la radiación va a ser monocromática con una frecuencia 2Ω , el doble de la frecuencia orbital. Descartando los términos constantes, obtenemos que, a una distancia D

$$\begin{aligned} h_{+\omega} &\approx \frac{-16\pi G}{c^4} \frac{e^{ikD}}{D} \Omega^2 m r^2 \cos 2\theta [\delta(\omega - 2\Omega) + \delta(\omega + 2\Omega)] \\ h_{\times\omega} &\approx \frac{-16\pi G}{c^4} \frac{e^{i(kD+\pi/2)}}{D} \Omega^2 m r^2 \cos \theta [\delta(\omega - 2\Omega) - \delta(\omega + 2\Omega)] \end{aligned} \quad (7.47)$$

Nótese la diferencia de fase entre ambas componentes.

El pulsar de Hulse y Taylor tiene dos estrellas de neutrones de $m = 1,4 M_{\odot}$ ($\approx 3 \cdot 10^{30}$ kg) cada una, con un período de $3 \cdot 10^{-4}$ s. Usando $G \approx 6 \cdot 10^{-11} \text{ m}^3 \text{ kg}^{-1} \text{ s}^{-2}$ obtenemos un radio de la órbita de 10^9 m (la distancia de la Tierra al Sol es 150 veces éso). La amplitud de la onda emitida es alrededor de $10^{-3} \text{ m } D^{-1}$. Con una distancia de alrededor de 10^{17} m, la amplitud en Tierra es del orden de 10^{-20} . Si consideramos un interferómetro con un largo de brazos efectivo de 10^6 m, tenemos que detectar un desplazamiento de 10^{-14} m, más o menos el tamaño de un núcleo atómico.

7.4. La energía de una onda gravitatoria

Aunque ya hemos visto que la onda gravitatoria transmite energía, no es posible asociar un EMT con la onda. Sin embargo, sabemos que el tensor de Einstein depende no-linealmente del tensor métrico. De manera que si *definimos*

$$g_{\mu\nu} = \eta_{\mu\nu} + h_{\mu\nu} \quad (7.48)$$

esperamos encontrar que

$$G_{\mu\nu} = G_{\mu\nu}^{(1)} [h_{\mu\nu}] + G_{\mu\nu}^{(2)} [h_{\mu\nu}] + \dots \quad (7.49)$$

donde $G_{\mu\nu}^{(1)}$ es lineal en $h_{\mu\nu}$, $G_{\mu\nu}^{(2)}$ es cuadrático, y así siguiendo. Eso sugiere buscar una solución a las ecuaciones de Einstein en la que

$$h_{\mu\nu} = h_{\mu\nu}^{(1)} + h_{\mu\nu}^{(2)} + \dots \quad (7.50)$$

y una expansión análoga para el EMT

$$T_{\mu\nu} = T_{\mu\nu}^{(0)} + T_{\mu\nu}^{(1)} + \dots \quad (7.51)$$

de manera que las ecuaciones quedan como

$$\begin{aligned} G_{\mu\nu}^{(1)} [h_{\mu\nu}^{(1)}] &= \frac{8\pi G}{c^4} T_{\mu\nu}^{(0)} \\ G_{\mu\nu}^{(1)} [h_{\mu\nu}^{(2)}] &= \frac{8\pi G}{c^4} \left[T_{\mu\nu}^{(1)} - \frac{c^4}{8\pi G} G_{\mu\nu}^{(2)} [h_{\mu\nu}^{(1)}] \right] \\ \dots &= \dots \end{aligned} \quad (7.52)$$

Esto sugiere definir

$$T_{\mu\nu}^{GW} = -\frac{c^4}{8\pi G} G_{\mu\nu}^{(2)} [h_{\mu\nu}^{(1)}] \quad (7.53)$$

como el mejor candidato que tenemos a EMT de una onda gravitatoria.

Para hacer la cuenta más fácil vamos a considerar sólo el caso de una onda plana que se propaga en la dirección x , y vamos a asumir que $h_{\mu\nu}^{(1)}$ ya está en el gauge transverso y sin traza. De manera que si definimos coordenadas $x^j = (ct, x)$, $x^a = (y, z)$, las únicas componentes no nulas de la métrica son las h_{ab} , y éstas dependen sólo de las coordenadas x^j . Es obvio que en este caso la energía fluye en la dirección x , por lo cual sólo necesitamos conocer la componente 01 del tensor de Einstein, que coincide con el tensor de Ricci, ya que $h_{01} = 0$. Ahora

$$R_{01} = R_{0j1}^j + R_{0a1}^a \quad (7.54)$$

Para calcular los tensores de Riemann necesitamos de la conexión. Por ejemplo,

$$R_{0j1}^j = \Gamma_{01,j}^j - \Gamma_{0j,1}^j + \Gamma_{jk}^j \Gamma_{01}^k - \Gamma_{1k}^j \Gamma_{0j}^k + \Gamma_{ja}^j \Gamma_{01}^a - \Gamma_{1a}^j \Gamma_{0j}^a \quad (7.55)$$

La fórmula para la conexión es

$$\Gamma_{k\mu}^j = \frac{1}{2} [h_{kj,\mu} + h_{\mu j,k} - h_{\mu k,j}] \quad (7.56)$$

y en el gauge TT todos estos términos se anulan. El otro término en el Ricci es

$$R_{0a1}^a = \Gamma_{01,a}^a - \Gamma_{0a,1}^a + \Gamma_{ak}^a \Gamma_{01}^k - \Gamma_{1k}^a \Gamma_{0a}^k + \Gamma_{ab}^a \Gamma_{01}^b - \Gamma_{1b}^a \Gamma_{0a}^b \quad (7.57)$$

No hay nada que dependa de (y, z) , así que nos podemos quedar con

$$R_{0a1}^a = -\Gamma_{0a,1}^a - \Gamma_{1b}^a \Gamma_{0a}^b \quad (7.58)$$

Ahora

$$\Gamma_{jb}^a = \frac{1}{2} (\eta^{ac} - h^{ac}) h_{cb,j} \quad (7.59)$$

de modo que (recordemos que en el gauge TT $h_a^a = 0$)

$$R_{01} = \frac{1}{2} [h^{ac} h_{ca,0}]_{,1} - \frac{1}{4} h_{b,1}^a h_{a,0}^b \quad (7.60)$$

Finalmente

$$R_{01} = \frac{1}{4} h_{,1}^{ab} h_{ab,0} + \frac{1}{2} h^{ab} h_{ab,0,1} \quad (7.61)$$

Si $Z e^{-i\omega t}$ y $W e^{-i\omega t}$ son dos variables que oscilan con la misma frecuencia, el promedio sobre un ciclo da

$$\langle WZ \rangle = \frac{1}{2} \text{Re } W^* Z \quad (7.62)$$

En nuestro caso obtenemos

$$R_{01} = \frac{1}{8} k^2 h^{ab*} h_{ab} = \frac{1}{4} k^2 [|h_+|^2 + |h_\times|^2] \quad (7.63)$$

Nótese que como $h \propto \omega^2$, el flujo de energía escala como ω^6 ; en el caso electromagnético va como ω^4 .

Ahora, este es sólo el tensor de Ricci. El “EMT de los gravitones” es

$$T_{01} = -\frac{c^4}{32\pi G} k^2 [|h_+|^2 + |h_\times|^2] \quad (7.64)$$

y por la interpretación física de T_1^0 como “flujo de energía dividido por c ” y $\omega = ck$ encontramos

$$J_E = \frac{c^3}{32\pi G} \omega^2 [|h_+|^2 + |h_\times|^2] \quad (7.65)$$

La combinación particular de parámetros dimensionales podía preverse por análisis dimensional. Que el flujo de energía sería proporcional al cuadrado de la amplitud era de esperar por experiencia con ondas acústicas y electromagnéticas.

En este tema seguimos el libro de Robert Wald, *General Relativity* (University of Chicago Press, 1984).

Si ahora volvemos a mirar la fuente, ésta tiene que estar perdiendo energía debido a la radiación gravitatoria

$$\frac{dE}{dt} = -W \quad (7.66)$$

donde W es la integral del flujo sobre una esfera que incluya la fuente. Dejando de seguir los parámetros adimensionales, tenemos que

$$W \approx \frac{c^3}{G} \omega^2 \left[\frac{G}{c^4} \omega^2 m r^2 \right]^2 \quad (7.67)$$

donde identificamos la frecuencia de la onda y la frecuencia de la órbita, descartando los factores adimensionales. Para simplificar el análisis, vamos a asumir que la fuente se puede describir como dos masas iguales en una órbita circular Kepleriana, en cuyo caso

$$r^3 = \frac{Gm}{\omega^2} \quad (7.68)$$

$$E \approx -m\omega^2 r^2 = G^{2/3} m^{5/3} \omega^{2/3} \quad (7.69)$$

y finalmente

$$\frac{1}{\omega^{11/3}} \frac{d\omega}{dt} = \left(\frac{Gm}{c^3} \right)^{5/3} \quad (7.70)$$

cuya integral es

$$\omega = \frac{\omega_0}{\left[1 - \frac{t}{t_0} \right]^{3/8}} \quad (7.71)$$

donde

$$t_0 = \frac{1}{\omega_0} \left(\frac{c^3}{Gm\omega_0} \right)^{5/3} \quad (7.72)$$

Para el pulsar de Hulse y Taylor es factor entre paréntesis da del orden de 10^{15} , que sería el número de órbitas que le quedan al sistema antes de colapsar (en este caso en particular nuestras aproximaciones sobreestiman el resultado real). Incidentalmente

$$\frac{c^2 r}{Gm} \frac{c}{\omega_0 r} \quad (7.73)$$

El primer factor es el cociente entre el tamaño de la fuente y su radio Schwarzschild, y el segundo entre la velocidad de la luz y la velocidad de cada masa. Esto muestra que este factor sólo puede hacerse del orden de 1 cuando el sistema está al borde del colapso gravitatorio.

Una consecuencia importante de este análisis es que si uno puede determinar $\dot{\omega}$ para una frecuencia dada, entonces puede calcular la masa de la fuente, y por lo tanto la luminosidad absoluta, en ondas gravitatorias, de la fuente. Por este motivo una fuente de ondas gravitatorias puede servir como una “sirena standard”, permitiendo una medición muy precisa de la distancia a una fuente de luminosidad absoluta conocida. Complementada con observaciones en el espectro electromagnético para determinar el corrimiento al rojo, las sirenas standard prometen convertirse en nuestra forma más precisa de determinar la relación corrimiento al rojo-distancia en un futuro próximo.

Un análisis más sofisticado requiere tener en cuenta que el efecto de la onda sobre un detector, por ejemplo, un interferómetro, depende de la dirección de propagación y de la polarización de la onda. Para determinar éstas hacen falta varias detecciones simultáneas (por lo menos tres o dos y la detección de la señal electromagnética de la fuente).

7.5. Detección de ondas gravitatorias

En esta clase nos basamos fundamentalmente en M. Maggiore, *Gravitational Waves*, 2 Vol., Oxford, 2008 y 2018.

7.5.1. Una onda propagándose en una dirección arbitraria

Hasta ahora elegíamos la dirección de propagación de una onda gravitatoria en la dirección \hat{x} de manera que, en el gauge transverso y sin traza, las únicas componentes no triviales de la onda fuesen $h_+ = h_{yy} = -h_{zz}$ y $h_\times = h_{yz} = h_{zy}$. Si la onda se propaga en una dirección arbitraria \hat{k} , tenemos que completar la rotación de nuestro sistema de coordenadas a una nueva base derecha $(\hat{x}', \hat{y}', \hat{z}')$, con, digamos $\hat{x}' = \hat{k}$. El versor \hat{y}' puede ser cualquier versor ortogonal a \hat{k} , por ejemplo, si $\hat{k} \neq \hat{z}$ podemos tomar

$$\hat{y}' = \frac{\hat{z} \times \hat{k}}{|\hat{z} \times \hat{k}|} \quad (7.74)$$

y entonces

$$\hat{z}' = \hat{k} \times \hat{y}' \quad (7.75)$$

El intervalo queda entonces como

$$ds^2 = -c^2 dt^2 + [\delta_{ij} + h_+ \epsilon_{ij}^+ + h_\times \epsilon_{ij}^\times] dx^i dx^j \quad (7.76)$$

donde hemos introducido los *tensores de polarización*

$$\begin{aligned} \epsilon_{ij}^+ &= \hat{y}'_i \hat{y}'_j - \hat{z}'_i \hat{z}'_j \\ \epsilon_{ij}^\times &= \hat{y}'_i \hat{z}'_j - \hat{z}'_i \hat{y}'_j \end{aligned} \quad (7.77)$$

7.6. Detectando ondas con un resorte

Conceptualmente, el detector de ondas más simple sería un resorte. Supongamos una masa m en el extremo de un resorte de longitud en reposo L y constante $k = m\omega_0^2$. Llamamos a x la diferencia entre la posición L de la partícula y la longitud en reposo L_0 . El resorte tiene pérdidas que provocan una fuerza de fricción $-m\gamma v$. Entonces en ausencia de la onda la ecuación del resorte es

$$\ddot{x} + \gamma \dot{x} + \omega_0^2 x = 0 \quad (7.78)$$

En presencia de la onda, L va a fluctuar según la ecuación de desviación geodésica (clase 5)

$$\ddot{L} = R_{010}^1 L \quad (7.79)$$

A orden lineal, y usando que $h_{0\mu} = 0$, queda

$$R_{010}^1 = \frac{1}{2} \omega^2 h_{11} L e^{ik_x L - i\omega t} \quad (7.80)$$

El efecto es máximo cuando $k_x = 0$. Además, si la masa se desvía poco de la posición de equilibrio, podemos aproximar L por L_0 . Entonces, en presencia de la onda, *todo ocurre como si* debemos agregar un forzado a la ecuación del resorte

$$\ddot{x} + \gamma \dot{x} + \omega_0^2 x = \frac{1}{2} \omega^2 h_{11} L_0 e^{-i\omega t} \quad (7.81)$$

con solución

$$x = -\frac{1}{2Z[\omega]} \omega^2 h_{11} L_0 e^{-i\omega t} \quad (7.82)$$

donde Z es la impedancia

$$Z[\omega] = \omega^2 + i\gamma\omega - \omega_0^2 \quad (7.83)$$

Una figura de mérito para medir la eficacia del resorte como detector es el cociente entre la potencia entregada al resorte por la onda y el flujo de energía de la onda. Este cociente tiene unidades de área y por lo tanto se lo llama “sección eficaz”. La potencia, promediada sobre un período, es

$$W = \frac{1}{2} \text{Re} [F^* v] = \frac{1}{4|Z|^2} m \gamma \omega^6 |h_{11}|^2 L_0^2 \quad (7.84)$$

Mientras que el flujo de energía

$$J = \frac{c^3}{G} \omega^2 |h_{11}|^2 \quad (7.85)$$

de modo que la sección eficaz

$$\sigma = \frac{G}{4c^3 |Z|^2} m \gamma \omega^4 L_0^2 \quad (7.86)$$

En resonancia, $\omega = \omega_0$, resulta

$$\sigma_{GW} = \frac{G m \omega_0}{4c^3} L_0^2 Q \quad (7.87)$$

donde $Q = \omega_0/\gamma$ es el *factor de calidad* del oscilador.

7.7. Some like it hot

Además de la dificultad de medir desplazamientos muy pequeños, es válido preguntarse si es posible rescatar el desplazamiento generado por la onda entre otros desplazamientos generados por una multitud de factores. Para fijar ideas, vamos a considerar solamente los desplazamientos causados por el hecho de que todo detector físico se encuentra a una temperatura finita.

Cuando el oscilador se encuentra a una temperatura T , el teorema clásico de equipartición asegura que se producen fluctuaciones en la posición con un valor medio cero y varianza

$$\langle x^2 \rangle = \frac{k_B T}{m \omega_0^2} \quad (7.88)$$

donde $k_B \approx 10^{-23} \text{ J K}^{-1}$ es la constante de Boltzmann. Para zanjar la contradicción entre la existencia de disipación y la constancia de $\langle x^2 \rangle$ se postula que, de alguna manera, el medio ambiente del oscilador se las ingenia para crear una fuerza F que restaura la amplitud de las fluctuaciones a medida que la disipación las va amortiguando. Con la idea del grano de polen de Brown siendo bombardeado por moléculas de agua, se supone que esta fuerza varía bruscamente en el tiempo, de manera que en cualquier instante dado se la puede suponer como una variable aleatoria con valor medio cero. Si se supone que además es una variable gaussiana (lo cual es sugerido por una aplicación algo arbitraria del Teorema central del límite, ya que la fuerza sería la resultante de un gran número de procesos elementales), entonces sólo queda determinar la autocorrelación de la fuerza. Otra vez con el grano de polen en mente, se postula

$$\langle F(t) F(t') \rangle = \sigma^2 \delta(t - t') \quad (7.89)$$

La covarianza σ^2 queda determinada por la condición de que esta fuerza genere el valor cuadrático medio del desplazamiento adecuado a un estado térmico. Tenemos que

$$x(t) = \int_{-\infty}^t dt' e^{-\gamma(t-t')/2} \frac{\sin[\omega_\gamma(t-t')]}{\omega_\gamma} \frac{F(t')}{m} \quad (7.90)$$

donde

$$\omega_\gamma = \sqrt{\omega_0^2 - \frac{\gamma^2}{4}} \quad (7.91)$$

Asumimos un oscilador *subamortiguado*, es decir que ω_γ es real. Nótese que es innecesario considerar una solución homogénea, puesto que ésta ya a va haber decaído en cualquier tiempo finito. Por lo tanto

$$\begin{aligned}
\langle x^2 \rangle &= \frac{\sigma^2}{m^2 \omega_\gamma^2} \int_0^\infty dt e^{-\gamma t} \sin^2 [\omega_\gamma t] \\
&= \frac{\sigma^2}{2m^2 \omega_\gamma^2} \left[\frac{1}{\gamma} - \frac{1}{2} \left(\frac{1}{\gamma - 2i\omega_k} + \frac{1}{\gamma + 2i\omega_k} \right) \right] = \frac{\sigma^2}{2m^2 \omega_0^2 \gamma}
\end{aligned} \tag{7.92}$$

De esta manera obtenemos el *Teorema de fluctuación-disipación*

$$\sigma^2 = 2m\gamma k_B T \tag{7.93}$$

En vez de la fuerza en dominio tiempo, podemos introducir la transformada de Fourier

$$F(\omega) = \int dt e^{i\omega t} F(t) \tag{7.94}$$

y entonces

$$\langle F(\omega) F(\omega') \rangle = 4\pi m \gamma k_B T \delta(\omega + \omega') \tag{7.95}$$

La descomposición de Fourier del desplazamiento entonces es

$$x[\omega] = \frac{-1}{Z[\omega]} \frac{F[\omega]}{m} \tag{7.96}$$

de donde

$$\langle x(\omega) x(\omega') \rangle = \frac{4\pi \gamma k_B T}{m |Z[\omega]|^2} \delta(\omega + \omega') \tag{7.97}$$

y ahora

$$\langle x^2 \rangle = \int \frac{d\omega}{2\pi} \frac{2\gamma k_B T}{m |Z[\omega]|^2} \tag{7.98}$$

Este es el *Teorema de Wiener-Khinchine*. Este resultado da la descomposición espectral del ruido térmico.

La lógica de este análisis es que si el oscilador estuviera fluctuando con frecuencias distintas a la de la onda, sería irrelevante porque podríamos filtrar la señal. Pero como cualquier filtro realizable va a tener un ancho de banda finito $\Delta\omega$, hay una componente de ruido que no podemos filtrar, que es

$$\frac{2\gamma k_B T}{m |Z[\omega]|^2} \Delta\omega \tag{7.99}$$

Para poder detectar la onda, necesitamos que este ruido esté por debajo del valor cuadrático medio del desplazamiento causado por la onda

$$\frac{1}{4 |Z[\omega]|^2} \omega^4 |h_{11}|^2 L_0^2 \tag{7.100}$$

Por esto este tipo de osciladores sólo es eficiente a alta frecuencia, a temperaturas muy frías, y con anchos de banda muy estrechos.

7.8. Antenas

Una antena es un sólido y no un único resorte. Si consideramos una antena unidimensional, entonces las vibraciones de la antena obedecen la ecuación de ondas

$$\partial_t^2 \xi - c_s^2 \partial_x^2 \xi = 0 \tag{7.101}$$

donde c_s es la velocidad del sonido y $\xi(x, t)$ el desplazamiento de un elemento del material respecto de su posición de equilibrio x . Las ondas obedecen la condición de contorno de extremo fijo en los límites de la antena, digamos $x = 0$ y $x = L$, y por lo tanto admiten una descomposición de Fourier

$$\xi(x, t) = \sum \xi_n(t) \sin n\pi \frac{x}{L} \quad (7.102)$$

cada modo normal es un oscilador

$$\partial_t^2 \xi_n + \omega_n^2 \xi_n = 0 \quad (7.103)$$

con

$$\omega_n^2 = \frac{n^2 \pi^2 c_s^2}{L^2} \quad (7.104)$$

La onda agrega una fuerza sobre cada elemento del material, de modo que en presencia de la onda

$$\frac{1}{c_s^2} \partial_t^2 \xi - \partial_x^2 \xi = \omega^2 h_{11} x e^{-i\omega t} \quad (7.105)$$

Para ver como esta fuerza afecta a cada modo normal tenemos que descomponer

$$x = \sum (-1)^n \frac{2L}{n\pi} \sin n\pi \frac{x}{L} \quad (7.106)$$

de manera que cada modo normal se comporta como un resorte. El modo que más se acopla a la onda es el fundamental.

7.9. Pulsar timing arrays

Los *pulsar timing arrays* (PTAs) buscan detectar ondas gravitatorias correlacionando las fluctuaciones en los períodos de las señales de un grupo de púlsares.

Supongamos un pulsar a una distancia L en la posición \hat{n} en el cielo. Una señal emitida en el tiempo t_e sigue la trayectoria, en ausencia de la onda

$$\begin{aligned} t &= t_e + \frac{1}{c} \ell \\ \vec{x} &= [L - \ell] \hat{n} \end{aligned} \quad (7.107)$$

$0 \leq \ell \leq L$. En presencia de la onda, la ecuación geodésica

$$cdt = d\ell \left[1 + \frac{1}{2} h_{ij} \hat{n}^i \hat{n}^j e^{-ik(L-\ell)[1-\hat{k}\cdot\hat{n}]-ickt_e} \right] \quad (7.108)$$

en el exponente hemos aproximado la trayectoria por la trayectoria en ausencia de la onda. Para un interferómetro el factor que depende de $k(L-\ell)$ sería despreciable, pero no para un pulsar. Integrando, obtenemos el tiempo de llegada

$$\begin{aligned} t_o &= t_e + \frac{L}{c} + \frac{1}{2c} h_{ij} \hat{n}^i \hat{n}^j \int_0^L d\ell e^{-ik(L-\ell)[1-\hat{k}\cdot\hat{n}]-ickt_e} \\ &= t_e + \frac{L}{c} + \frac{i}{2\omega} \frac{h_{ij} \hat{n}^i \hat{n}^j}{[1-\hat{k}\cdot\hat{n}]} \left[1 - e^{-ikL[1-\hat{k}\cdot\hat{n}]} \right] e^{-ickt_e} \end{aligned} \quad (7.109)$$

El efecto de la onda se descompone en dos términos, uno que sólo depende de \hat{n} , y otro que depende de \hat{n} y de L . En una primer aproximación, es suficiente quedarse con el primero.

En la práctica, no tenemos una sola onda sino una superposición de ondas de distinta dirección de propagación, frecuencia, amplitud, polarización y fase. al promediar sobre todas las ondas, el *residuo* $t_r = t_o - t_e - L/c$ se anula en promedio. Ahora, cuando comparamos dos pulsares, uno en la dirección \hat{n} y otro en la dirección \hat{n}' , vemos que los residuos están correlacionados. Asumiendo que el fondo de ondas gravitatorias es isótropo y no polarizado, resulta

$$\langle t_r t_r' \rangle = \int \frac{d\omega}{4\omega^2} \mathcal{P}[\omega] \int d^2\hat{k} \left\{ \frac{\epsilon_{ij}^+ \hat{n}^i \hat{n}^j}{[1-\hat{k}\cdot\hat{n}]} \frac{\epsilon_{ij}^+ \hat{n}'^i \hat{n}'^j}{[1-\hat{k}\cdot\hat{n}']} + \frac{\epsilon_{ij}^\times \hat{n}^i \hat{n}^j}{[1-\hat{k}\cdot\hat{n}]} \frac{\epsilon_{ij}^\times \hat{n}'^i \hat{n}'^j}{[1-\hat{k}\cdot\hat{n}']} \right\} \quad (7.110)$$

donde estamos asumiendo que

$$\langle h_+ [\omega] h_+ [\omega'] \rangle = \langle h_\times [\omega] h_\times [\omega'] \rangle = 2\pi\mathcal{P} [\omega] \delta (\omega + \omega') \quad (7.111)$$

y

$$\langle h_+ [\omega] h_\times [\omega'] \rangle = 0 \quad (7.112)$$

La integral angular se puede hacer, lo cual da un patrón de correlaciones que depende solamente del ángulo entre \hat{n} y \hat{n}' , la *curva de Hellings y Downs*. La detección de este patrón al correlacionar los residuos de un número tan grande como sea posible de pares de pulsares es una manera de hacer manifiesta la existencia de un fondo estocástico de ondas gravitatorias. Además, esta técnica es útil en el rango de frecuencias de nano-Hertz, muy por debajo de las accesibles a interferómetros (aún los futuros interferómetros en órbita) y antenas.

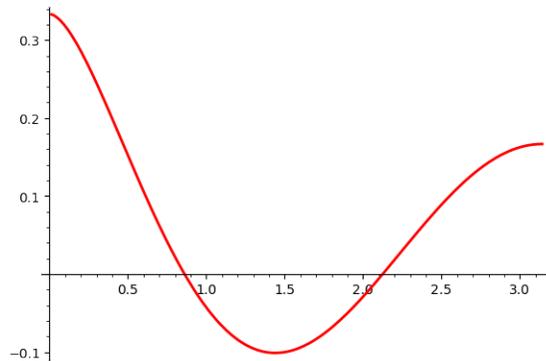


Figura 7.1: La curva de Hellings y Downs, en función del ángulo entre las direcciones \hat{n} y \hat{n}' .

7.10. Sensibilidad de detectores interferométricos de ondas gravitatorias

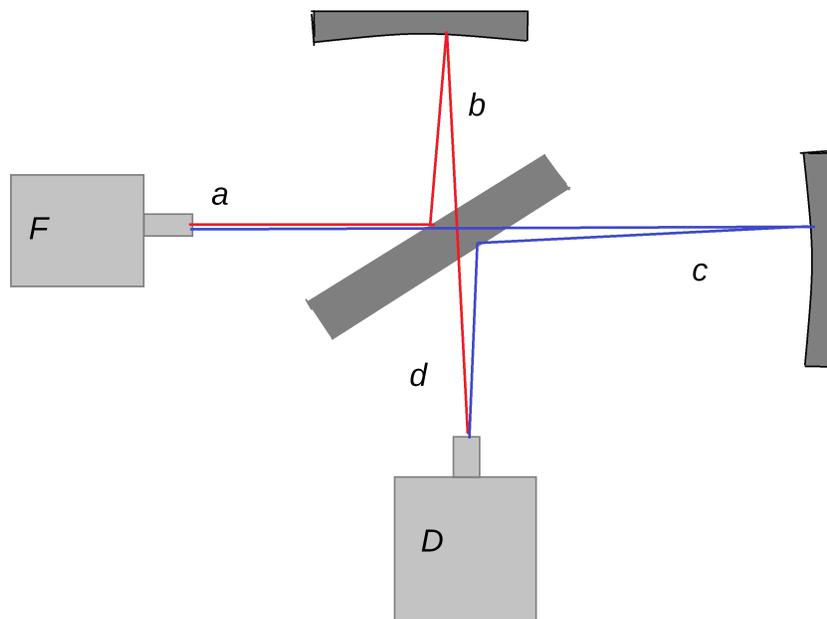


Figura 7.2: Esquema de LIGO.

Supongamos que el beam splitter divide el haz del láser en dos partes de igual intensidad. Entonces, si en el tramo a el campo eléctrico es E_a , en los brazos b y c tenemos $E_{b,c} = E_a/\sqrt{2}$. Cada haz adquiere un desfase

$\phi_{b,c} = \phi_{0,b,c} + \alpha z_{b,c}$ donde $z_{b,c}$ es el desplazamiento del espejo respectivo (nótese que $\alpha \approx N_{ef}/\lambda_L$, donde λ_L es la longitud de onda del láser y N_{ef} el número efectivo de veces que el haz “rebota” contra el espejo. Al recombinarse los haces pasan al brazo d con una amplitud

$$E_d = \frac{E_a}{\sqrt{2}} \left(e^{i(\phi_{0b} + \alpha z_b)} + e^{i(\phi_{0c} + \alpha z_c)} \right) \quad (7.113)$$

Lo que se mide es

$$I = |E_d|^2 = 2I_L \cos^2 \frac{1}{2} [\phi_{0b} - \phi_{0c} + \alpha \Delta z] \quad (7.114)$$

$\Delta z = z_b - z_c$, $I_L = |E_a|^2$. Nótese que un error δz en Δz induce un error

$$\delta I = I_L \sin [\phi_{0b} - \phi_{0c} + \alpha \Delta z] \frac{\alpha}{2} \delta z \quad (7.115)$$

Descontados todos los ruidos controlables (ruido térmico, sísmico, ruido en la electrónica, etc.), quedan dos ruidos irreducibles: fluctuaciones en la intensidad del láser (*shot noise*), y el desplazamiento de los espejos debido a la presión de radiación de los haces sobre los espejos. Para poder compararlos, vamos a convertir el error

$$\delta I_{shot} = 2\delta I_L \cos^2 \frac{1}{2} [\phi_{0b} - \phi_{0c} + \alpha \Delta z] \quad (7.116)$$

en un desplazamiento efectivo de los espejos

$$\delta z_{shot} = \frac{2\delta I_{shot}}{\alpha I_L \sin [\phi_{0b} - \phi_{0c} + \alpha \Delta z]} = \frac{2\delta I_L}{\alpha I_L \tan \frac{1}{2} [\phi_{0b} - \phi_{0c} + \alpha \Delta z]} \quad (7.117)$$

Para estimar δI_L vamos a suponer que el número de fotones en el haz sigue una distribución de Poisson

$$p(n) = e^{-\bar{n}} \frac{\bar{n}^n}{n!} \quad (7.118)$$

donde el número medio de fotones es $\bar{n} = I_L / (\hbar\omega_L)$. Entonces $\overline{n^2} - \bar{n}^2 = \bar{n}$, y

$$\delta I_L^2 = \hbar\omega_L I_L \quad (7.119)$$

de donde

$$\delta z_{shot}^2 = \frac{K_{shot}}{I_L} \quad (7.120)$$

donde lo único que necesitamos saber de K_{shot} es que es una combinación de parámetros conocidos que no depende de la frecuencia a la que se está midiendo.

Para calcular el desplazamiento de los espejos debido a la presión de radiación, observamos que, como el tiempo de colisión de un fotón contra el espejo es mucho mas corto que el tiempo de relajación o de la frecuencia propia de oscilación de la montura del espejo, el espejo responde al impulso como si fuera una partícula libre,

$$\delta z_{pr} = -\frac{\delta f}{M\omega^2} \quad (7.121)$$

donde f es la fluctuación en la fuerza sobre el espejo, M la masa del espejo y ω la frecuencia a la que se mide. La fuerza es el impulso $2\hbar\omega_L/c$ transferido al espejo en cada colisión por el número de colisiones por unidad de tiempo, que es proporcional a ncA/V , donde A es el área del espejo y V el volumen del brazo del interferómetro. Por lo tanto, la fluctuación en la fuerza es nuevamente debida a las fluctuaciones en el número de fotones, y

$$\delta z_{pr}^2 = \frac{K_{pr} I_L}{\omega^4} \quad (7.122)$$

Asumiendo que estos errores son independientes, encontramos

$$\delta z^2 = \delta z_{shot}^2 + \delta z_{pr}^2 = \frac{K_{shot}}{I_L} + \frac{K_{pr} I_L}{\omega^4} \quad (7.123)$$

Para una frecuencia dada, existe un límite inferior absoluto, que se obtiene cuando

$$I_L = \sqrt{\frac{K_{shot}}{K_{pr}}} \omega^2 \quad (7.124)$$

y vale

$$\delta z_{SQL}^2 = 2 \frac{\sqrt{K_{shot} K_{pr}}}{\omega^2} \quad (7.125)$$

Este es el *standard quantum limit* (SQL).

Capítulo 8

La solución de Schwarzschild

Queremos estudiar soluciones de la ecuación de Einstein con simetría esférica¹. Eso quiere decir que el espacio tiempo puede foliarse en una colección de variedades 2-dimensionales con la geometría de una esfera, en la que no hay direcciones privilegiadas. Definiendo la coordenada radial por la condición de que el área propia de la esfera valga $4\pi r^2$, una métrica con simetría esférica tiene la forma

$$ds^2 = -f dt^2 + g dr^2 + r^2 (d\theta^2 + \sin^2 \theta d\phi^2) + 2h dt dr \quad (8.1)$$

donde en principio f , g y h son funciones de t y r . A partir de este punto vamos a asumir que $G = c = 1$. Eso no es problema porque estas constantes sólo van a aparecer en la combinación $2GM/c^2$, donde M es una constante con unidades de masa. Por lo tanto, reteniendo el parámetro M es obvio como reinstalar a G y c en las ecuaciones.

Si además de la simetría esférica pedimos que la métrica sea *estacionaria*, entonces desaparecen las dependencias respecto de t , y si pedimos que sea *estática*, entonces $h = 0$. En estas condiciones encontramos el *Teorema de Birkhoff*: la única solución de las ecuaciones de Einstein en vacío, estática y esféricamente simétrica es la *solución de Schwarzschild*, que corresponde a

$$f = \frac{1}{g} = 1 - \frac{2M}{r} \quad (8.2)$$

donde M es el parámetro ya mencionado. Comparando con el límite de campo débil para $r \rightarrow \infty$, vemos que esta métrica representa el campo de un objeto de masa M y sin rotación.

Nótese que t es el “tiempo” sólo si $r > 2M$; si $r < 2M$, la coordenada temporal es r (o mejor, como veremos, $2M - r$). La esfera $r = 2M$ (llamada el *horizonte* es especial; ver porqué es especial nos va a llevar gran parte de lo que queda del curso).

En vacío las ecuaciones de Einstein se reducen a que se anula el tensor de Ricci; sin calcular todas las ecuaciones vamos a verificar que en la solución de Schwarzschild, $R_{00} = 0$. Para eso necesitamos calcular primero la conexión y el tensor de Riemann.

Una manera de encontrar la conexión que es un poco más eficiente que simplemente usar la definición es encontrar la ecuación geodésica

$$\frac{d}{ds} \frac{dx^\mu}{ds} = -\Gamma_{\nu\rho}^\mu \frac{dx^\nu}{ds} \frac{dx^\rho}{ds} \quad (8.3)$$

e identificar los coeficientes en el lado derecho. la ecuación geodésica puede deducirse de la acción

$$S = \int d\tau \sqrt{g_{\nu\rho} \frac{dx^\nu}{d\tau} \frac{dx^\rho}{d\tau}} \quad (8.4)$$

donde τ es un parámetro arbitrario; nótese que el Lagrangiano es simplemente $ds/d\tau$. Las ecuaciones de Euler-Lagrange son

$$\frac{d}{d\tau} \frac{1}{\frac{ds}{d\tau}} g_{\mu\rho} \frac{dx^\rho}{d\tau} = \frac{1}{2 \frac{ds}{d\tau}} g_{\nu\rho,\mu} \frac{dx^\nu}{d\tau} \frac{dx^\rho}{d\tau} \quad (8.5)$$

Ahora, podemos usar la libertad en elegir τ y poner $\tau = s$, en cuyo caso obtenemos

¹En esta clase nos basamos fundamentalmente en K. Thorne y R. Blandford, *Modern Classical Physics*, Princeton U. P. (2017).

$$\frac{d}{ds} g_{\mu\rho} \frac{dx^\rho}{ds} = \frac{1}{2} g_{\nu\rho,\mu} \frac{dx^\nu}{ds} \frac{dx^\rho}{ds} \quad (8.6)$$

Estas ecuaciones pueden deducirse de la acción

$$S = \frac{1}{2} \int ds g_{\nu\rho} \frac{dx^\nu}{ds} \frac{dx^\rho}{ds} \quad (8.7)$$

donde nos hemos ahorrado la raíz cuadrada. Asumiendo desde ya una solución estática, encontramos por ejemplo

$$-\frac{d}{ds} f \frac{dt}{ds} = 0 \quad (8.8)$$

o sea (usando $' = d/dr$)

$$\frac{d^2 t}{ds^2} = -\frac{f'}{f} \frac{dt}{ds} \frac{dr}{ds} \quad (8.9)$$

de donde

$$\Gamma_{rt}^t = \frac{f'}{2f} \quad (8.10)$$

y todos los otros elementos de la conexión de la forma Γ_{algo}^t son cero. Para r encontramos

$$\frac{d^2 r}{ds^2} = \frac{1}{2g} \left[-f' \left(\frac{dt}{ds} \right)^2 - g' \left(\frac{dr}{ds} \right)^2 + 2r \left(\left(\frac{d\theta}{ds} \right)^2 + \sin^2 \theta \left(\frac{d\varphi}{ds} \right)^2 \right) \right] \quad (8.11)$$

Entonces

$$\Gamma_{tt}^r = \frac{f'}{2g} \quad \Gamma_{rr}^r = \frac{g'}{2g} \quad \Gamma_{\theta\theta}^r = -\frac{r}{g} \quad \Gamma_{\varphi\varphi}^r = -\frac{r}{g} \sin^2 \theta \quad (8.12)$$

Para θ encontramos

$$\frac{d^2 \theta}{ds^2} = -\frac{2}{r} \frac{dr}{ds} \frac{d\theta}{ds} + \sin \theta \cos \theta \left(\frac{d\varphi}{ds} \right)^2 \quad (8.13)$$

o sea

$$\Gamma_{r\theta}^\theta = \frac{1}{r} \quad \Gamma_{\varphi\varphi}^\theta = -\sin \theta \cos \theta \quad (8.14)$$

Finalmente

$$\frac{d}{ds} r^2 \sin^2 \theta \frac{d\varphi}{ds} = 0 \quad (8.15)$$

y entonces

$$\Gamma_{r\varphi}^\varphi = \frac{1}{r} \quad \Gamma_{\theta\varphi}^\varphi = \frac{\cos \theta}{\sin \theta} \quad (8.16)$$

Con este resultado terminamos de calcular la conexión. Para calcular R_{tt} , observamos que

$$R_{tt} = R_{trt}^r + R_{t\theta t}^\theta + R_{t\varphi t}^\varphi \quad (8.17)$$

Con los valores de la conexión que hemos encontrado

$$\begin{aligned} R_{t\theta t}^\theta &= R_{t\varphi t}^\varphi = \frac{f'}{2rg} \\ R_{trt}^r &= \left(\frac{f'}{2g} \right)' + \frac{g'}{2g} \frac{f'}{2g} - \frac{f'}{2g} \frac{f'}{2f} \end{aligned} \quad (8.18)$$

En la solución de Schwarzschild tenemos además que $g = 1/f$ y por eso $g'/g = -f'/f$. Usando estas propiedades para eliminar a g , encontramos que

$$R_{tt} = \frac{f}{2} \left(f'' + \frac{2f}{r} \right) \quad (8.19)$$

que efectivamente se anula si

$$f = 1 - \frac{2M}{r} \quad f' = \frac{2M}{r^2} \quad f'' = -\frac{4M}{r^3} \quad (8.20)$$

Una observación importante es que el tensor de Ricci se anula, pero el tensor de Riemann no (esto es obvio, por ejemplo, viendo el valor de $R_{t\theta t}$ calculado más arriba), de modo que estamos tratando realmente con un espacio-tiempo curvo. Una segunda observación es que las componentes del tensor de Riemann no son singulares en el horizonte $r = 2M$, que por lo tanto no es una singularidad del espacio-tiempo, sino sólo de las coordenadas de Schwarzschild. Por otro lado, las componentes del tensor de Riemann se comportan como M/r^3 , de manera que $r = 0$ sí es un punto singular. Por ejemplo, las fuerzas que aparecen entre dos partículas próximas, calculadas a partir de la ecuación de desviación geodésica, divergen si las partículas se aproximan a la singularidad. Está claro que cualquier objeto extenso sería destrozado por estas fuerzas diferenciales mucho antes de alcanzar la singularidad.

8.1. ¿Qué es especial acerca del horizonte?

Aunque el horizonte no sea una singularidad física, tampoco es una esfera cualquiera. Una parte importante del trabajo que tenemos por delante es entender sus propiedades.

La primera cosa que salta a la vista es que la línea de tiempo $r = 2M$, $\theta, \varphi = \text{constantes}$ es la trayectoria de un rayo de luz, ya que a lo largo de esta línea el intervalo se anula $ds^2 = 0$. En la medida en que un observador físico no puede viajar más rápido que la luz, debe haber obstrucciones para salir del interior de la esfera $r = 2M$, por el mismo motivo que un observador en Minkowski no puede salir de su cono de la luz.

Una manera de visualizar la naturaleza del horizonte es encontrar la expresión para todas las otras trayectorias de rayos de luz radiales. Es decir, queremos resolver

$$ds^2 = -f dt^2 + \frac{dr^2}{f} = 0 \quad (8.21)$$

con $f = 1 - 2M/r$.

Empecemos considerando el caso $f > 0$. Tenemos que en una trayectoria nula

$$dt = \pm \frac{dr}{f} \quad (8.22)$$

En un rayo de luz saliente, $dr/dt > 0$. Entonces un rayo de luz saliente es tal que

$$dt - \frac{dr}{f} = 0 \quad (8.23)$$

Esta combinación de dt y dr es un diferencial exacto, es decir, existe una función u tal que

$$du = dt - \frac{dr}{f} \quad (8.24)$$

y entonces los rayos de luz salientes corresponden a las líneas $u = \text{constante}$. Por la misma razón, existe una función v tal que

$$dv = dt + \frac{dr}{f} = du + 2\frac{dr}{f} \quad (8.25)$$

v es constante en los rayos de luz entrantes. Integrando la ecuación para dv encontramos

$$v = u + 2 \int^r \frac{dr'}{1 - \frac{2M}{r'}} = u + r + 2M \ln(r - 2M) \quad (8.26)$$

y la ecuación para un rayo de luz entrante es

$$u + 2r + 4M \ln(r - 2M) = v_0 = \text{constante} \quad (8.27)$$

Para fijar la constante, pedimos que en $u = 0$ el rayo se encuentre en $r = r_0$, y entonces

$$u = 2(r_0 - r) + 4M \ln \frac{r_0 - 2M}{r - 2M} \quad (8.28)$$

Cuando $r \gg r_0$ esto se reduce a $u = r_0 - r$, pero cuando $r \rightarrow 2M$ el logaritmo diverge, y el rayo no alcanza el horizonte para ningún valor finito de u .

Cuando $f < 0$, tenemos en cambio

$$dt = \pm \frac{dr}{|f|} \quad (8.29)$$

Nuevamente definimos

$$du = dt - \frac{dr}{|f|} \quad (8.30)$$

Recordemos que ahora el “tiempo” es $2M - r$. La otra familia de rayos está dada por

$$dv = dt + \frac{dr}{|f|} = du + 2\frac{dr}{|f|} \quad (8.31)$$

Integrando obtenemos

$$u - 2r - 4M \ln(2M - r) = v'_0 = \text{constante} \quad (8.32)$$

Nuevamente cambiamos la constante por la abscisa

$$u = -2(r_0 - r) + 4M \ln \frac{2M - r}{2M - r_0} \quad (8.33)$$

Vemos que todas estas curvas son asintóticas a $r = 2M$ cuando $u \rightarrow -\infty$, mientras que cuando $r \rightarrow 0$ encontramos

$$\begin{aligned} u &= -2r_0 - 4M \ln \left(1 - \frac{r_0}{2M}\right) + 2r + 4M \ln \left(1 - \frac{r}{2M}\right) \\ &= u_0 + 2r - 4M \left[\frac{r}{2M} + \frac{1}{2} \left(\frac{r}{2M}\right)^2 + \frac{1}{3} \left(\frac{r}{2M}\right)^3 + \dots \right] \\ &\approx u_0 - \frac{r^2}{2M} \end{aligned} \quad (8.34)$$

Observamos que no sólo todos los rayos alcanzan la singularidad en un valor finito de u , sino que además los conos de la luz se van estrechando, haciendo que sea imposible escaparle a ese destino.

8.2. La estructura causal del espacio de Schwarzschild

De los resultados de la clase pasada se desprende que en el espacio de Schwarzschild hay dos esferas con características especiales, correspondientes a $r = 0$ y a $r = 2M$ (seguimos usando unidades naturales con $G = c = 1$). La primera es una singularidad física, caracterizada por la divergencia de las componentes del tensor de Riemann. La segunda es sólo una singularidad del sistema de coordenadas, pero aún así tiene características que es útil desarrollar.

Respecto a la singularidad en $r = 0$, notamos que el interior del *horizonte* $r = 2M$, r es la coordenada temporal, de manera que $r = 0$ es el *futuro* de todos los observadores que atravesen el horizonte. Por otro lado, observamos que las trayectorias con $r = 2M$, $d\theta = d\varphi = 0$ son geodésicas nulas, es decir trayectorias de un rayo de luz. Por este motivo, ninguna señal originada *dentro* del horizonte puede escapar al exterior - debería moverse más rápido que la luz. Es en este sentido que la esfera $r = 2M$ se comporta efectivamente como un horizonte para los observadores lejanos.

Los *diagramas de Penrose* son una representación gráfica de las propiedades causales de un espacio-tiempo que facilitan visualizar este tipo de propiedades.

Consideremos un espacio tiempo estacionario y supongamos que “congelamos” dos de las cuatro coordenadas del espacio tiempo, $x^2 = x^3 = 0$. Entonces el intervalo se expresa respecto de las coordenadas restantes $x^0 = ct$ y $x^1 = r$ como

$$ds^2 = -c^2 N(r) dt^2 + 2cF(r) dt dr + G(r) dr^2 \quad (8.35)$$

que puede reescribirse como

$$ds^2 = -N dU dV \quad (8.36)$$

donde

$$\begin{aligned} dU &= cdt - \left(\sqrt{\frac{G}{N} + \left(\frac{F}{N}\right)^2} + \frac{F}{N} \right) dr \\ dV &= cdt + \left(\sqrt{\frac{G}{N} + \left(\frac{F}{N}\right)^2} - \frac{F}{N} \right) dr \end{aligned} \quad (8.37)$$

(U, V) se llaman *coordenadas nulas*, porque las curvas $U = \text{constante}$ o $V = \text{constante}$ son geodésicas nulas, es decir trayectorias de un rayo de luz. Generalmente las coordenadas (U, V) toman valores en toda la recta; definiendo nuevas coordenadas (u, v) tales que

$$\begin{aligned} U &= \tan u \\ V &= \tan v \end{aligned} \quad (8.38)$$

entonces

$$ds^2 = \frac{-N}{\cos^2 u \cos^2 v} du dv \quad (8.39)$$

podemos mapear todo el espacio tiempo original en el cuadrado $[-\pi/2, \pi/2] \times [-\pi/2, \pi/2]$. El *diagrama de Penrose* del espacio tiempo es entonces una representación de este cuadrado, donde las líneas $u = \text{constante}$ o $v = \text{constante}$ se representan como rectas a 45° grados.

Por ejemplo, la fig. (8.1) representa el diagrama de Penrose del espacio de Minkowski, donde $U = ct - r$ y $V = ct + r$. Los rayos de luz con $u = \text{constante}$ nacen del lado $v = -\pi/2$ y terminan en el lado $v = \pi/2$; similarmente, los rayos de luz con $v = \text{constante}$ nacen en $u = -\pi/2$ y terminan en $u = \pi/2$. Por lo tanto, los lados $v = -\pi/2$ y $u = -\pi/2$ representan el pasado infinito nulo, mientras que $v = \pi/2$ y $u = \pi/2$ son el futuro infinito nulo.

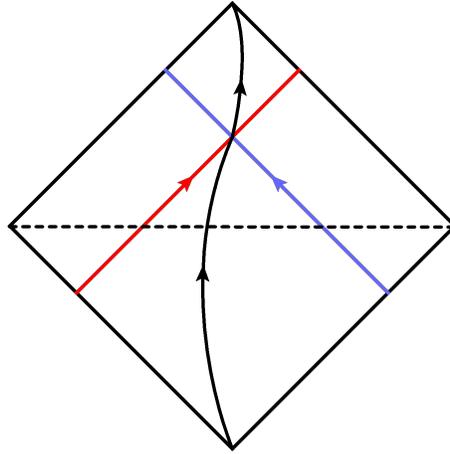


Figura 8.1: Diagrama de Penrose del espacio de Minkowski

En cambio, las trayectorias de partículas reales comienzan en el vértice $u = v = -\pi/2$ y terminan en $u = v = \pi/2$, estos vértices representan el pasado y el futuro temporales, respectivamente, mientras que un plano $t = \text{constante}$ interpola entre los vértices $v = -u = -\pi/2$ y $v = -u = \pi/2$, que representan el infinito espacial.

Un diagrama de Penrose más interesante es el correspondiente al espacio de Rindler, que es el espacio de Minkowski visto por una familia de observadores uniformemente acelerados.

Así como la ttravelocidad es una generalización del concepto de velocidad que es un vector, es conveniente generalizar el concepto de aceleración e introducir la tetra aceleración

$$a^\mu = u^\nu \nabla_\nu u^\mu \quad (8.40)$$

Por la normalización de la ttravelocidad $u^2 = -1$ debe ser

$$u_\mu a^\mu = 0 \quad (8.41)$$

Por lo tanto, no existe una trayectoria no trivial en que $a^\mu = \text{constante}$ idénticamente. Lo más parecido a un móvil *uniformemente acelerado* es un móvil tal que $a_\mu a^\mu = \text{constante}$.

Consideremos un móvil moviéndose en la dirección x en el espacio de Minkowski. Entonces la velocidad ordinaria $v = dx/dt$. El intervalo

$$ds^2 = dt^2 [1 - v^2] \quad (8.42)$$

Por lo tanto la ttravelocidad es

$$\begin{aligned} u^0 &= \frac{1}{\sqrt{1-v^2}} \\ u^1 &= \frac{v}{\sqrt{1-v^2}} \\ u^2 = u^3 &= 0 \end{aligned} \quad (8.43)$$

La tetraaceleración

$$\begin{aligned} a^0 &= \frac{1}{\sqrt{1-v^2}} \frac{d}{dt} \frac{1}{\sqrt{1-v^2}} \\ a^1 &= \frac{1}{\sqrt{1-v^2}} \frac{d}{dt} \frac{v}{\sqrt{1-v^2}} \\ a^2 = a^3 &= 0 \end{aligned} \quad (8.44)$$

Calculando las derivadas con $a = dv/dt$

$$\begin{aligned} a^0 &= \frac{v}{[1-v^2]^2} a \\ a^1 &= \frac{1}{[1-v^2]^2} a \end{aligned} \quad (8.45)$$

La condición de aceleración uniforme por lo tanto es

$$a_\mu a^\mu = \frac{a^2}{[1-v^2]^3} \equiv \frac{1}{\rho^2} = \text{constante} \quad (8.46)$$

Si parametrizamos $v = \tanh \tau$, entonces

$$\begin{aligned} t &= \rho \sinh \tau \\ x &= \rho \cosh \tau \end{aligned} \quad (8.47)$$

Podemos pensar a (τ, ρ) como nuevas coordenadas en la región $0 \leq |t| \leq x$ (fig. (8.2)). Esta es la *cuña de Rindler*

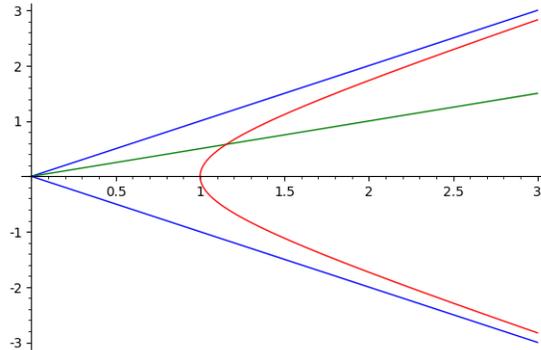


Figura 8.2: La cuña de Rindler. La línea roja es una trayectoria con $\rho = \text{constante}$, la línea verde corresponde a $\tau = \text{constante}$.

Entonces $dt = (t/\rho) d\rho + (x) d\tau$, $dx = (x/\rho) d\rho + t d\tau$ y

$$ds^2 = -\rho^2 d\tau^2 + d\rho^2 \quad (8.48)$$

Las líneas $\rho = \text{constante}$ describen las trayectorias de observadores uniformemente acelerados, con aceleración $a = 1/\rho$. El tiempo propio de cada observador es $\rho\tau$.

Para dibujar el diagrama de Penrose del espacio de Rindler 8.3, observamos que todas las curvas $\rho = \text{constante}$ son asintóticas a la geodésica $t + x = 0$ cuando $\tau \rightarrow -\infty$, y a la geodésica $t - x = 0$ cuando $\tau \rightarrow \infty$. Esta geodésica funciona como un horizonte para estos observadores. Ninguna señal originada en un punto con $t > x$ (por ejemplo, el punto marcado con una estrella) puede alcanzar la cuña de Rindler, ya que para eso debería moverse más rápido que la luz.

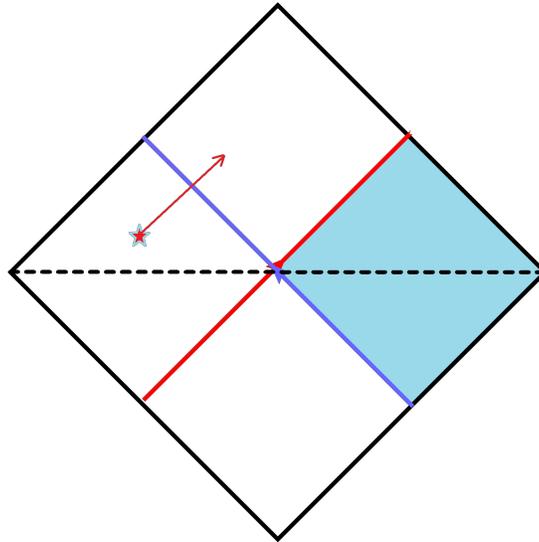


Figura 8.3: Diagrama de Penrose de la cuña de Rindler (la zona coloreada)

El espacio de Schwarzschild comparte con la cuña de Rindler la existencia de un horizonte. La diferencia es que mientras que los observadores no acelerados que crucen el horizonte de Rindler van a encontrar del otro lado un espacio de Minkowski no muy distinto del que dejaron, a los observadores que crucen el horizonte de Schwarzschild los espera la verdadera singularidad en $r = 0$. Por eso el diagrama de Penrose del espacio de Schwarzschild se ve como en la fig. 8.4.

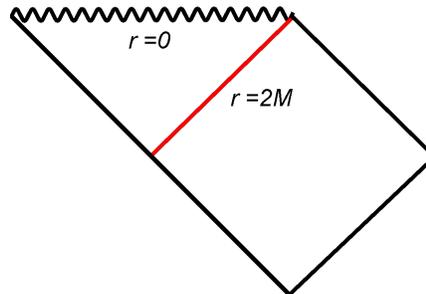


Figura 8.4: Diagrama de Penrose del espacio-tiempo de Schwarzschild.

8.2.1. Referencial síncrono

Otra manera de visualizar las propiedades del espacio de Schwarzschild es construir un *referencial síncrono*. La idea es que en algún momento dado $t = 0$ poblamos el espacio con observadores, cada uno llevando un reloj sincronizado con los de los demás, de manera que todos marcan un tiempo $s = 0$, y los soltamos, partiendo del reposo, de manera de dejarlos caer sobre el agujero negro siguiendo curvas geodésicas temporales. De ese modo, en cada evento estará presente uno de nuestros observadores, y podemos caracterizar al evento por las coordenadas que ese observador ocupaba en $t = 0$, y por el tiempo propio (el tiempo marcado por su reloj) de ese observador al ocurrir el evento.

Por simpleza vamos a considerar que los observadores caen todos radialmente sobre el agujero. Una geodésica temporal obedece

$$-\left(1 - \frac{2M}{r}\right) \left(\frac{dt}{ds}\right)^2 + \frac{\left(\frac{dr}{ds}\right)^2}{\left(1 - \frac{2M}{r}\right)} = -1 \tag{8.49}$$

y su ecuación de movimiento se deduce de la acción

$$S = \int ds \frac{1}{2} \left\{ -\left(1 - \frac{2M}{r}\right) \left(\frac{dt}{ds}\right)^2 + \frac{\left(\frac{dr}{ds}\right)^2}{\left(1 - \frac{2M}{r}\right)} \right\} \tag{8.50}$$

Como t es una coordenada cíclica su momento conjugado se conserva

$$\left(1 - \frac{2M}{r}\right) \left(\frac{dt}{ds}\right) = E = \text{constante} \quad (8.51)$$

Podemos llegar a la misma conclusión notando que $\xi^\mu = (1, 0, 0, 0)$ es un vector de Killing y por lo tanto $\xi_\mu u^\mu$ es constante a lo largo de una geodésica. Ahora tenemos

$$\frac{\left(\frac{dr}{ds}\right)^2 - E^2}{\left(1 - \frac{2M}{r}\right)} = -1 \quad (8.52)$$

o

$$\left(\frac{dr}{ds}\right)^2 = E^2 - 1 + \frac{2M}{r} \quad (8.53)$$

La condición de que $dr/ds = 0$, $r = r_0$ en $s = 0$ indica que

$$\left(\frac{dr}{ds}\right)^2 = 2M \left[\frac{1}{r} - \frac{1}{r_0}\right] \quad (8.54)$$

La solución que cae al agujero corresponde a

$$\frac{dr}{ds} = -\sqrt{2M \left[\frac{1}{r} - \frac{1}{r_0}\right]} \quad (8.55)$$

o sea

$$\sqrt{2M} ds = -\sqrt{\frac{r_0 r}{r_0 - r}} dr \quad (8.56)$$

La idea es buscar una solución paramétrica, es decir una solución donde la relación entre r y s está dada indirectamente a través de la relación de cada uno con una tercer variable ξ : $r = r(\xi)$, $s = s(\xi)$. Para la primer dependencia proponemos

$$r = r_0 \cos^2 \xi \quad (8.57)$$

Este observador arranca en $\xi = 0$ y cae a la singularidad cuando $\xi = \pi/2$. En algún punto intermedio atraviesa el horizonte, y queremos ver si hay algún comportamiento anómalo asociado con ese evento. Reemplazando en 8.56 obtenemos

$$\sqrt{\frac{2M}{r_0^3}} ds = \cos^2 \xi d\xi \quad (8.58)$$

que se integra inmediatamente a

$$s = \sqrt{\frac{r_0^3}{8M}} \left[\xi + \frac{1}{2} \sin 2\xi \right] \quad (8.59)$$

El observador cae a la singularidad cuando su reloj marca

$$s = \frac{\pi}{2} \sqrt{\frac{r_0^3}{8M}} \quad (8.60)$$

y nada extraño ocurre cuando cruza el horizonte.

La situación cambia si describimos la trayectoria en términos del tiempo coordenado, que es el tiempo propio de un observador en infinito. Ahora tenemos

$$\frac{dt}{dr} = -\frac{1}{(r-2M)} \sqrt{\frac{r^3 (r_0 - 2M)}{2M (r_0 - r)}} \quad (8.61)$$

Cuando $r \rightarrow 2M$, dt/dr exhibe una divergencia no integrable, y vemos que

$$t = 2M \ln \frac{1}{(r - 2M)} + \dots \quad (8.62)$$

Para el observador en infinito, el observador móvil no alcanza el horizonte en ningún tiempo finito. Este es uno de los casos más extremo de dilatación temporal en registro.

Incidentalmente, hemos resuelto el problema del colapso de un cuerpo esféricamente simétrico y sin presión. Por la simetría esférica, fuera del cuerpo la métrica corresponde a la solución de Schwarzschild, y por continuidad eso se aplica hasta en la superficie del cuerpo. Por la ausencia de presión, un punto en la superficie se mueve describiendo una geodésica, o sea lo que acabamos de resolver.

Un caso particular curioso es cuando el cuerpo es una nube de polvo, inicialmente con densidad uniforme. Por la simetría esférica y la ausencia de presión, ahora cada punto del cuerpo, inicialmente en el radio r_0 , sigue una geodesica en la métrica de Schwarzschild determinada por la masa dentro de la esfera de radio r_0 . Si la densidad inicial es uniforme, entonces esta masa se relaciona con el radio como $M = (4\pi/3) \rho r_0^3$, y de la ecuación 8.60 vemos que todos los elementos del cuerpo caen a la singularidad *al mismo tiempo propio*.

8.3. Órbitas en el espacio de Schwarzschild

En esta clase nos interesa estudiar las órbitas de partículas test en el espacio de Schwarzschild.

Empecemos por la órbita de una partícula de masa no nula. La normalización de la tetravelocidad da

$$-\left(1 - \frac{2M}{r}\right) \left(\frac{dt}{ds}\right)^2 + \frac{\left(\frac{dr}{ds}\right)^2}{\left(1 - \frac{2M}{r}\right)} + r^2 \left(\frac{d\varphi}{ds}\right)^2 = -1 \quad (8.63)$$

donde hemos asumido una órbita en el plano ecuatorial, sin pérdida de generalidad. Tenemos las leyes de conservación

$$\begin{aligned} \left(1 - \frac{2M}{r}\right) \left(\frac{dt}{ds}\right) &= E = \text{constante} \\ r^2 \left(\frac{d\varphi}{ds}\right) &= L = \text{constante} \end{aligned} \quad (8.64)$$

de manera que

$$\frac{\left(\frac{dr}{ds}\right)^2 - E^2}{\left(1 - \frac{2M}{r}\right)} + \frac{L^2}{r^2} = -1 \quad (8.65)$$

o bien

$$\left(\frac{dr}{ds}\right)^2 - \frac{2M}{r} + \frac{L^2}{r^2} - \frac{2ML^2}{r^3} = E^2 - 1 \quad (8.66)$$

Excepto por el término cúbico, es idéntica a la conservación de la energía newtoniana. Como en el caso Newtoniano, conviene hacer la sustitución

$$u = \frac{1}{r} \quad (8.67)$$

entonces

$$\frac{1}{u^4} \left(\frac{du}{ds}\right)^2 - 2Mu + L^2u^2 - 2ML^2u^3 = E^2 - 1 \quad (8.68)$$

por otro lado

$$\frac{du}{ds} = \frac{du}{d\varphi} \frac{d\varphi}{ds} = Lu^2 \frac{du}{d\varphi} \quad (8.69)$$

de modo que

$$\frac{1}{2} \left(\frac{du}{d\varphi}\right)^2 + V[u] = \frac{1}{2L^2} (E^2 - 1) \equiv \epsilon \quad (8.70)$$

donde

$$V[u] = -\frac{M}{L^2}u + \frac{1}{2}u^2 - Mu^3 \quad (8.71)$$

El potencial efectivo es cero en $u = 0$ y en

$$u_{\pm}^0 = \frac{1}{4M} \left[1 \pm \sqrt{1 - \frac{16M^2}{L^2}} \right] \quad (8.72)$$

Si $L \leq 4M$, el potencial efectivo es negativo para todo u positivo.

Los puntos críticos del potencial efectivo están en

$$-\frac{M}{L^2} + u - 3Mu^2 = 0 \quad (8.73)$$

o sea

$$u_{\pm}^{cr} = \frac{1}{6M} \left[1 \pm \sqrt{1 - 12 \frac{M^2}{L^2}} \right] \quad (8.74)$$

La derivada segunda del potencial efectivo es

$$V'' = 1 - 6Mu \quad (8.75)$$

de manera que $u = 1/6M$ es siempre un punto de inflexión. Cuando $L = 4M$ el punto crítico más próximo al agujero negro, o sea el de mayor valor de u , se encuentra en $1/4M$, como debe ser. Los puntos críticos son los radios de órbitas circulares; $V'' [u_-^{cr}] > 0$, de modo que esta órbita es estable, mientras que la órbita con u_+^{cr} es inestable. Si $L < 2\sqrt{3}M$, las órbitas circulares desaparecen, y todas las órbitas eventualmente caen sobre el agujero negro. El menor radio que puede tener la órbita circular inestable es $u = 1/3M$. El menor radio que puede tener la órbita circular estable es $u_{ISCO} = 1/6M$.

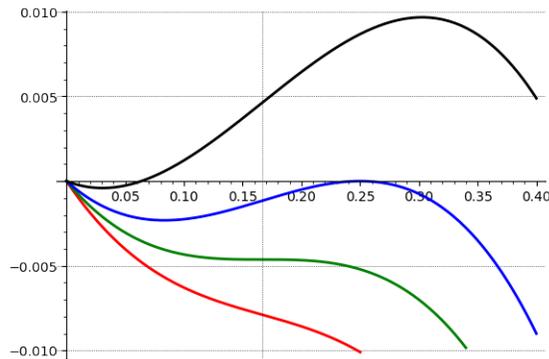


Figura 8.5: El potencial efectivo en función de u para distintos valores de L .

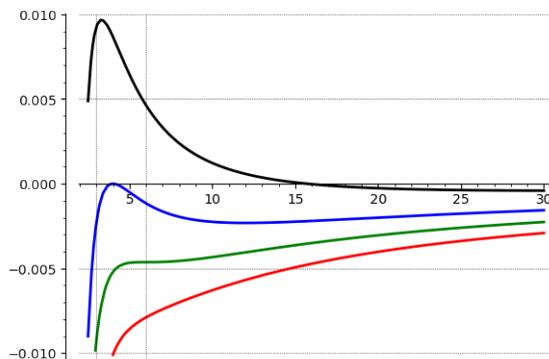


Figura 8.6: El potencial efectivo en función de r para distintos valores de L .

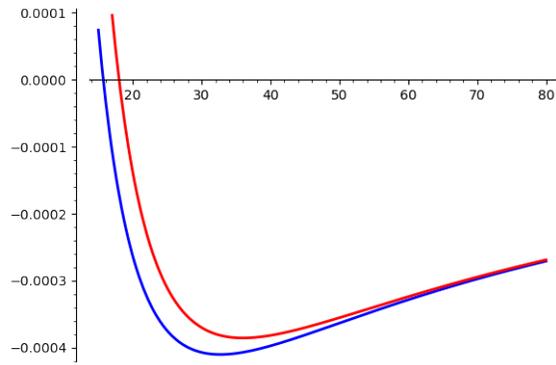


Figura 8.7: Comparación entre el potencial Newtoniano (rojo) y relativista (azul) lejos del centro de fuerzas.

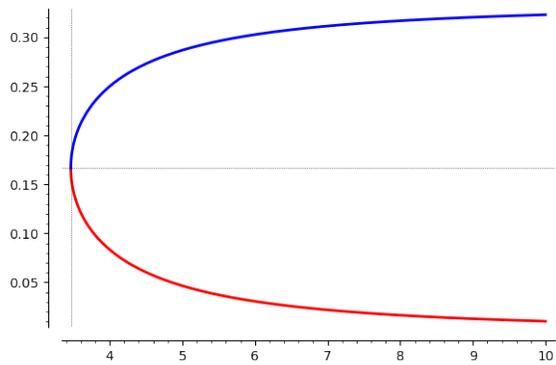


Figura 8.8: Los valores de u correspondientes a las órbitas circulares en función de L : rojo, estable; azul, inestable.

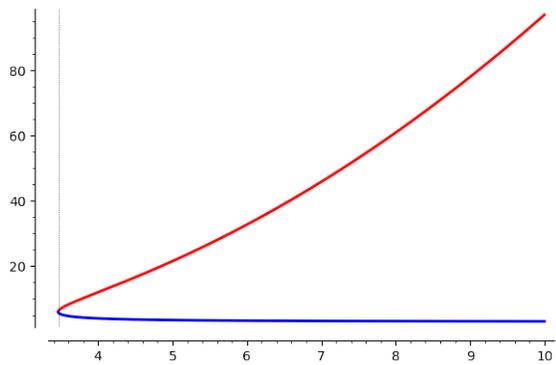


Figura 8.9: Los radios de las órbitas circulares en función de L : rojo, estable; azul, inestable.

Para que una órbita sea finita, es necesario que $(E^2 - 1)/L^2$ sea menor que cero y mayor que $V[u_{cr}^-]$. Si $L < 4M$, debe ser $(E^2 - 1)/L^2 < V[u_{cr}^-] < 0$.

8.3.1. El desplazamiento del perihelio

Consideremos el caso en que $\epsilon = V[u_{cr}^-] + \delta$. Entonces

$$\frac{1}{2} \left(\frac{du}{d\varphi} \right)^2 + \frac{1}{2} V''[u_{cr}^-] (u - u_{cr}^-)^2 + \frac{1}{6} V'''[u_{cr}^-] (u - u_{cr}^-)^3 = \delta \quad (8.76)$$

donde

$$\begin{aligned} V'' [u_-^{cr}] &= \sqrt{1 - 12 \frac{M^2}{L^2}} \\ V''' [u_-^{cr}] &= -6M \end{aligned} \quad (8.77)$$

vemos que si despreciamos el término cúbico, entonces

$$\begin{aligned} u &= u_-^{cr} + \delta u \cos \left[1 - 12 \frac{M^2}{L^2} \right]^{1/4} \varphi \\ \delta u^2 &= \frac{2\epsilon}{\sqrt{1 - 12 \frac{M^2}{L^2}}} \end{aligned} \quad (8.78)$$

Si $M/L \rightarrow 0$ recuperamos el resultado newtoniano, y la órbita es cerrada. En general, u no vuelve a su estado inicial cuando φ varía en 2π , lo cual marca el desplazamiento del perihelio.

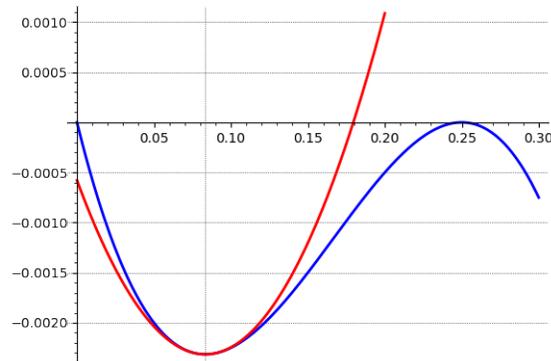


Figura 8.10: Aproximación del potencial efectivo por una parábola.

8.3.2. Fotones

Para partículas de masa cero, encontramos

$$-\left(1 - \frac{2M}{r}\right) \left(\frac{dt}{ds}\right)^2 + \frac{\left(\frac{dr}{ds}\right)^2}{\left(1 - \frac{2M}{r}\right)} + r^2 \left(\frac{d\varphi}{ds}\right)^2 = 0 \quad (8.79)$$

donde hemos asumido una órbita en el plano ecuatorial, sin pérdida de generalidad. Seguimos teniendo las leyes de conservación

$$\begin{aligned} \left(1 - \frac{2M}{r}\right) \left(\frac{dt}{ds}\right) &= E = \text{constante} \\ r^2 \left(\frac{d\varphi}{ds}\right) &= L = \text{constante} \end{aligned} \quad (8.80)$$

de manera que

$$\frac{\left(\frac{dr}{ds}\right)^2 - E^2}{\left(1 - \frac{2M}{r}\right)} + \frac{L^2}{r^2} = 0 \quad (8.81)$$

o bien

$$\frac{1}{2} \left(\frac{dr}{ds}\right)^2 + \frac{L^2}{2r^2} \left(1 - \frac{2M}{r}\right) = \frac{E^2}{2} \quad (8.82)$$

Este potencial tiene un único punto crítico en

$$r_{cr} = 3M \quad (8.83)$$

que corresponde a una órbita circular inestable. No hay otras órbitas ligadas. Órbitas con $L^2 > 27M^2E^2$ vienen y vuelven al infinito, órbitas con $L^2 < 27M^2E^2$ caen sobre el agujero.

Lejos del agujero la órbita puede aproximarse por una línea recta. Supongamos que ésta es la recta $y = b$, con la partícula viniendo desde $x = \infty$. Entonces $\sin \varphi = b/r$ y

$$\frac{d\varphi}{ds} = -\frac{b}{r^2 \cos \varphi} \frac{dr}{ds} \quad (8.84)$$

con $\cos \varphi \approx 1$. Entonces, cuando $r \rightarrow \infty$, $L \rightarrow b|dr/ds|$ y $E \rightarrow dt/ds \approx |dr/ds|$, de manera que $b = L/E$. Por lo tanto, las órbitas con $b < 3\sqrt{3}M$ caen al agujero. Si $b = 3\sqrt{3}M$, la órbita se enrolla asintóticamente alrededor de la órbita inestable con $r = 3M$.

Vamos a calcular el ángulo de deflexión de un rayo de luz que se mantiene lejos del agujero negro. La trayectoria puede aproximarse por líneas rectas tanto en el pasado lejano como en el futuro lejano.

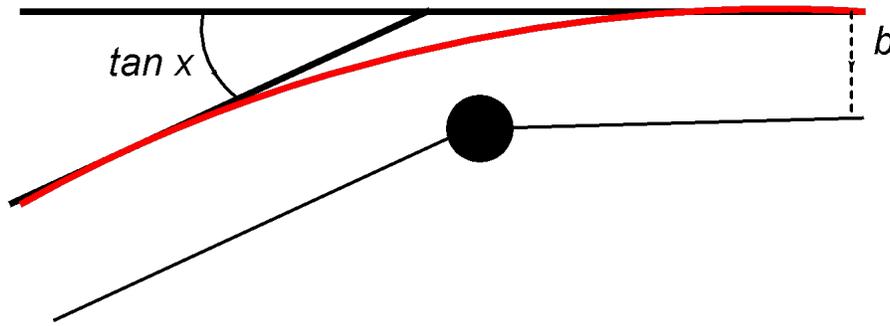


Figura 8.11: Esquema del cálculo del ángulo de deflexión de un rayo de luz por una masa concentrada.

En el pasado lejano $\varphi = 0$, y en el futuro lejano

$$\tan \varphi = \frac{dy}{dx} = \frac{ds}{dx} \frac{dy}{ds} \quad (8.85)$$

Como el ángulo de deflexión es pequeño, la órbita no se separa mucho de la línea recta en que

$$\frac{dx}{ds} = -E \quad (8.86)$$

Para encontrar el valor asintótico de dy/ds , observamos que la dinámica corresponde a la de una partícula sometida a un potencial central

$$V = -\frac{ML^2}{r^3} \quad (8.87)$$

de manera que

$$\frac{d}{ds} \frac{dy}{ds} = -\frac{\partial}{\partial y} V = -\frac{ML^2}{r^5} y \quad (8.88)$$

y

$$\frac{d}{dx} \frac{dy}{ds} = \frac{ds}{dx} \frac{d}{ds} \frac{dy}{ds} = \frac{3ML^2}{Er^5} y \quad (8.89)$$

En el lado derecho aproximamos $y \approx b$ en todos lados, de manera que

$$\left. \frac{dy}{ds} \right|_{s \rightarrow -\infty} = -\frac{1}{E} 3ML^2 b \int_{-\infty}^{\infty} \frac{dx}{[x^2 + b^2]^{5/2}} = -\frac{6ME}{b} \int_0^{\infty} \frac{dx}{[x^2 + 1]^{5/2}} \quad (8.90)$$

y el ángulo de deflexión es

$$\chi \approx \tan \chi \approx \frac{6M}{b} \int_0^\infty \frac{dx}{[x^2 + 1]^{5/2}} \quad (8.91)$$

La integral se resuelve con la sustitución $x = \tan u$ y vale $2/3$, de manera que finalmente

$$\chi \approx \frac{4M}{b} \quad (8.92)$$

Capítulo 9

Estructura estelar

Nos interesa resolver las ecuaciones de Einstein para una métrica estática esféricamente simétrica, pero ahora en presencia de materia, lo cual es un primer modelo de estructura estelar en relatividad general. por lo tanto, postulamos una métrica

$$ds^2 = -f(r) dt^2 + g(r) dr^2 + r^2 (d\theta^2 + \sin^2 \theta d\varphi^2) \quad (9.1)$$

Puesto que la materia está en reposo (si no la métrica sería estacionaria, pero no estática) no hay efectos de fricción, de manera que no hay pérdida de generalidad en asumir que se la puede describir como un fluido ideal (ver la clase 6), con EMT

$$T_{\nu}^{\mu} = \rho(r) u^{\mu} u_{\nu} + p(r) [\delta_{\nu}^{\mu} + u^{\mu} u_{\nu}] \quad (9.2)$$

con $u^{\mu} = (f^{-1/2}, 0, 0, 0)$, $u_{\mu} = (-f^{1/2}, 0, 0, 0)$. Además, como la dinámica de un fluido ideal preserva la entropía por partícula, no hay pérdida de generalidad en asumir un fluido *barotrópico*, es decir, un fluido con ecuación de estado

$$p = p(\rho) \quad (9.3)$$

Tenemos por lo tanto un modelo definido por cuatro funciones f , g , ρ y p , de manera que vamos a necesitar cuatro ecuaciones independientes. Una es 9.3, a través de la cual introducimos el dato de la composición de la estrella. Una segunda ecuación es la ley de conservación

$$T_{\mu;\nu}^{\nu} = 0 \quad (9.4)$$

donde es esencial que la derivada es covariante. Desarrollando

$$T_{\mu;\nu}^{\nu} = \rho_{,\nu} u^{\nu} u_{\mu} + p_{,\nu} [\delta_{\mu}^{\nu} + u^{\nu} u_{\mu}] + (\rho + p) (u_{\mu;\nu} u^{\nu} + u_{\mu} u^{\nu}_{;\nu}) \quad (9.5)$$

Como la velocidad sólo tiene componente temporal, resulta

$$\rho_{,\nu} u^{\nu} = p_{,\nu} u^{\nu} u_{\mu} = 0 \quad (9.6)$$

y también

$$u^{\nu}_{;\nu} = \frac{1}{\sqrt{-g}} \partial_{\nu} \sqrt{-g} u^{\nu} = 0 \quad (9.7)$$

$\delta_{\mu}^{\nu} p_{,\nu}$ sólo es distinto de cero cuando $\mu = r$, y lo mismo pasa con el término restante

$$u_{\mu;\nu} u^{\nu} = -\Gamma_{\mu\nu}^{\lambda} u^{\nu} u_{\lambda} = \Gamma_{\mu t}^t \quad (9.8)$$

Cuando $\mu = r$ obtenemos

$$\Gamma_{rt}^t = \frac{f'}{2f} \quad (9.9)$$

Reuniendo los dos términos no nulos, la ley de conservación nos da

$$p' + (\rho + p) \frac{f'}{2f} = 0 \quad (9.10)$$

o bien, redefiniendo

$$f = e^{2\Phi} \quad (9.11)$$

$$p' + (\rho + p)\Phi' = 0 \quad (9.12)$$

Lejos del cuerpo $f \approx 1 + 2\Phi$, y Φ se convierte en el potencial Newtoniano (recordemos que $c = 1$). De hecho, la ec. 9.12 es la versión relativista de la ecuación de equilibrio hidrostático

$$p' + \rho_m \phi' = 0 \quad (9.13)$$

Las diferencias entre las ecuaciones 9.12 y 9.13 son que ρ_m es la densidad de masa, mientras que ρ es la densidad de energía, y ϕ es el verdadero potencial Newtoniano. Las ecuaciones convergen porque en el límite no relativista ρ está dominada por la energía en reposo, de modo que, con $c = 1$, $\rho \approx \rho_m \gg p$.

Físicamente, la diferencia fundamental entre 9.12 y 9.13 es que en la teoría relativista la presión “pesa”. Por eso, a igual masa, las estrellas relativistas van a ser más compactas que las no relativistas. También aparecen masas límites, ya que no siempre la estrella va a poder compensar un aumento en la masa con un aumento en la presión; llega un momento en que aumentar la presión eleva peso de la estrella más que lo que agrega a la fuerza de sustentación.

9.0.1. Einstein

Teniendo ya las ecuaciones 9.3y 9.12, necesitamos dos ecuaciones más, que van a ser elegidas entre las ecuaciones de Einstein

$$G_{\nu}^{\mu} = 8\pi T_{\nu}^{\mu} \quad (9.14)$$

Concretamente, vamos a usar las ecuaciones correspondientes a $\mu = \nu = 0$ y 1, es decir (ver apéndice)

$$\begin{aligned} G_0^0 &= -\frac{g'}{rg^2} - \frac{1}{r^2} \left(1 - \frac{1}{g}\right) = -8\pi\rho \\ G_1^1 &= \frac{2\Phi'}{rg} - \frac{1}{r^2} \left(1 - \frac{1}{g}\right) = 8\pi p \end{aligned} \quad (9.15)$$

La primer ecuación sugiere redefinir

$$\frac{1}{g} = 1 - \frac{2m}{r} \quad (9.16)$$

para obtener

$$m' = 4\pi r^2 \rho \quad (9.17)$$

Con la parametrización de f y g dada por 9.11 y 9.16, la ecuación (1, 1) de Einstein queda como

$$\Phi' = \frac{m + 4\pi r^3 p}{r(r - 2m)} \quad (9.18)$$

Eliminando Φ' entre las ecuaciones 9.12 y 9.18 obtenemos una ecuación autónoma para la presión

$$p' = -\frac{(\rho + p)(m + 4\pi r^3 p)}{r(r - 2m)} \quad (9.19)$$

que es la *ecuación de Tolman, Oppenheimer y Volkov*. Nótese que si asumimos que $r > 2m$ en todo radio (de otra forma, tendríamos un agujero negro en el interior de la estrella), entonces $p' < 0$ en toda la estrella. Con una ecuación de estado barotrópica $\rho = \rho(p)$, podemos obtener la estructura de la estrella integrando las ecuaciones 9.17 y 9.19 con las condiciones iniciales $m(0) = 0$, $p(0) = p_c$. El borde de la estrella se encuentra en el primer punto R en que $p(R) = 0$. Ahí la métrica se convierte con continuidad en una métrica de Schwarzschild con el valor de $M = m(R)$, que de esa manera es la masa de la estrella (que no se corresponde con el flujo de la corriente de energía $T_{\nu}^{\mu} u^{\nu}$, ya habíamos encontrado esta curiosidad en la clase 10). Eventualmente uno puede integrar la ecuación 9.18 para encontrar Φ , con la condición de contorno $e^{2\Phi(R)} = 1 - 2M/R$.

9.1. Estrellas de Schwarzschild

Para entender un poco más de qué se trata, vamos a comparar la solución relativista con la Newtoniana en el caso de una *estrella de Schwarzschild*, es decir una estrella con ecuación de estado $\rho = \text{constante}$.

El caso Newtoniano se obtiene reemplazando $\rho = \mu c^2$ con p finito, y tomando el límite en que $c \rightarrow \infty$. Redefinimos $m = m_N c^2$, $m'_N = 4\pi r^2 \mu$ y hacemos explícito el factor G/c^2 en 9.18, de modo que

$$\Phi' = \frac{Gm_N}{r^2} \quad (9.20)$$

que es equivalente a la ecuación de Poisson

$$\Delta\Phi = 4\pi G\mu \quad (9.21)$$

La ecuación 9.12 se reduce a la ecuación de equilibrio hidrostático 9.13

Si $\mu = \text{constante}$, entonces

$$m_N = \frac{4}{3}\pi r^3 \mu \quad (9.22)$$

Entonces

$$p = p_c - \frac{2}{3}\pi G\mu^2 r^2 \quad (9.23)$$

El radio de la estrella es

$$R = \sqrt{\frac{3p_c}{2\pi G\mu^2}} \quad (9.24)$$

y la masa

$$M = \frac{4}{3}\pi\mu \left[\frac{3p_c}{2\pi G\mu^2} \right]^{3/2} \quad (9.25)$$

Nótese que la masa es una función creciente de la presión, y que tanto la masa como el radio pueden ser arbitrariamente grandes.

Veamos ahora el caso relativista con $\rho = \text{constante}$. Ahora $m = 4\pi\rho r^3/3$ y la ecuación 9.19 se integra a

$$\frac{p + \frac{1}{3}\rho}{p + \rho} = \frac{p_c + \frac{1}{3}\rho}{p_c + \rho} \sqrt{1 - \frac{8}{3}\pi\rho r^2} \quad (9.26)$$

La superficie de la estrella corresponde a

$$\frac{p_c + \frac{1}{3}\rho}{p_c + \rho} \sqrt{1 - \frac{8}{3}\pi\rho R^2} = \frac{1}{3} \quad (9.27)$$

o sea

$$R = \sqrt{\frac{3p_c}{2\pi\rho^2} \frac{1 + 2\frac{p_c}{\rho}}{\left(1 + 3\frac{p_c}{\rho}\right)^2}} \quad (9.28)$$

R es una función creciente de p_c pero tiene un límite finito cuando $p_c \rightarrow \infty$

$$R_\infty = \sqrt{\frac{1}{3\pi\rho}} \quad (9.29)$$

correspondiendo a una masa

$$M_\infty = \frac{4}{3}\pi\rho \frac{1}{[3\pi\rho]^{3/2}} = \frac{4}{9}R_\infty \quad (9.30)$$

La configuración límite es “casi” un agujero negro.

9.2. Cálculo del tensor de Einstein

Queremos calcular

$$\begin{aligned} G_0^0 &= R_0^0 - \frac{1}{2}R \\ G_1^1 &= R_1^1 - \frac{1}{2}R \end{aligned} \quad (9.31)$$

Ahora

$$R = R_0^0 + R_1^1 + R_2^2 + R_3^3 \quad (9.32)$$

de modo que

$$\begin{aligned} G_0^0 &= \frac{1}{2} [R_0^0 - R_1^1 - R_2^2 - R_3^3] \\ G_1^1 &= \frac{1}{2} [R_1^1 - R_0^0 - R_2^2 - R_3^3] \end{aligned} \quad (9.33)$$

Empecemos por

$$R_0^0 = \frac{1}{g} R_{101}^0 + \frac{1}{r^2} R_{202}^0 + \frac{1}{r^2 \sin^2 \theta} R_{303}^0 \quad (9.34)$$

El primer término es

$$R_{101}^0 = \Gamma_{11,0}^0 - \Gamma_{10,1}^0 + \Gamma_{0\lambda}^0 \Gamma_{11}^\lambda - \Gamma_{1\lambda}^0 \Gamma_{01}^\lambda \quad (9.35)$$

El primer término es idénticamente cero y los dos últimos sólo son distintos de cero cuando $\lambda = 1$ y $\lambda = 0$, respectivamente. Γ_{01}^0 ya fue calculada en 9.9, y

$$\Gamma_{11}^1 = \frac{g'}{2g} \quad (9.36)$$

de manera que

$$\begin{aligned} R_{101}^0 &= -\left(\frac{f'}{2f}\right)' + \frac{f'}{2f} \left(\frac{g'}{2g} - \frac{f'}{2f}\right) \\ &= \frac{1}{2f} \left[-f'' + f' \left(\frac{g'}{2g} + \frac{f'}{2f}\right)\right] \end{aligned} \quad (9.37)$$

Seguimos con

$$R_{202}^0 = \Gamma_{22,0}^0 - \Gamma_{20,2}^0 + \Gamma_{0\lambda}^0 \Gamma_{22}^\lambda - \Gamma_{2\lambda}^0 \Gamma_{02}^\lambda \quad (9.38)$$

El único término que no es cero es

$$R_{202}^0 = \Gamma_{01}^0 \Gamma_{22}^1 \quad (9.39)$$

Nuevamente usamos 9.9, y

$$\Gamma_{22}^1 = -\frac{r}{g} \quad (9.40)$$

de modo que

$$R_{202}^0 = -\frac{r f'}{2fg} \quad (9.41)$$

Ahora es fácil ver que

$$R_{303}^0 = -\frac{rf'}{2fg} \sin^2 \theta \quad (9.42)$$

Juntando 9.37, 9.41 y 9.42 obtenemos

$$R_0^0 = \frac{1}{2fg} \left[-f'' + f' \left(\frac{g'}{2g} + \frac{f'}{2f} \right) \right] - \frac{f'}{rfg} \quad (9.43)$$

Ahora seguimos con R_1^1

$$R_1^1 = -\frac{1}{f} R_{010}^1 + \frac{1}{r^2} R_{212}^1 + \frac{1}{r^2 \sin^2 \theta} R_{313}^1 \quad (9.44)$$

donde

$$R_{010}^1 = \frac{1}{g} R_{1010} = \frac{1}{g} R_{0101} = -\frac{f}{g} R_{101}^0 \quad (9.45)$$

que ya calculamos en 9.37. Siguiendo

$$R_{212}^1 = \Gamma_{22,1}^1 - \Gamma_{21,2}^1 + \Gamma_{1\lambda}^1 \Gamma_{22}^{\lambda} - \Gamma_{2\lambda}^1 \Gamma_{12}^{\lambda} \quad (9.46)$$

El segundo término es nulo; para los otros necesitamos 9.40, 9.36, y

$$\Gamma_{12}^2 = \frac{1}{r} \quad (9.47)$$

de manera que

$$\begin{aligned} R_{212}^1 &= \left(-\frac{r}{g} \right)' - \frac{r}{g} \left(\frac{g'}{2g} - \frac{1}{r} \right) \\ &= \frac{rg'}{2g^2} \end{aligned} \quad (9.48)$$

Notando que $\Gamma_{13}^3 = \Gamma_{12}^2$ y $\Gamma_{33}^1 = \Gamma_{22}^1 \sin^2 \theta$ encontramos que

$$R_{313}^1 = \frac{rg'}{2g^2} \sin^2 \theta \quad (9.49)$$

y ahora integramos todo

$$R_1^1 = \frac{1}{2fg} \left[-f'' + f' \left(\frac{g'}{2g} + \frac{f'}{2f} \right) \right] + \frac{g'}{rg^2} \quad (9.50)$$

Incidentalmente

$$R_0^0 - R_1^1 = -\frac{f'}{rfg} - \frac{g'}{rg^2} \quad (9.51)$$

Sólo nos falta una componente del tensor de Ricci ya que $R_3^3 = R_2^2$. Calculemos

$$R_2^2 = -\frac{1}{f} R_{020}^2 + \frac{1}{g} R_{121}^2 + \frac{1}{r^2 \sin^2 \theta} R_{323}^2 \quad (9.52)$$

Ahora

$$\begin{aligned} R_{020}^2 &= \frac{1}{r^2} R_{2020} = \frac{1}{r^2} R_{0202} = -\frac{f}{r^2} R_{202}^0 \\ R_{121}^2 &= \frac{1}{r^2} R_{2121} = \frac{1}{r^2} R_{1212} = \frac{g}{r^2} R_{212}^1 \end{aligned} \quad (9.53)$$

Sólo necesitamos calcular

$$R_{323}^2 = \Gamma_{33,2}^2 + \Gamma_{21}^2 \Gamma_{33}^1 - \Gamma_{33}^2 \Gamma_{32}^3 \quad (9.54)$$

$$\Gamma_{33}^2 = -\cos\theta \sin\theta; \quad \Gamma_{33}^1 = -\frac{r}{g} \sin^2\theta; \quad \Gamma_{23}^3 = \frac{\cos\theta}{\sin\theta} \quad (9.55)$$

y ahora

$$R_{323}^2 = \left(1 - \frac{1}{g}\right) \sin^2\theta \quad (9.56)$$

Juntando todo

$$R_2^2 = R_3^3 = -\frac{1}{2} \frac{f'}{rfg} + \frac{1}{2} \frac{g'}{rg^2} + \frac{1}{r^2} \left(1 - \frac{1}{g}\right) \quad (9.57)$$

Entonces

$$\begin{aligned} G_0^0 &= -\frac{g'}{rg^2} - \frac{1}{r^2} \left(1 - \frac{1}{g}\right) \\ G_1^1 &= \frac{f'}{rgf} - \frac{1}{r^2} \left(1 - \frac{1}{g}\right) \end{aligned} \quad (9.58)$$

que son las expresiones que usamos en 9.15, agregando que $f = e^{2\Phi}$.

9.3. Politrópicas no relativistas

Queremos investigar la estructura de estrellas no relativistas con ecuación de estado

$$p = K\rho^\gamma = K\rho^{1+1/n} \quad (9.59)$$

que describe las adiabáticas de un gas ideal con calor específico $c_V = nk_B$, donde k_B es la constante de Boltzmann. En este caso conviene redefinir

$$\rho = \rho_c \theta^n \quad (9.60)$$

donde ρ_c es la densidad en el centro de la estrella. Entonces

$$p = K\rho_c^\gamma \theta^{n+1} \quad (9.61)$$

y

$$m' = 4\pi r^2 \rho = 4\pi \rho_c r^2 \theta^n \quad (9.62)$$

Cada partícula siente la atracción de toda la masa de la estrella (hasta el radio r) concentrada en el centro, de modo que

$$\Phi' = \frac{Gm}{r^2} \quad (9.63)$$

y la ecuación de equilibrio hidrostático

$$K\rho_c^\gamma (n+1) \theta^n \theta' = -\frac{Gm}{r^2} \rho_c \theta^n \quad (9.64)$$

Simplificando

$$\frac{(n+1)K\rho_c^{1/n}}{G} r^2 \theta' = -m \quad (9.65)$$

derivando nuevamente

$$\frac{(n+1)K\rho_c^{1/n}}{G} (r^2 \theta')' = -4\pi r^2 \rho_c \theta^n \quad (9.66)$$

de manera que

$$\frac{(n+1)K\rho_c^{1/n}}{4\pi G\rho_c} \frac{1}{r^2} (r^2 \theta')' + \theta^n = 0 \quad (9.67)$$

El factor en primer término tiene unidades de longitud al cuadrado. Por lo tanto, definimos

$$R_c = \sqrt{\frac{(n+1)K\rho_c^{1/n}}{4\pi G\rho_c}} \quad (9.68)$$

$$r = R_c \xi \quad (9.69)$$

y obtenemos la *ecuación de Lane-Emden*

$$\frac{1}{\xi^2} \frac{d}{d\xi} \xi^2 \frac{d\theta}{d\xi} + \theta^n = 0 \quad (9.70)$$

Con las condiciones iniciales $\theta(0) = 1$, $\mu(0) = 0$. Si bien esta ecuación debe integrarse numéricamente salvo para valores excepcionales de n (por ejemplo, si $n = 1$ la solución es $\theta = \sin \xi/\xi$), lo importante es que la ecuación es universal, para un n dado. Por lo tanto, para cada n existe un único valor $\xi^{(n)}$ para el cual $\theta = 0$ por primera vez. Este valor determina el radio de estrella $R = R_c \xi^{(n)}$, y su masa

$$M = 4\pi \int_0^R dr r^2 \rho = 4\pi R_c^3 \rho_c \int_0^{\xi^{(n)}} d\xi \xi^2 \theta^n \quad (9.71)$$

lo cual da la dependencia explícita de la masa respecto de la densidad central

$$M \propto \left[\frac{(n+1) K \rho_c^{(3-n)/3n}}{4\pi G} \right]^{3/2} \quad (9.72)$$

En particular, vemos que si $n < 3$ ($\gamma > 4/3$) la masa de la estrella crece con la densidad en el centro de la estrella, mientras que si $\gamma < 4/3$ ocurre lo contrario (que, como vamos a ver más adelante, indica que la estrella es inestable). El caso $\gamma = 4/3$, $n = 3$ es excepcional, porque la masa de la estrella es universal, independiente de la densidad central (y por lo tanto, también del radio de la estrella). Curiosamente, este valor aparece, por motivos completamente independientes, en la teoría de enanas blancas, donde resulta en el *límite de Chandrasekhar*.

9.4. Estabilidad

El problema de la estabilidad va mucho más allá de lo que podemos hacer en este curso. Sin embargo, podemos sacar algunas conclusiones cualitativas a partir de lo que hemos visto (ver fig. 9.1).

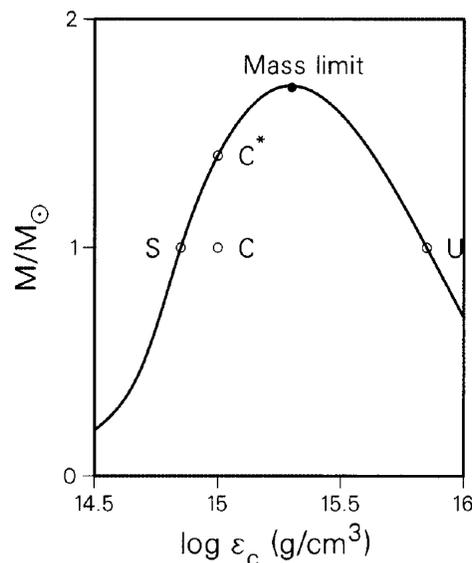


FIGURE 4.19. Schematic of solution of the Oppenheimer-Volkoff equations in a region of increasing and decreasing mass as function of central density. Hydrostatically stable configurations have positive slope so the stable region ends at “Mass limit”. See the discussion in the text.

Figura 9.1: Fuente: Glendenning.

La figura 9.1 representa el resultado de una hipotética solución numérica de las ecuaciones de estructura, donde se encuentra que la masa de la estrella es máxima para un valor dado de la densidad en el centro de la estrella. Entonces, el punto S representa una configuración estable, y el punto U una inestable.

Para evaluar la estabilidad debemos ver en cada caso cuál es la fuerza dominante, si el peso de la estrella o las fuerzas de presión.

Supongamos que efectivamente estamos en el punto S y una fluctuación hace que la estrella se contraiga. Entonces la masa de la estrella permanece constante, pero la densidad aumenta, y pasamos del punto S al punto C . Ahora vemos que la masa de la estrella es menor que la masa de la configuración estable C^* para ese valor de la densidad central. Por lo tanto, podemos esperar que las fuerzas de presión van a ser capaces de restaurar la estrella a la configuración original S .

Si en cambio hacemos el mismo análisis a partir de la configuración U , vemos que la estrella contraída también tiene más masa que la estrella estable. Por lo tanto, esperamos que la fuerza peso domine a la fuerza de presión, y la estrella siga contrayéndose.

En términos de la relación entre la masa y el radio de la estrella, el mismo análisis sugiere que la estrella es estable si $dM/dR \leq 0$, e inestable en caso contrario. O sea, si la estrella se expande, esperamos que una estrella estable quede con más masa que la configuración estable correspondiente al nuevo radio, y en consecuencia que se vuelva a contraer.

9.5. Landau 1932

En 1932, Landau presentó un argumento elemental para mostrar que no podía haber estrellas frías estables con más de una cierta masa.

Landau consideró un sistema de N partículas confinadas en una esfera de radio R . El volumen por partícula es entonces $v \approx R^3/N$ y la distancia típica entre partículas es

$$d \approx \frac{R}{N^{1/3}} \quad (9.73)$$

Por el principio de Heisenberg, el valor típico de las componentes del impulso es

$$p \approx \frac{\hbar}{d} \approx \frac{\hbar}{R} N^{1/3} \quad (9.74)$$

La energía cinética típica de las partículas es entonces

$$\epsilon \approx \frac{p^2}{2m} \approx \frac{\hbar^2}{2mR^2} N^{2/3} \quad (9.75)$$

Al mismo tiempo, la energía potencial típica es

$$V \approx -GMmR \approx -\frac{Gm^2}{R} N \quad (9.76)$$

Por lo tanto, la energía total por partícula $E = \epsilon + V$ tiene un mínimo en un radio $R \propto N^{-1/3}$, que corresponde a la configuración estable de la estrella.

El problema es qué pasa si aumento N . El radio de equilibrio disminuye, el momento típico aumenta, y en algún punto las partículas pasan a ser relativistas. Ahora la energía es

$$\epsilon \approx cp \approx \frac{c\hbar}{R} N^{1/3} \quad (9.77)$$

y la energía por partícula

$$E \approx \left[c\hbar N^{1/3} - Gm^2 N \right] \frac{1}{R} \quad (9.78)$$

Si $E > 0$, el sistema va a tratar de reducir su energía aumentando R ; eventualmente vamos a volver al caso no relativista, donde sabemos que existe algún equilibrio estable. Esto ocurre cuando $N^{2/3} < c\hbar/Gm^2$.

Cuando $E < 0$, el sistema trata de minimizar su energía haciéndola todavía más negativa, y eso conduce al colapso. Por lo tanto, existe un valor máximo de N_{max} , que corresponde a una masa

$$M_{max} \approx mN \approx \left(\frac{c\hbar}{Gm^4/3} \right)^{3/2} \quad (9.79)$$

9.6. El límite de Chandrasekhar

La teoría de Chandrasekhar se basa en asumir que, en el límite de temperatura tendiendo a cero, una estrella se puede modelar como un gas degenerado de fermiones libres. Por lo tanto, a $T = 0$ la estructura de la estrella está determinada por el principio de Pauli: en cada elemento de volumen d^3x tendremos un único fermión en cada estado cuántico $d^3p = \hbar^3/d^3x$ hasta llenar la esfera de Fermi, es decir, hasta un valor p_F del impulso. Por lo tanto, la densidad numérica de la estrella es

$$n = \frac{4}{3}\pi \left(\frac{p_f}{\hbar} \right)^3 \quad (9.80)$$

En una enana blanca, los fermiones que contribuyen a la presión son los electrones, pero la masa la determinan los protones y los neutrones. Asumiendo que hay A/Z nucleones por electrón, por lo tanto, la densidad es

$$\rho = \frac{4}{3}\pi \left(\frac{A}{Z}\right) m_p \left(\frac{p_f}{\hbar}\right)^3 \quad (9.81)$$

donde m_p es la masa del protón.

Una partícula con momento p contribuye $v_p p/3$ a la presión, donde v_p es la velocidad de la partícula. Esencialmente esto viene de que cada impacto de la partícula contra las paredes del recinto que la contiene contribuye una transferencia de impulso del orden de p , mientras que el número de impactos por unidad de tiempo es proporcional a v_p . El factor $1/3$ proviene de promediar sobre todas las direcciones posibles del impulso respecto a la pared. Sumando sobre la esfera de Fermi, vemos que tenemos dos casos límites: si todas las partículas (que en este caso son los electrones) son no relativistas ($p_F \ll m_e c$) entonces $v_p = p/m_e$, y la presión

$$p_{NR} = \frac{4\pi}{5\hbar^3 m_e} p_F^5 = \frac{4\pi\hbar^2}{5m_e} \left(\frac{3Z\rho}{4Am_p}\right)^{5/3} \quad (9.82)$$

mientras que si los electrones son relativistas $p_F \gg m_e c$ entonces $v_p \approx c$ y

$$p_R = \frac{\pi c}{\hbar^3} p_F^4 = \pi c \hbar \left(\frac{3Z\rho}{4Am_p}\right)^{4/3} \quad (9.83)$$

En ambos casos encontramos ecuaciones de estado politrópicas, con distinto K y γ : en el caso no relativista, $\gamma_{NR} = 5/3$ y por lo tanto $n_{NR} = 3/2$, mientras que en el caso relativista $\gamma_R = 4/3$ y $n_R = 3$. Con los resultados anteriores, inmediatamente concluimos que para estrellas no relativistas

$$M_{NR} \propto 4\pi \left[\frac{5}{8\pi G}\right]^{3/2} \left[\frac{4\pi\hbar^2}{5m_e} \left(\frac{3Z}{4Am_p}\right)^{5/3}\right]^{3/2} \rho_0^{1/2} \quad (9.84)$$

La masa crece con la densidad central, y por lo tanto estas configuraciones son estables. En cambio en el caso relativista

$$M_R \propto 4\pi \left[\frac{c\hbar}{Gm_p^{4/3}}\right]^{3/2} \left(\frac{3Z}{4A}\right)^2 \quad (9.85)$$

La masa es independiente de la densidad central, pero más importante es que, aparte de factores de orden 1, esta masa es precisamente la masa máxima predicha por Landau 9.79.

Dejando de lado los factores numéricos, encontramos que $M_R \approx 10^{31} \text{ kg}^1$, que se compara bien con la masa del Sol $\approx 10^{30} \text{ kg}$.

Si tenemos en cuenta las correcciones debidas a la Relatividad General, encontramos no sólo que las masas son generalmente menores para una densidad central dada, sino que además las estrellas más densas se vuelven inestables (ver fig. 9.2).

¹Usamos $c \approx 10^8 \text{ ms}^{-1}$, $\hbar \approx 6 \cdot 10^{-34} \text{ Js}$, $G \approx 6 \cdot 10^{-11} \text{ m}^3\text{kg}^{-1}\text{s}^{-2}$ y $m_p \approx 10^{-27}\text{kg}$.

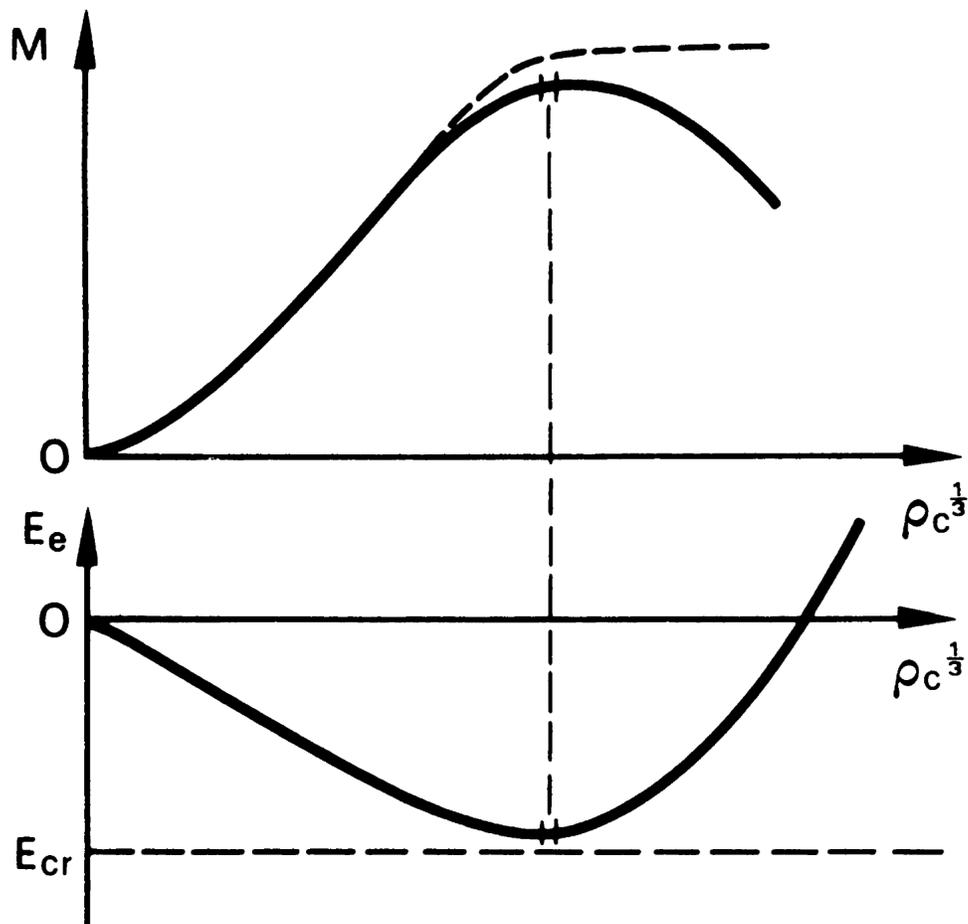


FIG. 38.—Variation of the energy of a cold equilibrium star, and of its mass, as functions of the central density. Dashed lines in upper part of diagram indicate the shape of the curve $M = M(\rho_c)$, considering the pressure of the degenerate electron gas but ignoring the effects of GTR and of neutronization of matter (Chandrasekhar curve). When $\rho_c \rightarrow \infty$ along this curve, the mass approaches the Chandrasekhar limit. Energy indicated by dashed line in bottom diagram corresponds to this limit.

Figura 9.2: Fuente: Zel'dovich-Novikov.

Las figuras 9.3 y 9.4 representan resultados típicos de la solución del problema de estructura estelar en un rango amplio de densidades centrales y radios con ecuaciones de estado realistas, marcando los regímenes estables o inestables.

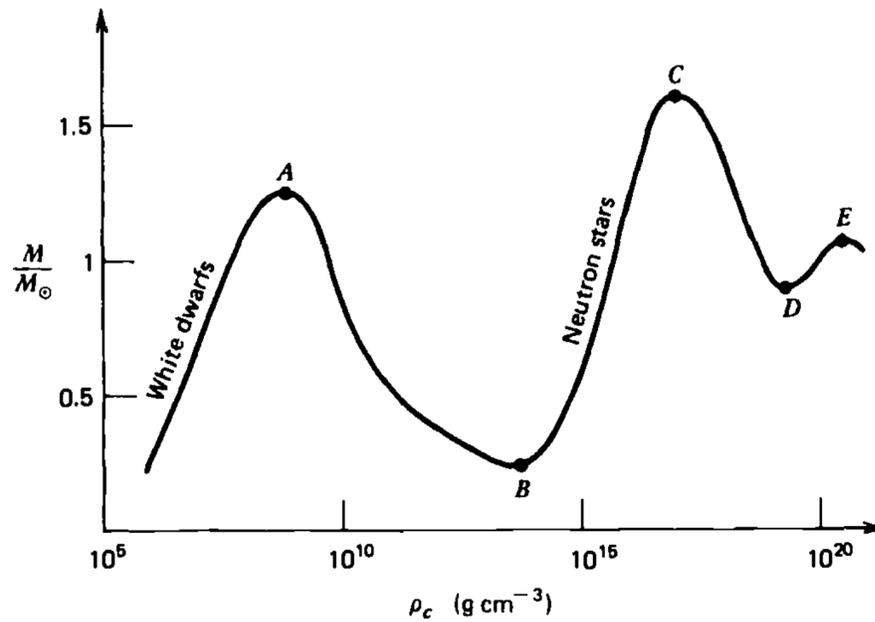


Figure 6.2 Schematic diagram showing the turning points in the mass versus central density diagram for equilibrium configurations of cold matter.

Figura 9.3: Fuente: Shapiro - Teukolsky.

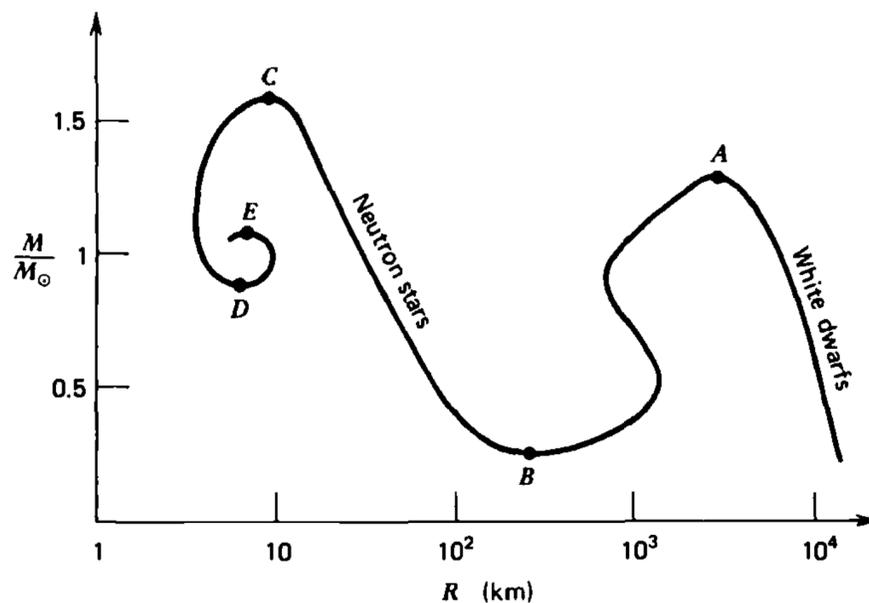


Figure 6.3 Schematic diagram showing the turning points in the mass versus radius diagram for equilibrium configurations of cold matter.

Figura 9.4: Fuente: Shapiro - Teukolsky.

Nótese que aparece una segunda rama de estructuras estables, correspondientes a las *estrellas de neutrones*. En

estas estrellas, protones y electrones se han fusionado, de manera que tanto la presión como el peso de la estructura son debidos a los neutrones.

9.6.1. Acerca de la literatura

Esta clase está basada en el Hartle y en E. Poisson y C. M. Will, *Gravity: Newtonian, Post-Newtonian, Relativistic*, CUP (2014).

También recomendamos el Wald

R. Wald, *General Relativity* (U. of Chicago Press, 1984).

Específicamente sobre el problema de estructura y estabilidad estelar, los siguientes son referencias clásicas:

- Ya. Zel'dovich e I. Novikov, *Stars and Relativity* (Dover, 1996).
- S. L. Shapiro y S. A. Teukolsky, *Black Holes, White Dwarfs, and Neutron Stars* (John Wiley, 1983).
- N. K. Glendenning, *Special and General Relativity* (Springer, 2007).
- John L. Friedman and Nikolaos Stergioulas, *Rotating relativistic stars* (CUP, 2013).

Por supuesto, si es por ir a las fuentes, nada mejor que S. Chandrasekhar, *An introduction to the study of stellar structure* (Dover, 1958).

El artículo de 1932 de Landau, L. D. Landau, *Phys. Z. Sowjetunion* 1 (1932) 285, está reimpresso en D. Ter Haar (editor), *Collected papers of L. D. Landau*, Gordon & Breach (1965).

Capítulo 10

Lentes Gravitacionales

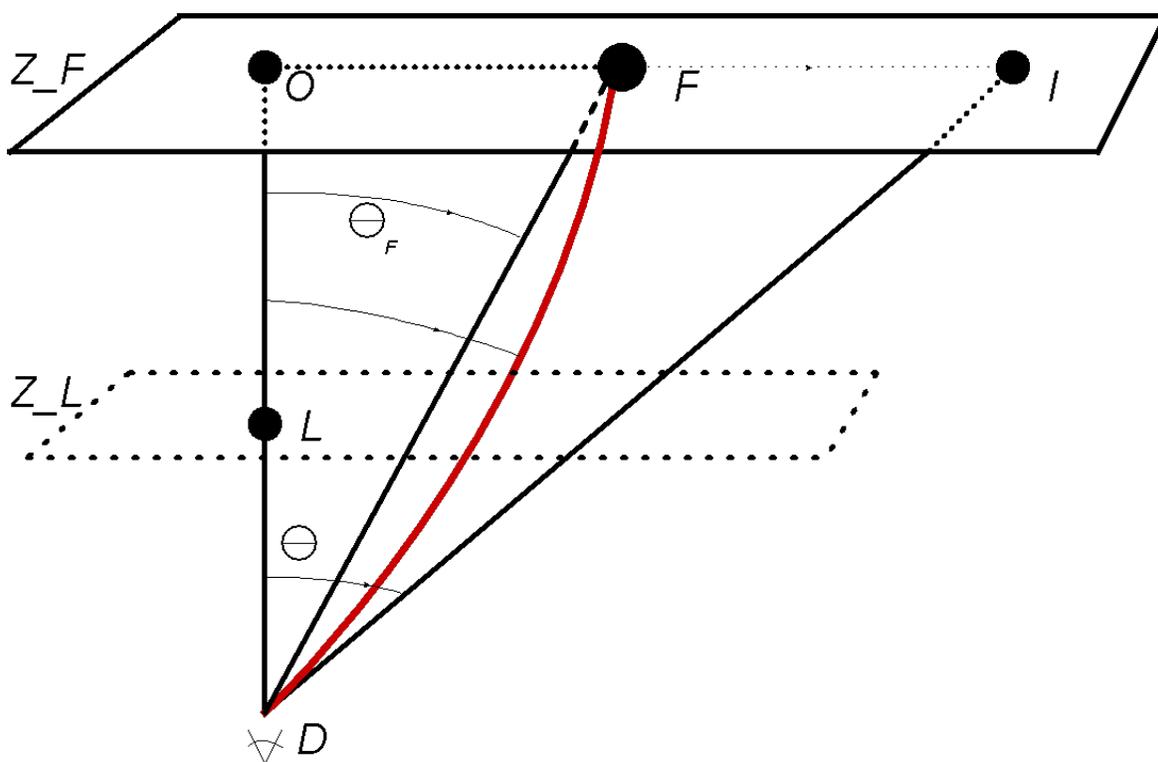


Figura 10.1: Lente gravitacional puntual. El detector se encuentra en el vértice inferior. La fuente F está a una distancia Z_F , y en ausencia de la lente su imagen se vería a un ángulo θ_F de la línea de mira. La lente L se encuentra centrada en la línea de mira a distancia Z_L . Por la deflexión de la luz en el campo gravitatorio de la lente, la imagen de la fuente subtende un ángulo θ , que proyectado a la distancia Z_F da la imagen I .

El hecho de que la curvatura del espacio tiempo curve la trayectoria de los rayos de luz es el origen del fenómeno de las *lentes gravitacionales*. Las lentes gravitacionales se han convertido en nuestra mejor herramienta para investigar la distribución de masa en el Universo, ya sea en escalas cosmológicas o en objetos colapsados, tales como galaxias y cúmulos de galaxias. Tiene la ventaja sobre otros métodos (por ejemplo, contar estrellas) que cuenta todo lo que pesa, ya sea materia ordinaria, materia oscura o energía oscura. También es una herramienta importante en la búsqueda de exoplanetas.

El esquema básico de la lente está descrito en la figura 10.1. El detector D toma una imagen de una región del espacio a una distancia Z . El punto O corresponde al centro de la imagen. Un objeto ubicado en el plano perpendicular a la línea de mira forma una imagen que, proyectada a la distancia Z , parece estar en la posición $Z\vec{\theta}$ (como todos los ángulos involucrados son pequeños, aproximaremos libremente senos y tangentes por sus argumentos; también vamos a usar la *aproximación de cielo plano*, que consiste en aproximar la bóveda celeste por su plano tangente). La posición

real del objeto es $Z\vec{\theta}_F$ (F por fuente). La diferencia $Z(\vec{\theta}_F - \vec{\theta})$ es debida a la desviación de la trayectoria de la luz respecto de la línea recta $\vec{r} = (z, z\vec{\theta})$, $0 \leq z \leq Z$.

En las aplicaciones habituales es suficiente considerar que la luz se propaga en un campo gravitatorio débil

$$ds^2 = - \left[1 + \frac{2\varphi}{c^2} \right] c^2 dt^2 + \left[1 - \frac{2\varphi}{c^2} \right] d\vec{r}^2 \quad (10.1)$$

donde φ es el potencial Newtoniano. Las geodésicas nulas obedecen

$$\frac{dr}{dt} = \sqrt{\frac{[1 + \frac{2\varphi}{c^2}]}{[1 - \frac{2\varphi}{c^2}]}} c \quad (10.2)$$

Esto indica que el campo gravitatorio se puede reemplazar por un índice de refracción equivalente

$$n = \sqrt{\frac{[1 - \frac{2\varphi}{c^2}]}{[1 + \frac{2\varphi}{c^2}]}} \approx 1 - \frac{2\varphi}{c^2} \quad (10.3)$$

A diferencia del índice de refracción de un medio material, el índice equivalente no depende de la frecuencia de la luz. La trayectoria del rayo queda determinada por el principio de Fermat, es decir, es un extremo del camino óptico

$$L = \int_D^F n d\ell \quad (10.4)$$

La parametrización de la trayectoria es arbitraria, de manera que podemos usar la coordenada z . Entonces

$$L = \int_0^Z dz n [z, z\vec{\vartheta}] \sqrt{1 + z^2 \left(\frac{d\vec{\vartheta}}{dz} \right)^2} \quad (10.5)$$

Las condiciones de contorno son $\vec{\vartheta}(0) = \vec{\theta}$, $\vec{\vartheta}(Z) = \vec{\theta}_F$. Las ecuaciones de Euler-Lagrange resultan en

$$\frac{d}{dz} \left\{ \frac{n [z, z\vec{\vartheta}]}{\sqrt{1 + z^2 \left(\frac{d\vec{\vartheta}}{dz} \right)^2}} z^2 \frac{d\vec{\vartheta}}{dz} \right\} = \left\{ \nabla_{\vec{\vartheta}} n [z, z\vec{\vartheta}] \right\} \sqrt{1 + z^2 \left(\frac{d\vec{\vartheta}}{dz} \right)^2} \quad (10.6)$$

Como las derivadas de n son pequeñas, podemos linealizar alrededor de la trayectoria recta $\vec{\vartheta} = \vec{\theta} + \delta\vec{\vartheta}$

$$\frac{d}{dz} \left\{ z^2 \frac{d\delta\vec{\vartheta}}{dz} \right\} = \nabla_{\vec{\theta}} n [z, z\vec{\theta}] \quad (10.7)$$

Integrando una vez

$$\frac{d\delta\vec{\vartheta}}{dz} = \frac{1}{z^2} \int_0^z dz' \nabla_{\vec{\theta}} n [z', z'\vec{\theta}] \quad (10.8)$$

Y finalmente

$$\begin{aligned} \vec{\theta}_F - \vec{\theta} &= \int_0^Z \frac{dz}{z^2} \int_0^z dz' \nabla_{\vec{\theta}} n [z', z'\vec{\theta}] \\ &= \int_0^Z dz' \nabla_{\vec{\theta}} n [z', z'\vec{\theta}] \left(\frac{1}{z'} - \frac{1}{Z} \right) \equiv \nabla_{\vec{\theta}} \Phi_L [\vec{\theta}] \end{aligned} \quad (10.9)$$

Para simplificar, vamos a asumir que el “potencial” de la lente Φ_L tiene simetría axial, de manera que la fuente y su imagen están sobre el mismo radio vector.

10.1. Lente puntual

En el caso en que la lente es un objeto puntual a una distancia Z_L del detector, el potencial Newtoniano es el potencial de Coulomb y el potencial de la lente es

$$\Phi_L [\vec{\theta}] = \frac{2GM}{c^2 Z} \int_0^Z \frac{dz'}{z'} \frac{(Z - z')}{\sqrt{(z' - Z_L)^2 + z'^2 \theta^2}} \quad (10.10)$$

En este caso, la fuente y la imagen están sobre el mismo radio vector, y

$$\theta_F - \theta = -\frac{2GM}{c^2 Z} \theta \int_0^Z \frac{dz' z' (Z - z')}{[(z' - Z_L)^2 + z'^2 \theta^2]^{3/2}} \quad (10.11)$$

La deflexión se produce cuando $z' \approx Z_L$, de modo que podemos aproximar

$$\theta_F - \theta = -\frac{2GM}{c^2 b} \left(1 - \frac{Z_L}{Z}\right) \int_{-\infty}^{\infty} \frac{dx}{[x^2 + 1]^{3/2}} = -\frac{4GM}{c^2 b} \left(1 - \frac{Z_L}{Z}\right) \quad (10.12)$$

donde $b = Z_L \theta$ es el parámetro de impacto. Reemplazando obtenemos

$$\theta = \theta_F + \frac{\theta_E^2}{\theta} \quad (10.13)$$

donde

$$\theta_E^2 = \frac{4GM}{c^2 Z_L} \left(1 - \frac{Z_L}{Z}\right) \quad (10.14)$$

θ_E es el *ángulo de Einstein*. Para cada valor de θ_F hay dos valores posibles de θ

$$\theta_{\pm} = \frac{1}{2} \left[\theta_F \pm \sqrt{\theta_F^2 + 4\theta_E^2} \right] \quad (10.15)$$

θ_+ es siempre mayor que θ_F y θ_E , mientras que θ_- es menor que ambos.

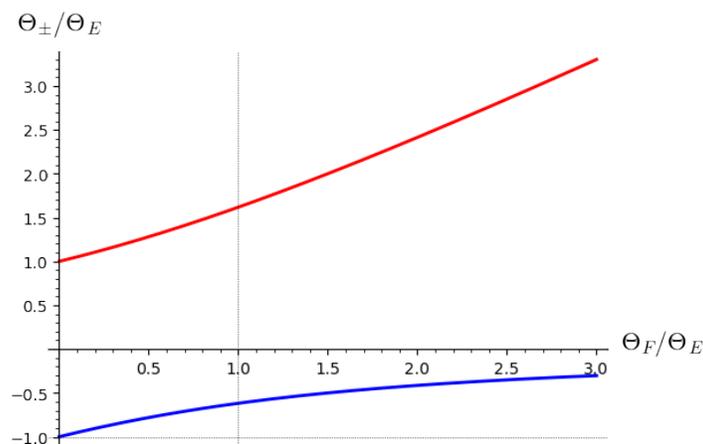


Figura 10.2: Los ángulos θ_* (rojo) y θ_- (azul) en función de θ_F .

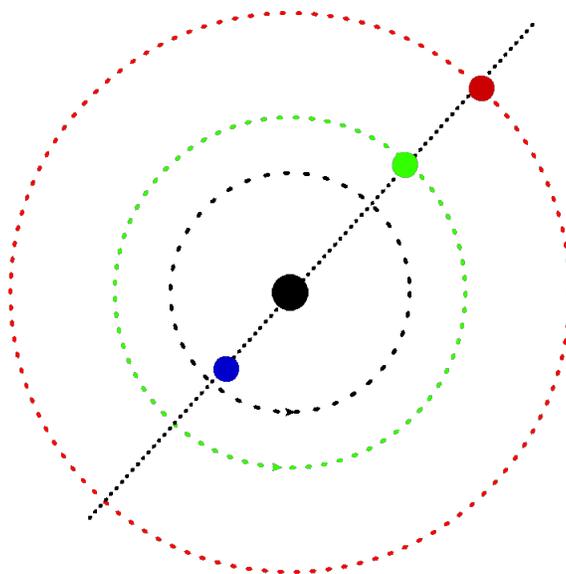


Figura 10.3: Lente gravitacional puntual. Es la imagen de 10.1, vista desde el punto de vista del detector, y mostrando las dos imágenes (rojo y azul) de la fuente (verde). El círculo interior marca el radio de Einstein.



Figura 10.4: El campo lejano de Hubble deformado por el paso de una lente gravitatoria frente al telescopio (fuente: ESA/Hubble).

El centro de la imagen, la fuente y sus dos imágenes están alineados, el signo de θ_- indica que se encuentra en el lado opuesto a la fuente. Si la fuente y la lente están alineadas ($\theta_F = 0$), las imágenes forman un círculo de apertura θ_E .

Es conveniente introducir la variable

$$x = \frac{\theta_F}{\sqrt{\theta_F^2 + 4\theta_E^2}} \quad (10.16)$$

$0 \leq x \leq 1$. Entonces

$$\begin{aligned}\theta_+ &= \frac{1}{2}\theta_E \left[1 + \frac{1}{x}\right] \\ \frac{d\theta_+}{d\theta} &= \frac{1}{2}[1+x] \leq 1\end{aligned}\quad (10.17)$$

Por este motivo la imagen de una fuente extensa se ve afinada en la dirección polar y alargada en la axial, tendiendo a verse como un arco. En la otra imagen

$$\begin{aligned}\theta_- &= \frac{1}{2}\theta_E \left[1 - \frac{1}{x}\right] \\ \frac{d\theta_-}{d\theta} &= \frac{1}{2}[1-x] \leq 1\end{aligned}\quad (10.18)$$

Supongamos que en vez de ser puntual, la fuente subtende un ángulo sólido $d\Omega = \theta_F d\theta_F d\varphi$. Entonces cada imagen subtende un ángulo sólido

$$\begin{aligned}d\Omega_+ &= \theta_+ d\theta_+ d\varphi = \frac{1}{4} \left[1 + \frac{1}{x}\right] [1+x] d\Omega_F \\ d\Omega_- &= |\theta_-| d\theta_- d\varphi = \frac{1}{4} \left[\frac{1}{x} - 1\right] [1-x] d\Omega_F\end{aligned}\quad (10.19)$$

Entonces

$$d\Omega_+ + d\Omega_- = \frac{1}{2} \left[x + \frac{1}{x}\right] d\Omega_F \geq d\Omega_F \quad (10.20)$$

Cada punto de una imagen es la imagen de un punto en la fuente y tiene la misma luminosidad por unidad de ángulo sólido que éste; por lo tanto, la suma de las dos imágenes, por subtender un ángulo sólido mayor, se ve más luminosa que la fuente en ausencia de la lente.

Gracias a esto, el fenómeno de lente gravitacional permite detectar un exoplaneta gracias al cambio en el brillo de la estrella debido al tránsito del planeta. En este caso la deflexión de los rayos de luz es demasiado débil como para resolver las imágenes de la estrella, pero se puede detectar el aumento de la luminosidad de la estrella durante el tránsito.

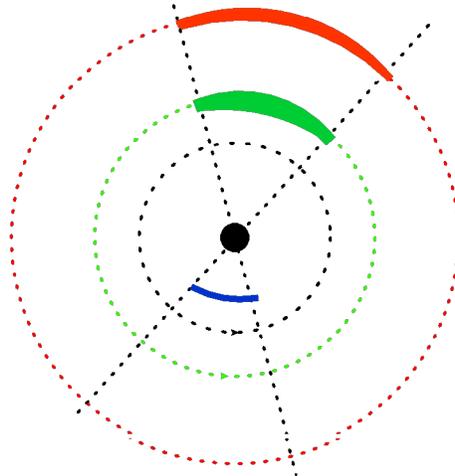


Figura 10.5: Imágenes de una fuente extensa.

10.2. Lentes gravitacionales y radiación cósmica de fondo

La fuente más lejana que existe en el Universo es la radiación cósmica de fondo. Supongamos que en una región del cielo la distribución “verdadera” de temperaturas es $\bar{T}[\theta]$. La distribución observada es en cambio $T[\bar{\theta}]$, con

$$T[\vec{\theta}] = \bar{T}[\vec{\theta}_F] = \bar{T}[\vec{\theta} + \nabla_{\vec{\theta}}\Phi_L] \quad (10.21)$$

En primer aproximación

$$T[\vec{\theta}] \approx \bar{T}[\vec{\theta}] + \nabla_{\vec{\theta}}\Phi_L \cdot \nabla_{\vec{\theta}}\bar{T}[\vec{\theta}] \quad (10.22)$$

El efecto de lente gravitatoria no cambia la temperatura media de la RCF, pero sí su distribución en modos. Supongamos que la RCF “verdadera” tiene una función de correlación (bajo la aproximación de “cielo plano”)

$$\langle \bar{T}[\vec{\theta}] \bar{T}[\vec{\theta}'] \rangle = \int \frac{d^2k}{(2\pi)^2} e^{i\vec{k}\cdot(\vec{\theta}-\vec{\theta}')} \bar{C}_k \quad (10.23)$$

Por otro lado, si descomponemos en modos

$$\bar{T}[\vec{\theta}] = \int \frac{d^2k}{(2\pi)^2} e^{i\vec{k}\cdot\vec{\theta}} \bar{T}_{\vec{k}} \quad (10.24)$$

Entonces

$$\langle \bar{T}_{\vec{k}} \bar{T}_{\vec{k}'} \rangle = (2\pi)^2 \delta(\vec{k} + \vec{k}') \bar{C}_k \quad (10.25)$$

que es el teorema de Wiener-Khinchin. Nótese que modos distintos son estadísticamente independientes. Ahora, la RCF observada tiene una distribución en modos

$$T_{\vec{k}} = \bar{T}_{\vec{k}} - \int \frac{d^2p}{(2\pi)^2} \vec{p} \cdot (\vec{k} - \vec{p}) \Phi_{L\vec{p}} \bar{T}_{\vec{k}-\vec{p}} \quad (10.26)$$

Y por lo tanto la correlación de los modos observados es

$$\langle T_{\vec{k}} T_{\vec{k}'} \rangle = (2\pi)^2 \delta(\vec{k} + \vec{k}') \bar{C}_k - (2\pi)^2 \int \frac{d^2p}{(2\pi)^2} \Phi_{L\vec{p}} \vec{p} \cdot [(\vec{k} - \vec{p}) \delta(\vec{k} + \vec{k}' - \vec{p}) \bar{C}_{k'} + (\vec{k}' - \vec{p}) \delta(\vec{k} + \vec{k}' - \vec{p}) \bar{C}_k] \quad (10.27)$$

o sea

$$\langle T_{\vec{k}} T_{\vec{k}'} \rangle = (2\pi)^2 \delta(\vec{k} + \vec{k}') \bar{C}_k + \Phi_{L(\vec{k}+\vec{k}')} (\vec{k} + \vec{k}') \cdot [\vec{k}' \bar{C}_{k'} + \vec{k} \bar{C}_k] \quad (10.28)$$

De esta forma, la aparición de correlaciones entre modos no opuestos es un trazador de la distribución de masa en el Universo.

10.3. Apéndice: La ecuación de Limber

Como hemos visto, existen formas de mapear el potencial de la lente formada por la distribución de masa en el Universo. La pregunta es si es posible determinar a partir de ahí el potencial Newtoniano, que es equivalente a determinar la distribución de masa misma.

Supongamos que las fluctuaciones en la densidad de masa del Universo tienen una función de correlación

$$\langle \rho[\vec{x}] \rho[\vec{x}'] \rangle = \int \frac{d^3k}{(2\pi)^3} e^{i\vec{k}\cdot(\vec{x}-\vec{x}')} \rho_k \quad (10.29)$$

Entonces el potencial Newtoniano tiene una función de correlación

$$\langle \varphi[\vec{x}] \varphi[\vec{x}'] \rangle = (4\pi G)^2 \int \frac{d^3k}{(2\pi)^3} e^{i\vec{k}\cdot(\vec{x}-\vec{x}')} k^{-4} \rho_k \quad (10.30)$$

Y el potencial de lente gravitatoria

$$\langle \Phi_L[\vec{\theta}] \Phi_L[\vec{\theta}'] \rangle = \left(\frac{16\pi G}{c^2} \right)^2 \int \frac{d^3k}{(2\pi)^3} \int_0^\infty \frac{dz}{z} \int_0^\infty \frac{dz'}{z'} e^{i[k_z(z-z') + \vec{k}_\perp \cdot (z\vec{\theta} - z'\vec{\theta}')] } k^{-4} \rho_k \quad (10.31)$$

La *aproximación de Limber* consiste en notar que la principal contribución a la integral proviene de la región en que $z' \approx z$. Entonces podemos aproximar

$$\langle \Phi_L [\vec{\theta}] \Phi_L [\vec{\theta}'] \rangle = \left(\frac{16\pi G}{c^2} \right)^2 \int \frac{d^2 k_\perp}{(2\pi)^2} \int_0^\infty \frac{dz}{z^2} e^{iz\vec{k}_\perp \cdot (\vec{\theta} - \vec{\theta}')} k_\perp^{-4} \rho_{k_\perp} \quad (10.32)$$

Si escribimos la función de correlación como

$$\langle \Phi_L [\vec{\theta}] \Phi_L [\vec{\theta}'] \rangle = \int \frac{d^2 \ell}{(2\pi)^2} e^{i\vec{\ell} \cdot (\vec{\theta} - \vec{\theta}')} \Phi_{L\ell} \quad (10.33)$$

Entonces

$$\begin{aligned} \Phi_{L\ell} &= (2\pi)^2 \left(\frac{16\pi G}{c^2} \right)^2 \int \frac{d^2 k_\perp}{(2\pi)^2} \int_0^\infty \frac{dz}{z^2} k_\perp^{-4} \delta(z\vec{k}_\perp - \vec{\ell}) \rho_{k_\perp} \\ &= \left(\frac{16\pi G}{c^2} \right)^2 \frac{1}{\ell^4} \int_0^\infty dz \rho_{\ell/z} \end{aligned} \quad (10.34)$$

10.4. Acerca de la literatura

Esta clase está basada en el Hartle y en Scott Dodelson y Fabian Schmidt, *Modern Cosmology* (2ª edición, Academic Press, 2021). También consultamos Arthur B. Congdon y Charles R. Keeton, *Principles of Gravitational Lensing* (Springer, 2018).

Como lectura suplementaria, recomendamos Lahav, Ofer, Calder, Lucy, Mayers, Julian y Frieman, Joshua A. (editores), *The Dark Energy Survey* (World Scientific, 2021).

Capítulo 11

Kerr o no Kerr

La métrica de un agujero negro de Kerr es

$$\begin{aligned}
 ds^2 = & -\frac{1}{\rho^2} (\Delta - a^2 \sin^2 \theta) dt^2 - 2 \frac{2Mar \sin^2 \theta}{\rho^2} dt d\varphi + \frac{\rho^2}{\Delta} dr^2 + \rho^2 d\theta^2 \\
 & + \frac{1}{\rho^2} (\Delta^2 + 4Mr\Delta - \Delta a^2 \sin^2 \theta + 4M^2 r^2) \sin^2 \theta d\varphi^2
 \end{aligned} \tag{11.1}$$

donde

$$\begin{aligned}
 \rho^2 &= r^2 + a^2 - a^2 \sin^2 \theta \\
 \Delta &= r^2 - 2Mr + a^2
 \end{aligned} \tag{11.2}$$

Tomando el límite $r \rightarrow \infty$ vemos que corresponde a una fuente de masa M e impulso angular $J = aM$; cuando $a \rightarrow 0$ se convierte en la métrica de Schwarzschild. La métrica es independiente de las coordenadas t y φ , es decir, es estacionaria, pero no es estática, porque $g_{t\varphi} \neq 0$.

De entrada vemos que hay dos superficies “interesantes”, la superficie $\Delta^2 = 0$, en la que diverge g_{rr} , y la superficie $\Delta = a^2 \sin^2 \theta$, en la que se anula g_{tt} . Como vamos a ver, la primera corresponde al “horizonte”.

Una manera de verlo es ver cuándo la métrica tiene un autovalor nulo (que en Schwarzschild ocurre en $r = 2M$). Si la métrica tiene un autovalor nulo, entonces su determinante se anula. Está claro que ni g_{rr} ni $g_{\theta\theta}$ se anulan nunca, de manera que basta ver el determinante de 2×2

$$\begin{aligned}
 & \frac{\sin^2 \theta}{\rho^4} \det \begin{pmatrix} -(\Delta - a^2 \sin^2 \theta) & -2Mar \sin^2 \theta \\ -2Mar & (\Delta^2 + 4Mr\Delta - \Delta a^2 \sin^2 \theta + 4M^2 r^2) \end{pmatrix} \\
 = & -\frac{\sin^2 \theta}{\rho^4} \Delta [\Delta + 2Mr - a^2 \sin^2 \theta]^2 = -\Delta \sin^2 \theta
 \end{aligned} \tag{11.3}$$

Vemos que el determinante sólo se anula si $\Delta = 0$. Además, si $\Delta > 0$ los autovalores tienen signos opuestos, de manera que existe una dirección “tiempo” con un autovalor negativo no nulo.

Ahora, la ecuación $\Delta = 0$ admite dos raíces

$$r_{\pm} = M \pm \sqrt{M^2 - a^2} \tag{11.4}$$

Si $a = 0$, $r_+ = 2M$, $r_- = 0$. Si $a = M$, decimos que es un “agujero negro extremo”, ya vamos a ver porqué; ahí $r_+ = r_- = M$. Si $a > M$ no hay horizonte. El rango que nos interesa es cuando $0 < a < M$, allí $r_+ > r_-$ y

$$\Delta = (r - r_+)(r - r_-) \tag{11.5}$$

(nótese que $r_+ r_- = a^2$). Entonces, si $r > r_+$, $\Delta > 0$ y existe una dirección temporal que es alguna combinación de las direcciones de t y de ϕ . Si $r_+ > r > r_-$, $\Delta < 0$ y la coordenada “temporal” es r . Pero si $r < r_-$, entonces $\Delta > 0$ nuevamente. Existe una singularidad en $r = 0$, pero es una singularidad espacial, no temporal como en Schwarzschild.

Esto se puede representar en un diagrama de Penrose. La figura (11.1) representa la región exterior al agujero, donde las geodésicas nulas salientes son asintóticas al horizonte en el pasado lejano (el horizonte funciona como un “agujero blanco”) y las entrantes son asintóticas a r_+ en el futuro lejano.

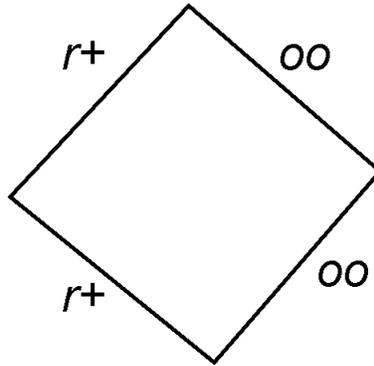


Figura 11.1: La región exterior de un agujero negro de Kerr.

Como en los casos de Rindler y Schwarzschild, podemos extender la variedad a una segunda cuña, con lo que obtenemos la figura (11.2)

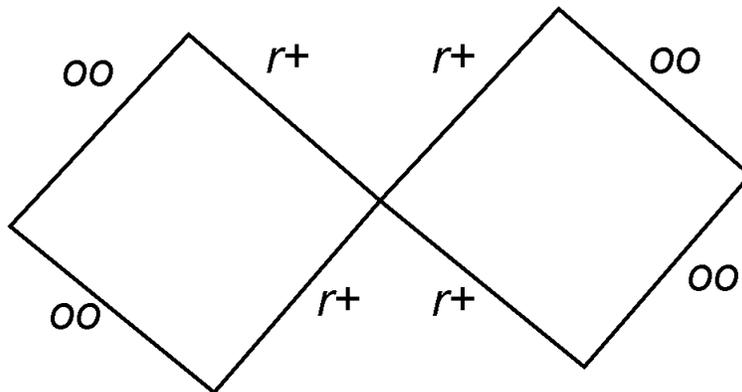


Figura 11.2: La variedad extendida de un agujero negro de Kerr.

Si un observador atraviesa el horizonte exterior, se encontrará con el horizonte interior en su futuro, como muestra la fig. (11.3)

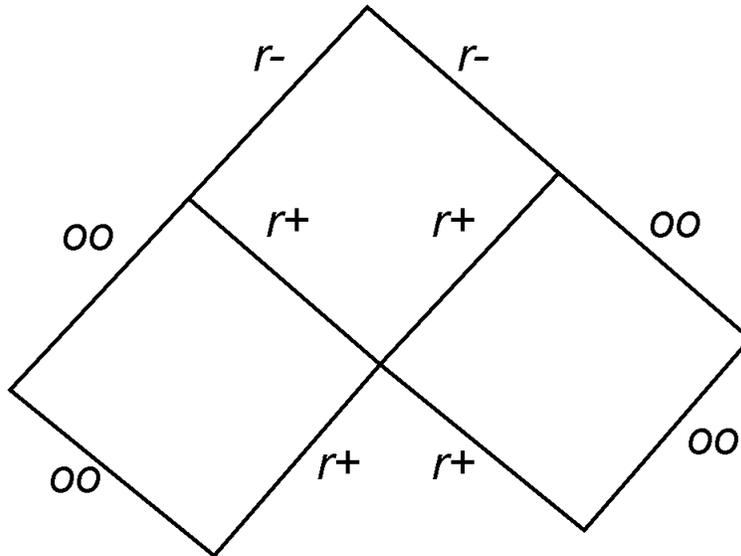


Figura 11.3: El horizonte interno está en el futuro del externo.

pero la singularidad en $r = 0$ no está en el futuro, sino al costado, del horizonte interno (fig. (11.4)).

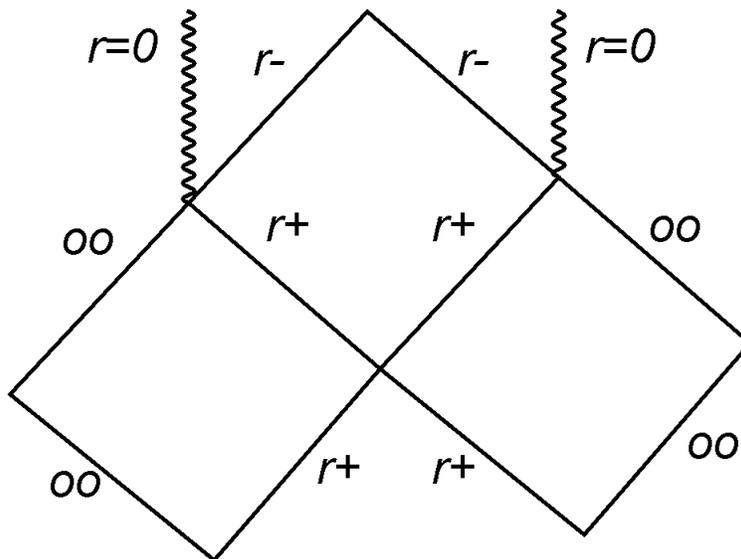


Figura 11.4: El horizonte interno está en el futuro del externo.

De esa manera uno obtiene una celda básica que se puede repetir indefinidamente, como en la fig. (11.5)

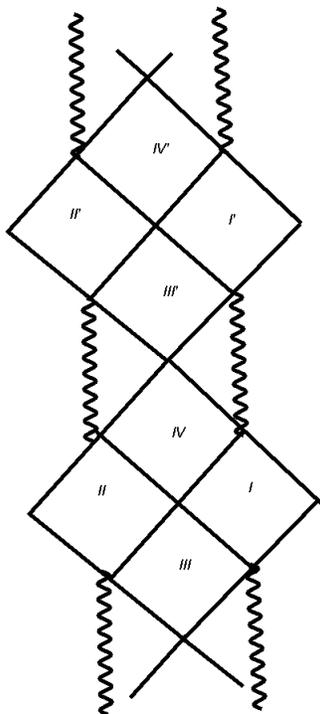


Figura 11.5: El diagrama de Penrose del espacio de Kerr, obtenido duplicando la celda básica.

Esto sugiere que un agujero negro de Kerr podría funcionar como un *agujero de gusano*, ya que un observador podría entrar al horizonte en el diamante I y emerger en el I', que existe en otro Universo.

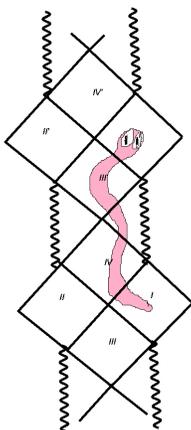


Figura 11.6: El agujero negro de Kerr como agujero de gusano.

El área del horizonte es

$$A = \int d\theta d\varphi \sqrt{g_{\theta\theta}g_{\varphi\varphi}} = 4\pi (2Mr_+) = 4\pi (r_+^2 + a^2) \tag{11.6}$$

11.1. La ergosfera

La métrica de Kerr admite dos vectores de Killing,

$$\begin{aligned} \xi^\mu &= (1, 0, 0, 0) \\ \eta^\mu &= (0, 0, 0, 1) \end{aligned} \tag{11.7}$$

Por lo tanto, en una geodésica cuyo vector tangente sea la tetravelocidad u^μ , la energía

$$E = -\xi_\mu u^\mu = -g_{tt}u^t - g_{t\varphi}u^\varphi \quad (11.8)$$

y el momento angular

$$\ell = \eta_\mu u^\mu = g_{\varphi t}u^t + g_{\varphi\varphi}u^\varphi \quad (11.9)$$

se conservan. Como sólo una componente del momento angular se conserva, en general las geodésicas no son planas, excepto las que están en el plano del ecuador, $\theta = \pi/2$, protegidas por la simetría norte-sur.

Nos preguntamos por la posibilidad de observadores en reposo, es decir, con $u^r = u^\theta = u^\varphi = 0$ (obviamente, su línea de mundo no es una geodésica), y

$$g_{tt}(u^t)^2 = -1 \quad (11.10)$$

o sea

$$\left(1 - \frac{2Mr}{\rho^2}\right)(u^t)^2 = 1 \quad (11.11)$$

Ahora nos llevamos una sorpresa, porque para que ésto sea posible debe ser

$$\frac{2Mr}{\rho^2} < 1 \quad (11.12)$$

Como $\rho^2 = r^2 + a^2 \cos^2 \theta$ es definido positivo, debe ser

$$r^2 + a^2 \cos^2 \theta - 2Mr > 0 \quad (11.13)$$

es decir

$$r > r_{ERGO} = M + \sqrt{M^2 - a^2 \cos^2 \theta} \quad (11.14)$$

(*ERGO* por *ergosfera*, ya que para $r < r_{ERGO}$ es posible extraer energía del agujero negro mediante el *proceso de Penrose*). Nótese que $r_{ERGO} \geq r_+$, con igualdad en los polos.

La conclusión por ahora es que para $r \leq r_{ERGO}$ es imposible para un observador permanecer en reposo, no importa qué fuerzas actúen sobre él. Lo más parecido a un observador en reposo es un *zero angular momentum observer* (ZAMO), es decir, un observador con $\ell = 0$.

La tetravelocidad de un ZAMO se puede escribir como

$$U^\mu = \beta (\xi^\mu + \Omega \eta^\mu) \quad (11.15)$$

donde

$$\Omega = \frac{d\varphi}{dt} = \frac{u^\varphi}{u^t} \quad (11.16)$$

Es la velocidad angular con la que el ZAMO rota alrededor del agujero negro. Entonces

$$0 = \ell_{ZAMO} = \beta (\eta_\mu \xi^\mu + \Omega \eta_\mu \eta^\mu) \quad (11.17)$$

de donde

$$\Omega = \frac{-g_{t\varphi}}{g_{\varphi\varphi}} \quad (11.18)$$

Notamos que $\Omega > 0$. Cuando $r \rightarrow r_+$, la velocidad angular tiende a

$$\Omega = \frac{a}{2Mr_+} \quad (11.19)$$

que identificamos como la velocidad de rotación del agujero negro.

La tetravelocidad de una partícula real debe estar confinada al cono de la luz futuro y tener norma -1 . Fuera de la ergosfera, donde $g_{tt} < 0$, eso implica que la energía medida por un observador en reposo debe ser positiva. Dentro de la ergosfera, pedimos que la energía medida por un ZAMO sea positiva. Asumiendo $\beta > 0$ encontramos

$$0 \leq -(\xi^\mu + \Omega\eta^\mu)u^\mu = E - \Omega\ell \quad (11.20)$$

Es decir, E puede ser negativa, provisto que $|\ell|$ sea lo bastante grande.

Si esta partícula cae en el agujero negro, la masa del agujero se reduce. En el *proceso de Penrose*, la partícula de energía negativa resulta de la fisión de una partícula de energía positiva; la otra partícula del par tiene energía positiva y escapa al infinito, por lo que el resultado neto es extraer energía del agujero. Nótese sin embargo que la cantidad

$$dM - \Omega dJ \geq 0 \quad (11.21)$$

11.2. ¿Termodinámica de agujeros negros?

Una de las interpretaciones posibles de Ω es que ΩdJ es el trabajo necesario para cambiar el momento angular del agujero negro “adiabáticamente”, aunque no está muy claro qué quiere decir adiabático en este contexto. Efectivamente, si formamos la forma diferencial

$$\varpi = dM - \Omega dJ \quad (11.22)$$

está claro que no es un diferencial exacto, ya que si lo fuera tendría que ser $\partial\Omega/\partial M = 0$ a J constante, y evidentemente no lo es. Sin embargo, admite un factor integrante

$$dM - \Omega dJ = T'' d''S'' \quad (11.23)$$

lo cual no es sorprendente porque todas las formas en dos dimensiones admiten uno. Lo sorprendente es que T y S terminan siendo cantidades físicamente significativas

En vez de tomar M y J como variables independientes, es mejor tomar a y r_+ . Entonces

$$\begin{aligned} M &= \frac{r_+^2 + a^2}{2r_+} \\ J &= aM = \frac{a(r_+^2 + a^2)}{2r_+} \\ \Omega &= \frac{a}{r_+^2 + a^2} \end{aligned} \quad (11.24)$$

y entonces

$$dM - \Omega dJ = \frac{(r_+^2 - a^2)}{2r_+(r_+^2 + a^2)} [r_+ dr_+ + ada] \quad (11.25)$$

Reconocemos que

$$r_+ dr_+ + ada = \frac{1}{8\pi} dA \quad (11.26)$$

donde A es el área del horizonte, ec. (11.6). Por lo tanto

$$T = \frac{1}{8\pi} \frac{(r_+^2 - a^2)}{2r_+(r_+^2 + a^2)} \quad (11.27)$$

En el límite de Schwarzschild $a \rightarrow 0$, $r_+ \rightarrow 2M$ y $T \rightarrow 1/8\pi(4M)$. Resulta que $1/4M$ es una cantidad significativa, la *gravedad superficial* del agujero negro. Es posible demostrar que la “temperatura” definida por 11.27 juega un papel similar en la métrica de Kerr.

En el límite $a \rightarrow M$, $T \rightarrow 0$, por lo que el estado crítico sería el “cero absoluto” del agujero negro.

11.2.1. Sobre la literatura

Además de los libros usuales, usé Derek Raine y Edwin Thomas, *Black Holes*, Imperial College Press (2015) y J. Hartle, *Gravity*, Pearson (2003).

Para un tratamiento exhaustivo ver Valeri P. Frolov y Andrei Zelnikov, *Introduction to Black Hole Physics*, Oxford (2011), cuya dedicatoria comparto.

El clásico sobre las leyes de los agujeros negros es B. Carter, The general theory of the mechanical, electromagnetic and thermodynamic properties of black holes, en S. W. Hawking y W. Israel (editores), *General Relativity, an Einstein centenary survey*, Cambridge UP (1979), p. 294.

11.3. Geodésicas nulas en el plano ecuatorial

Consideramos una geodésica nula confinada al plano ecuatorial. Entonces, poniendo $\theta = \pi/2$, $\rho = r$ y la ecuación para las geodésicas nulas

$$0 = - \left(1 - \frac{2M}{r}\right) \left(\frac{dt}{d\lambda}\right)^2 - 2\frac{2Ma}{r} \frac{dt}{d\lambda} \frac{d\varphi}{d\lambda} + \frac{r^2}{\Delta} \left(\frac{dr}{d\lambda}\right)^2 + \left(r^2 + a^2 + \frac{2Ma^2}{r}\right) \left(\frac{d\varphi}{d\lambda}\right)^2 \quad (11.28)$$

Podemos expresar $\frac{dt}{d\lambda}$ y $\frac{d\varphi}{d\lambda}$ en términos de E y $\ell = bE$.

$$\begin{aligned} \frac{dt}{d\lambda} &= \frac{1}{\Delta} \left[\left(r^2 + a^2 + \frac{2Ma^2}{r}\right) E - \frac{2Ma}{r} \ell \right] \\ \frac{d\varphi}{d\lambda} &= \frac{1}{\Delta} \left[\frac{2Ma}{r} E + \left(1 - \frac{2M}{r}\right) \ell \right] \end{aligned} \quad (11.29)$$

Nótese que el parámetro de impacto b puede ser positivo o negativo. Si es positivo quiere decir que el momento angular del fotón está en la misma dirección que el momento angular del agujero negro, y si es negativo, que los momentos angulares son opuestos.

Reemplazando en 11.28

$$0 = r^2 \left(\frac{dr}{d\lambda}\right)^2 - \left(r^2 + a^2 + \frac{2Ma^2}{r}\right) E^2 + \left(1 - \frac{2M}{r}\right) \ell^2 + 2\frac{2Ma}{r} E\ell \quad (11.30)$$

Si escribimos $\ell = bE$, donde b es el parámetro de impacto, encontramos

$$\frac{1}{2} \left(\frac{dr}{d\lambda}\right)^2 + \frac{E^2}{2} V[r] = \frac{E^2}{2} \quad (11.31)$$

con

$$V[r] = \frac{(b^2 - a^2)}{r^2} - 2M \frac{(b - a)^2}{r^3} \quad (11.32)$$

Es decir, la coordenada radial se comporta como una partícula sometida a un potencial centrífugo $\propto r^{-2}$ y un potencial atractivo $\propto r^{-3}$. El potencial tiene un máximo, que corresponde a una órbita circular inestable (OCI), cuando

$$V'[r_{OCI}] = 0 \quad (11.33)$$

de donde

$$\frac{1}{r_{OCI}} = \frac{1}{3M} \frac{b + a}{b - a} \quad (11.34)$$

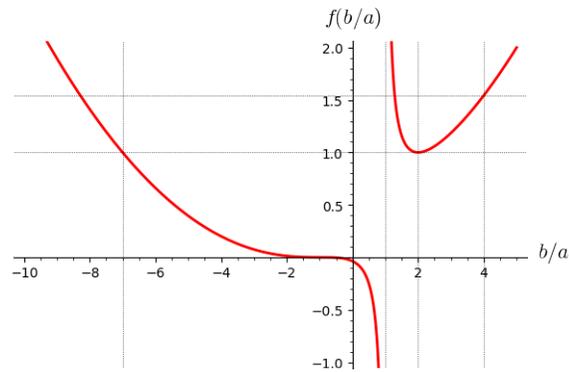
El valor del potencial en el máximo es

$$V[r_{OCI}] = \frac{(b + a)^3}{27M^2 (b - a)} \quad (11.35)$$

Entonces, si $V[r_{OCI}] > 1$, existe un punto de retorno clásico, y el fotón es dispersado por el agujero negro, si $V[r_{OCI}] < 1$ el fotón pasa por encima de la barrera de potencial y cae al agujero negro, y si $V[r_{OCI}] = 1$ el fotón queda atrapado, espiralando alrededor de la órbita inestable. Nótese que el número de vueltas que da el fotón antes de caer al agujero negro o de alejarse nuevamente es proporcional al tiempo que tarda en superar la barrera (ya que la velocidad angular permanece esencialmente constante), y este tiempo diverge cuando $V[r_{OCI}] \rightarrow 1$.

Es conveniente introducir variables $x = a/M$ ($0 \leq x \leq 1$) e $y = b/a$. Entonces la condición $V[r_{OCI}] = 1$ se convierte en

$$f(y) = \frac{(y + 1)^3}{27(y - 1)} = \frac{1}{x^2} \quad (11.36)$$

Figura 11.7: $f(y)$.

Graficamos $f(y)$ en la figura 11.7. Si $y > 1$, $f(y)$ tiene un mínimo cuando $y = 2$, que corresponde a $f(y) = 1$ y por lo tanto es solución cuando $x = 1$, es decir, para un agujero negro crítico. En este caso existe otra solución en $b = -7$, nótese la asimetría según la orientación de los momentos angulares. Para cualquier otro valor de x , tendremos una solución con $b > 2$; valores de b mayores a esta solución indican trayectorias abiertas, mientras que valores de b por debajo de esta solución indican trayectorias atrapadas, con un análisis similar para los b negativos. La segunda solución con b positivo indica una trayectoria que está confinada entre la barrera de potencial y el agujero.

Supongamos que estamos mirando al agujero negro y tenemos la suerte de que la línea de mira sea perpendicular al momento del agujero. Detrás del agujero está el plasma caliente de su propio disco de acreción. Pero nosotros vemos una *sombra* alrededor del agujero, ya que rayos con un parámetro de impacto por debajo de un valor límite no pueden escapar al infinito. Los puntos con $b/a = 2$ y $b/a = -7$ marcan los límites de la sombra en el plano ecuatorial (para dibujar el perfil completo deberíamos resolver las geodésicas tridimensionales). La asimetría en la forma de la sombra por lo tanto lleva información sobre el spin del agujero negro. Este efecto ha sido espectacularmente demostrado por la imagen del agujero negro en el centro de la galaxia M87 construída por el Event Horizon Telescope (abril 2017).

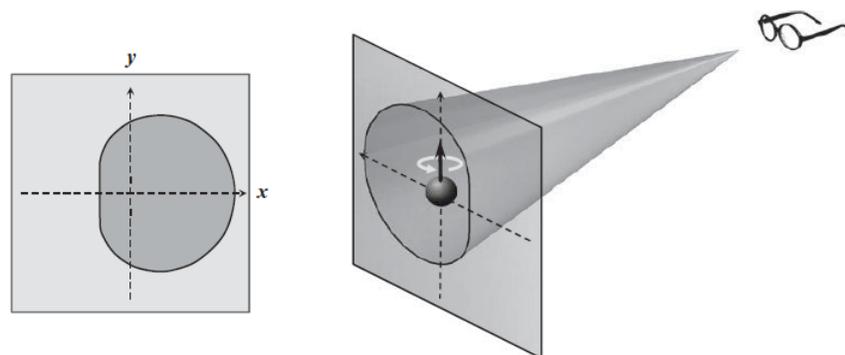


Fig. 8.12 The observer is looking in the direction of the black hole. On the background of the sky the black hole will be visible as a black spot ('shadow') with the shape of a deformed disk that is slightly shifted in the direction of rotation of the black hole (to the right). For an extremal black hole $a/M = 1$, when observed from the equatorial plane, the left edge of the shadow is a vertical straight line between the points $(-2M, -\sqrt{3}M)$ and $(-2M, \sqrt{3}M)$. The right edge is at $x = 7M$.

Figura 11.8: La sombra de un agujero negro rotante. Tomado de Valeri Frolov and Andrei Zelnikov, *Introduction to Black Hole Physics*, Oxford (2011).

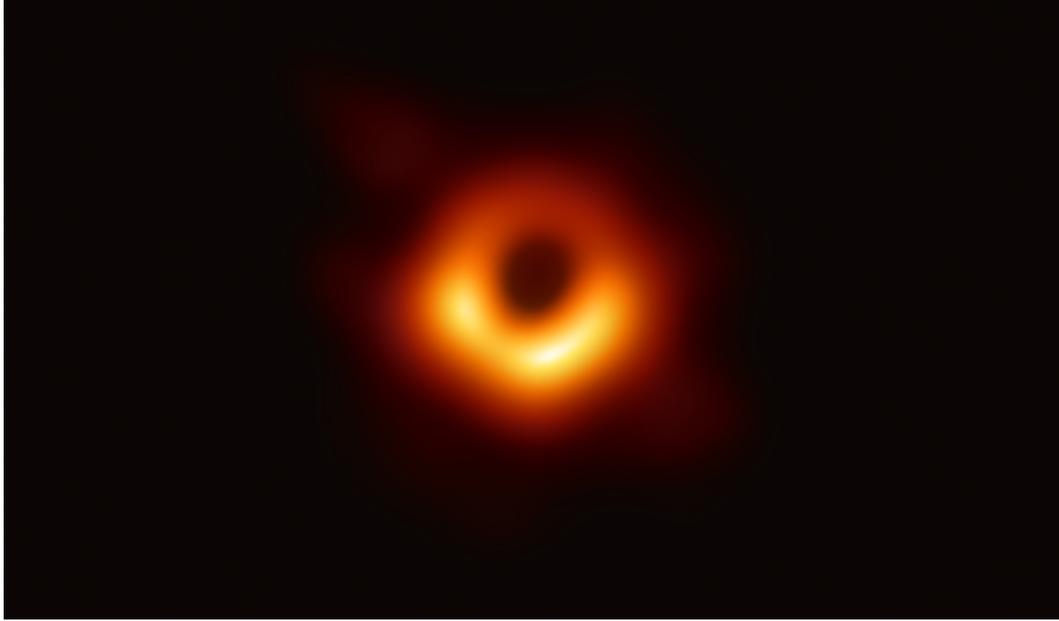


Figura 11.9: El agujero negro en el centro de la galaxia M87, imagen tomada por el Event Horizon Telescope en Abril de 2017.

La Segunda Ley all'uso nostro

Si un fotón de energía E cae en el agujero negro, entonces su masa se incrementa en $dM = E$ y su momento angular en $dJ = \ell = bE$. Por lo tanto tenemos

$$dM - \Omega dJ = (1 - \Omega b) E \quad (11.37)$$

Obviamente, si $b < 0$ (suponemos $a > 0$) esta cantidad es positiva. Si $b > 0$, observamos que para que el fotón realmente caiga en el agujero negro, debe ser $b \leq b_{min}$. Efectivamente $\Omega b_{min} \leq 1$ para todo a en el rango entre 0 y M , verificando que el área del agujero aumenta en todos los casos.

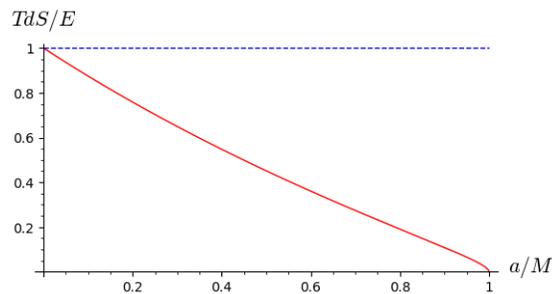


Figura 11.10: La Segunda Ley.

No hay dos sin tres

Supongamos que lloremos fotones sobre un agujero negro de manera de aumentar su rotación. ¿Podemos lograr que el agujero se vuelva crítico ($a \geq M$)?

Nuestros fotones vienen de fuera de la ergosfera así que tienen energía positiva. Si $b < 0$, reducen la rotación. Queremos b lo más grande posible, pero si $b \geq b_{min}$ correspondiente a la trayectoria asintótica a la órbita circular inestable, no es absorbido. Por lo tanto, nuestra mejor estrategia es enviar fotones con b apenas por debajo de b_{min} . Ahora, si $e \ll M$ es la energía del fotón, tenemos $dM = e$, $dJ = be$, y

$$d\left(\frac{a}{M}\right) = d\left(\frac{J}{M^2}\right) = \frac{e}{M^2} (b - 2a) \quad (11.38)$$

Para que el proceso funcione, debe ser $b > 2a$, pero cuando $a/M \rightarrow 1$ el propio $b_{min} \rightarrow 2a$ (ver la fig. (11.7)). Los fotones que estamos enviando tardan cada vez más en atravesar la barrera de potencial, para lograr cada vez menos en términos de aumentar el cociente a/M . Juntando ambos resultados, vemos que no es posible llegar al estado crítico en un tiempo finito, lo cual se parece al principio de Nernst o Tercera Ley de la Termodinámica, la imposibilidad de alcanzar el cero absoluto de temperatura.

Capítulo 12

Termodinámica de agujeros negros

Nuestro objetivo es verificar la primera ley de los agujeros negros

$$dM - \Omega dJ - \Phi dQ = \frac{\kappa}{2\pi} d\frac{A}{4} \quad (12.1)$$

para un agujero negro de Kerr-Newman, donde los distintos símbolos representan la masa, velocidad angular, momento angular, potencial electrostático, carga, gravedad superficial y área del agujero negro. No vamos a asumir una forma dada para la gravedad superficial, sino que vamos a dejar que surja como factor integrante en la ec. (12.1).

Empecemos por ver que no es nada obvio que una forma diferencial en 3 variables

$$\varpi = udx + vdy + wdz \quad (12.2)$$

admita un factor integrante como en la ec. (12.1). Esta claro que la forma ϖ está asociada a un vector $\vec{v} = (u, v, w)$. Podríamos pedir que ϖ sea un *diferencial exacto*

$$\varpi = d\phi \quad (12.3)$$

Eso sería equivalente a pedir que \vec{v} sea un gradiente

$$\vec{v} = \nabla\phi \quad (12.4)$$

y la condición necesaria y suficiente es que se anule el rotor

$$\nabla \times \vec{v} = 0 \quad (12.5)$$

Pedir que ϖ admita un factor integrante

$$\varpi = \psi d\phi \quad (12.6)$$

es equivalente a pedir que

$$\vec{v} = \psi \nabla\phi \quad (12.7)$$

Tomando el rotor de ambos miembros

$$\nabla \times \vec{v} = \nabla\psi \times \nabla\phi = \frac{1}{\psi} \nabla\psi \times \vec{v} \quad (12.8)$$

y por lo tanto

$$\vec{v} \cdot \nabla \times \vec{v} = 0 \quad (12.9)$$

Se puede demostrar que esta condición necesaria también es suficiente. Existen campos vectoriales que no satisfacen esta condición, por ejemplo

$$\vec{w} = x\hat{y} + \hat{z} \quad (12.10)$$

se ve fácilmente que

$$\vec{w} \cdot \nabla \times \vec{w} = 1 \quad (12.11)$$

En cambio, cualquier vector de la forma

$$f(x, y) \hat{x} + g(x, y) \hat{y} \quad (12.12)$$

la satisface. Entonces, la existencia de un factor integrante es trivial en dos dimensiones, pero no en tres, y se vuelve cada vez más excepcional cuando aumentamos el número de dimensiones.

Por supuesto, nosotros estamos pidiendo más que la mera existencia, ya que estamos diciendo además que la forma en cuestión debe ser proporcional al diferencial del área. Es conveniente adoptar como variables el radio del horizonte r_+ y el factor a , además de la carga Q , con lo cual las distintas cantidades se convierten en

$$\begin{aligned} M &= \frac{1}{2r_+} (r_+^2 + a^2 + Q^2) \\ \Omega &= \frac{a}{r_+^2 + a^2} \\ J &= aM \\ \Phi &= \frac{Qr_+}{r_+^2 + a^2} \\ A &= 4\pi (r_+^2 + a^2) \end{aligned} \quad (12.13)$$

y la ecuación 12.1 se convierte en

$$(1 - \Omega a) dM - \Omega M da - \Phi dQ = \kappa (r_+ dr_+ + ada) \quad (12.14)$$

es decir

$$\begin{aligned} (1 - \Omega a) \frac{\partial M}{\partial Q} &= \Phi \\ (1 - \Omega a) \frac{\partial M}{\partial r_+} &= \kappa r_+ \\ (1 - \Omega a) \frac{\partial M}{\partial a} &= \kappa a + \Omega M \end{aligned} \quad (12.15)$$

que se verifican fácilmente, con

$$\kappa = \frac{(r_+^2 - a^2 - Q^2)}{2r_+ (r_+^2 + a^2)} \quad (12.16)$$

que en el caso de Schwarzschild se reduce a

$$\kappa = \frac{1}{2r_+} = \frac{1}{4M} \quad (12.17)$$

y siempre se anula en los agujeros negros críticos.

12.1. Gravedad superficial en Schwarzschild

La idea básica de gravedad superficial es que es la aceleración de un observador estacionario sobre la superficie del agujero. En Schwarzschild, un observador estacionario tiene una tetravelocidad

$$u^\mu = \left(|g_{tt}|^{-1/2}, 0, 0, 0 \right) \quad (12.18)$$

y por lo tanto su aceleración

$$a^\mu = u^\nu \nabla_\nu u^\mu = \Gamma_{00}^\mu |g_{tt}|^{-1} \quad (12.19)$$

La única componente no nula es

$$a^r = \frac{1}{2} g^{rr} (-g_{tt,r}) |g_{tt}|^{-1} = \frac{M}{r^2} \quad (12.20)$$

Que coincide con 12.17. Sin embargo, eso no es lo que hay que mirar, si no

$$a^2 = g_{rr} a^{r2} = \frac{Mr^{-2}}{1 - \frac{2M}{r}} \quad (12.21)$$

que diverge sobre el horizonte, lo que indica que el observador es incapaz de sostenerse sobre el horizonte una vez en él.

Sin embargo, un observador *en el infinito* puede proveer esta aceleración ejerciendo una fuerza finita, que es precisamente (por unidad de masa) la gravedad superficial κ . El motivo es que las fuerzas se corren al rojo igual que lo hacen las frecuencias; una fuerza cerca del horizonte, corrida al rojo por un factor $1 - 2M/r$, resulta en una fuerza finita muy lejos del agujero.

Para entender ésto, pensemos en una onda que se propaga en Schwarzschild como un tren de pulsos. La frecuencia de la onda es proporcional a la inversa de la distancia *en tiempo propio* entre pulsos. Pero cuando la onda se propaga, lo que se mantiene constante es la distancia *en tiempo coordenado*. Entonces, puesto que

$$ds = \sqrt{|g_{tt}|} dt \quad (12.22)$$

entonces la onda va cambiando de frecuencia con la distancia al agujero según la ley

$$\omega(r) = \frac{\omega}{\sqrt{|g_{tt}|}} \quad (12.23)$$

Pensemos ahora que tenemos un gas de fotones en equilibrio alrededor del agujero. En cada punto vemos al gas a temperatura $T(r)$. Eso quiere decir que la probabilidad de encontrar a un fotón de frecuencia ω es proporcional al factor de Planck

$$p(\omega, r) = \frac{1}{e^{\omega(r)/T(r)} - 1} \quad (12.24)$$

Si el gas está globalmente en equilibrio esta probabilidad debe ser independiente de r , por lo cual la temperatura local varía proporcionalmente a la frecuencia

$$T(r) = \frac{T}{\sqrt{|g_{tt}|}} \quad (12.25)$$

Por la Ley cero de la termodinámica, esta ley debe valer para cualquier sistema en equilibrio, aunque no sea un gas de fotones. La ecuación 12.25 enuncia el *teorema de Tolman*.

Ahora, si el gas a temperaturas distintas a distintas distancias del agujero, yo podría hacer andar una máquina de Carnot usando como fuente caliente el gas cerca del agujero y como fuente fría el gas lejos del agujero, y estaría violando el principio de Kelvin, ya que extraería trabajo de una única fuente térmica. Eso no es así, y la razón es que los trabajos se corren al rojo igual que las temperaturas. Cuando yo extraigo una cantidad de calor $dQ(r_<)$ cerca del agujero, para convertirla en trabajo, también provocho una caída de la entropía del gas $dS = dQ(r_<)/T(r_<)$. Para reponer esa entropía a una distancia $r_>$ necesito un calor $dQ(r_>) = T(r_>) dS$. Resulta que el calor $dQ(r_<)$, transportado hasta $r_>$, es precisamente $dQ(r_>)$: no hay excedente que pueda convertir en trabajo, y la eficiencia de la máquina es cero.

Ahora, imaginemos una cuerda inextensible dispuesta radialmente. Si yo desplazo la cuerda una distancia *coordenada* dr , en cada segmento de la cuerda la tensión realiza un trabajo $F(r) dr$. Por conservación de la energía, si yo transporto estos trabajos a un punto común (por ejemplo, el infinito), todos deben ser iguales (de otra manera, yo podría fabricar un móvil perpetuo extrayendo trabajo de los segmento más productivos y volviendo a inyectar una parte en los menos productivos). Por lo tanto las fuerzas se corren al rojo igual que los trabajos

$$F(r) = \frac{F}{\sqrt{|g_{tt}|}} \quad (12.26)$$

La ley 12.26 explica que yo puedo ejercer una fuerza infinita sobre la superficie del agujero con un tirón finito lejos del agujero; si el tirón lo hago arbitrariamente lejos, obtengo la gravedad superficial, que resulta ser efectivamente $1/4M$.

12.2. De la gravedad superficial a la temperatura

Hasta ahora, la primera ley de los agujeros negros no es más que una analogía curiosa. Ahora vamos a argumentar que $\kappa/2\pi$ *realmente* es la temperatura del agujero negro, por lo cual $A/4$ realmente debe ser su entropía.

Supongamos, por ejemplo, que queremos calcular la energía libre de un sistema cuántico a una temperatura finita T . Entonces escribimos

$$e^{-F/T} = \text{tr} e^{-H/T} = \sum_{\alpha} \langle \alpha | e^{H/T} | \alpha \rangle \quad (12.27)$$

Ahora, $e^{-itH/\hbar}$ es el operador de evolución, demodo que podemos pensar a $e^{-H/T}$ como un operador que evoluciona al sistema en un tiempo *euclídeo* $\tau = -i\hbar/T$. En esa evolución, el sistema comienza en algún estado $|\alpha\rangle$ y termina en el mismo estado, de manera que la evolución es periódica. En otras palabras, yo pongo al sistema a una temperatura T si lo continúo analíticamente al tiempo euclídeo, y luego impongo condiciones de contorno periódicas en el tiempo euclídeo con periodicidad \hbar/T .

Ahora miremos el espacio de Rindler. El espacio de Rindler se obtiene del de Minkowski mediante la transformación

$$\begin{aligned} t_M &= \rho \sinh t_R \\ x &= \rho \cosh t_R \end{aligned} \quad (12.28)$$

El intervalo

$$ds^2 = -\rho^2 dt_R^2 + d\rho^2 \quad (12.29)$$

Por lo tanto, en una órbita con $\rho = \text{constante}$ tenemos $dt_R/ds = 1/\rho$. Estas órbitas describen la trayectoria de un observador acelerado con aceleración $a = 1/\rho$.

Cuando pasamos al tiempo euclídeo mediante la transformación $t_R = -i\tau$, la cuña de Rindler se convierte en un plano

$$ds^2 = \rho^2 d\tau^2 + d\rho^2 \quad (12.30)$$

Por lo tanto τ ya es una variable periódica, con periodicidad 2π . Cuando doy una vuelta al plano, la periodicidad en tiempo propio es $\delta s = 2\pi\rho$. Por lo tanto, un observador acelerado ya tiene una periodicidad en el tiempo euclídeo, y se autopercebe como un sistema a temperatura $\hbar/\delta s$, es decir

$$T = \frac{\hbar}{2\pi\rho} \quad (12.31)$$

Nótese que la dependencia con ρ es consistente con la ley de Tolman 12.25. Reemplazando ρ por la aceleración

$$T = \frac{\hbar a}{2\pi} \quad (12.32)$$

Ahora sólo queda observar que un observador estacionario fuera del agujero *es* un observador acelerado con aceleración dada por la gravedad superficial, de donde

$$T = \frac{\hbar\kappa}{2\pi} \quad (12.33)$$

En esta sección hemos conservado los factores de \hbar para subrayar la naturaleza cuántica del fenómeno, pero por supuesto $\hbar = 1$.

Este argumento acerca de la identidad entre gravedad superficial y temperatura es sólo una de muchas maneras de llegar al mismo resultado.

12.3. Sobre la literatura

De las muchas discusiones sobre termodinámica de agujeros negros en la literatura, la del libro de Raine y Thomas, ya citado, es de las más accesibles.

Sobre las múltiples formas de llegar a la entropía y temperatura de Hawking, ver S. Carlip, *Black Hole thermodynamics and Statistical Mechanics*, en E. Papantonopoulos (Ed.), *Physics of Black Holes*, Springer (2009), p. 89.

Sobre la matemática de los factores integrantes, ver P. Bamberg y Sh. Sternberg, *A course in Mathematics for students of physics* (2 Vol.), Cambridge (1988).

12.4. Relatividad y termodinámica

Las leyes de los agujeros negros que venimos discutiendo empezaron siendo teoremas acerca de propiedades de ciertas soluciones de las ecuaciones de Einstein que se podían frasear de una manera que evocaba las leyes de la termodinámica, lo cual estaba en algún lugar entre un recurso nemotécnico y una broma interna. Los argumentos de Hawking en el sentido de que $\kappa/2\pi$ *realmente* eran una temperatura, más los de Bekenstein sugiriendo que la termodinámica entraría en crisis si uno pudiera impunemente esconder entropía detrás de los horizontes de eventos, cambiaron radicalmente esta situación. Pero la comunidad no aceptó inmediatamente la *Segunda Ley generalizada*, es decir, que la entropía de Bekenstein-Hawking $A/4$ debía incluirse en el balance de entropía de un sistema que incluyera agujeros negros, en pie de igualdad con la entropía termodinámica habitual.

Entre varios experimentos pensados que se propusieron para iluminar la viabilidad de la segunda ley generalizada vamos a presentar la *máquina de Geroch*, figura 12.1.

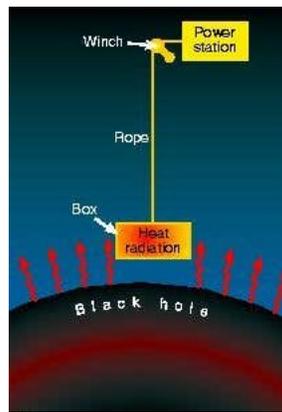


Figura 12.1: La máquina de Geroch. Tomado de P. Davies, The Thought that Counts, New Scientist, <https://www.newscientist.com/article/mg14619764-300-the-thought-that-counts/>.

La máquina de Geroch es una máquina térmica que ejecuta un ciclo de Carnot. La fuente caliente es un horno que emite radiación, con la que llenamos una caja (que no tiene masa y, cuando está cerrada, aísla perfectamente sus contenidos del exterior) hasta que contiene una masa m a una temperatura T_c . m es por lo tanto también el calor extraído de la fuente caliente.

La caja se deja descender suavemente sobre un agujero negro (esta es la pata adiabática del ciclo) hasta una altura r_0 , realizando un trabajo W . Allí se abre la caja y se deja caer el contenido al agujero negro (que de esta manera se comporta como la fuente fría del ciclo), y luego se vuelve a izar la caja realizando un trabajo $W' = 0$, ya que la caja está vacía y su masa es despreciable. De este modo la eficiencia del ciclo es $\eta = W/m$.

Ahora, la fuerza necesaria para hacer descender la caja, cuando ésta está a una altura r , no es muy distinta de la fuerza necesaria para mantener a la caja en reposo a esa altura, es decir mM/r^2 , donde M es la masa del agujero. Como vimos la clase pasada, las fuerzas se corren al azul como las frecuencias, de modo que la fuerza sobre la caja es

$$F(r) = \frac{mM}{r^2 \sqrt{1 - \frac{2M}{r}}} \quad (12.34)$$

y el trabajo realizado al bajar la caja es

$$W = \int_{r_0}^{\infty} dr \frac{mM}{r^2 \sqrt{1 - \frac{2M}{r}}} = m \left[1 - \sqrt{1 - \frac{2M}{r_0}} \right] \quad (12.35)$$

Se ve que podemos hacer W tan cerca de m como querramos haciendo que r_0 se aproxime al radio de Schwarzschild $r_S = 2M$. Por lo tanto la eficiencia de la máquina es $\eta = 1$, y por el Teorema de Carnot

$$\eta = 1 - \frac{T_f}{T_c} \quad (12.36)$$

la temperatura del agujero negro, que es la fuente fría, debe ser $T_f = 0$.

El argumento de Geroch fue refutado por Unruh y Wald, quienes, citando un paper anterior de Arquímedes, argumentaron que al descender, la caja experimenta una fuerza de sustentación igual al peso de la radiación de Hawking

que desplaza. Como la radiación es cada vez más caliente cuanto más cerca estamos del horizonte, en algún momento la caja flota y no puede bajar más. Como la energía de radiación, para un volumen dado, sólo depende de la temperatura, el punto de flotación se da cuando la temperatura T_c en el interior de la caja es igual a la temperatura en el exterior, que sigue la ley de Tolman

$$T(r) = \frac{T_{BH}}{\sqrt{1 - \frac{2M}{r}}} \quad (12.37)$$

con T_{BH} la temperatura de Hawking del agujero. De manera que en el punto de flotación, $T_c = T(r)$,

$$\sqrt{1 - \frac{2M}{r}} = \frac{T_{BH}}{T_c} \quad (12.38)$$

y la eficiencia de la máquina es precisamente la de Carnot, con $T_f = T_{BH}$.

12.5. El Dogma Central

Los argumentos de Bekenstein, Hawking, Unruh y Wald demostraron que un agujero negro se comporta como una fuente térmica, y como absorbe toda la radiación que incide sobre él, de hecho *un agujero negro es un cuerpo negro*. Por las leyes de Kirchhoff, se deduce que un agujero negro debe emitir un flujo de radiación $\sigma c T^4$ por unidad de área, donde σ es la constante de Stefan-Boltzmann. Integrando sobre el área, y usando que $T = 1/8\pi M$, encontramos que el agujero pierde masa a una velocidad

$$\frac{dM}{dt} = \frac{\sigma c}{(8\pi)^4 M^4} 16\pi M^2 = \frac{K}{M^2} \quad (12.39)$$

donde la constante K sólo involucra factores numéricos y constantes universales. Esta ecuación se integra a

$$M(t) = [M^3(0) - 3Kt]^{1/3} \quad (12.40)$$

que muestra que el agujero se evapora completamente en un tiempo finito.

La evaporación de un agujero negro no entra en conflicto con la termodinámica, provisto que la entropía final de la radiación sea igual o superior a la entropía inicial del agujero, pero plantea un conflicto con la mecánica cuántica.

Supongamos que un cierto sistema cuántico colapsa hasta formar un agujero negro. Luego éste se evapora y deja un gas de radiación térmica. Si el sistema original estaba en un estado puro, tenía entropía cero, mientras que la radiación térmica tiene una entropía finita. Por lo tanto la entropía aumentó durante el proceso, lo que está de acuerdo con la Segunda Ley generalizada pero es imposible bajo una evolución unitaria.

De este modo, o la radiación de agujeros negros no se rige por las leyes usuales de la mecánica cuántica, que prescribe una evolución unitaria, o nos estamos perdiendo algo. En los 1970's la posición prevalente (y la del mismo Hawking) era la primera, pero eventualmente recobró fuerza la segunda, abogada entre otros por Maldacena. Esto culminó con la proclamación del *Dogma Central*

Visto de lejos, un agujero negro no es distinto de cualquier otro sistema cuántico con un número muy grande ($\propto e^{A/4}$) de estados.

12.6. La curva de Page

La *curva de Page* (llamada así por su descubridor, Don Page) permite ver claramente las dificultades implícitas en el Dogma Central.

Volvamos a considerar el planteo de la sección anterior, un sistema cuántico en un estado puro que colapsa a un agujero negro que subsecuentemente comienza a evaporarse, y miremos un tiempo intermedio, donde la evaporación todavía no es completa. Como creemos en el Dogma Central, vamos a tratar el agujero negro como un sistema cuántico, digamos con estados $|BH\pm\rangle$, y lo mismo para la radiación, con estados $|\gamma\pm\rangle$. Como creemos que la evolución es unitaria, el estado conjunto del agujero negro y la radiación debe ser un *estado entrelazado*, por ejemplo

$$|BH\gamma\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}} [|BH+\rangle |\gamma-\rangle + |BH-\rangle |\gamma+\rangle] \quad (12.41)$$

Vemos que estamos en la situación planteada en la paradoja de Einstein, Podolski y Rosen. Si nos preguntamos por el estado del agujero negro, sólo podemos decir que hay una probabilidad $1/2$ de que sea $|BH+\rangle$, e igualmente para

$|BH-\rangle$. No es posible encontrar un ket que describa esta situación. Decimos que el agujero negro está en un *estado mezclado*. Un estado mezclado que no es un estado puro posee una entropía finita, en nuestro caso, ya que ambas probabilidades coinciden, una entropía igual a 1 bit, $S = k_B \ln 2$.

La situación, entonces, es que el Dogma Central nos lleva a considerar situaciones en el que el sistema completo de agujero negro y radiación está en un estado puro, con entropía $S_{BH\gamma} = 0$, pero el agujero negro y la radiación consideradas por separado están en estados mezclados con entropías S_{BH} y S_γ respectivamente.

En esta situación vale la *desigualdad triangular*

$$|S_{BH} - S_\gamma| \leq S_{BH\gamma} \leq S_{BH} + S_\gamma \tag{12.42}$$

En particular, si $S_{BH\gamma} = 0$, debe ser $S_{BH} = S_\gamma$.

El problema es que la entropía del agujero negro $4\pi M^2$ disminuye a medida que el agujero negro pierde masa, ver fig. (12.2)

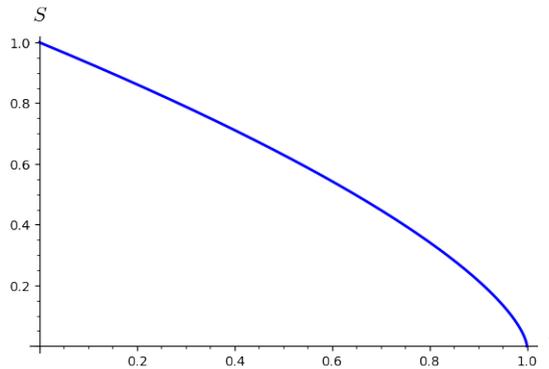


Figura 12.2: La evolución de la entropía del agujero negro durante el proceso de evaporación.

Al mismo tiempo, la entropía de la radiación aumenta, debiendo alcanzar un valor mayor o igual al inicial del agujero al final del proceso, ver fig. 12.3.

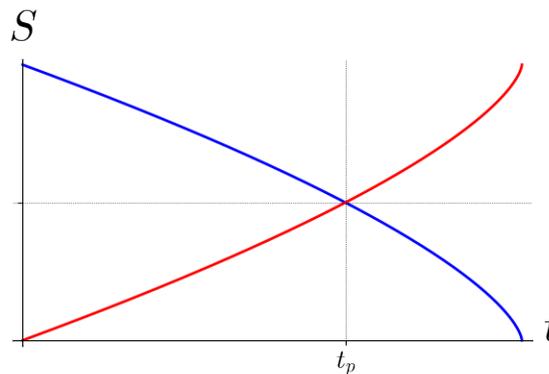


Figura 12.3: (azul) La evolución de la entropía del agujero negro durante el proceso de evaporación; (rojo) id. para la radiación. Las dos curvas se cruzan en el *tiempo de Page* t_p

Claramente, es difícil ver cómo las dos entropías podrían ser iguales, salvo en el *tiempo de Page* t_p en el que se cruzan.

Para poder avanzar, debemos resignificar los términos con los que venimos trabajando. La entropía $A/4$ (y lo mismo para la radiación) son las *entropías de granulado grueso*, esencialmente el logaritmo del número de estados, que serían las entropías termodinámicas en una situación de máxima ignorancia. En la situación real del proceso de evaporación, nuestra ignorancia no es total y las entropías relevantes no son las entropías de grano grueso sino entropías de *grano fino*, que aún no sabemos cómo calcular. De todos modos, como las entropías de grano fino deben ser iguales entre sí, y no pueden superar las entropías de grano grueso de cada sistema, deben estar confinadas en la zona sombreada de la fig. 12.4.

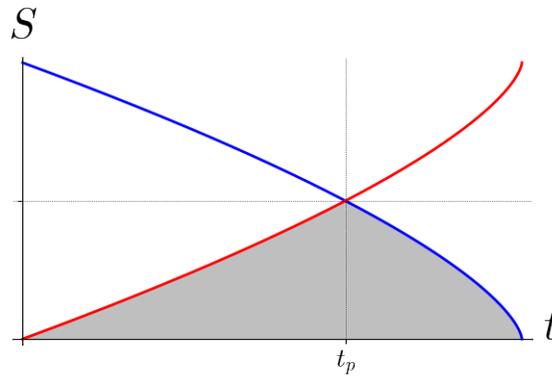


Figura 12.4: Las entropías de grano fino del agujero negro y de la radiación deben permanecer iguales entre sí y no pueden superar las entropías de grano grueso correspondientes. Por lo tanto están confinadas al área sombreada.

En realidad, uno espera que las entropías de grano fino sigan el borde superior del área permitida. Supongamos que uno entrelazara la galaxia con un qbit, formando un estado puro. Como la entropía del qbit no puede superar $\ln 2$, tampoco lo puede superar la entropía de la galaxia. Pero el número de estados mezclados de la galaxia con entropía $\ln 2$ es fantásticamente más grande que el de estados, digamos, con entropía $\ln 2/2$. Por eso podemos estar confiados de que si miramos el estado de la galaxia, efectivamente vamos a encontrar un estado con la máxima entropía permitida, que a su vez va a obligar al qbit a estar máximamente mezclado. Lo mismo pasa con el agujero negro y la radiación.

Todavía tenemos que explicar cómo la entropía de granulado fino de la radiación, que venía creciendo en tiempos antes del tiempo de Page, comienza a disminuir luego de ese tiempo. Una consideración importante es que es fácil construir modelos en que el tiempo de Page ocurre claramente dentro del rango de validez de la aproximación semiclásica, así que deberíamos poder encontrar una respuesta sin apelar a una teoría de gravedad cuántica todavía en construcción.

Una explicación simple sería que de alguna manera el agujero negro guarda una copia de cada fotón que emite, y comienza a emitir las copias luego del tiempo de Page, de manera que la radiación se convierte en un gas de partículas fuertemente correlacionadas con entropía cada vez más baja. Un problema con esta explicación es que viola un teorema de Wootters y Zurek acerca de la imposibilidad de copiar un sistema cuántico. Una salida sería esconder las copias detrás de una *pared de fuego* más allá del horizonte, pero eso a su vez viola el principio de equivalencia, ya que un observador inercial cayendo en el agujero negro no debería observar nada parecido.

La solución que está sobre la mesa comienza distinguiendo que, como los posibles estados del campo gravitatorio son parte de la “suma de estados” que contribuyen a la entropía, lo que hay que hacer es diseñar una frontera (cuyo radio es de algunos radios de Schwarzschild) que separa la zona en que la métrica puede considerarse fija de la zona en que no puede asegurarse tal cosa. El problema es asignarle una entropía al interior de esa frontera, en base a lo que podemos observar desde la zona exterior.

El problema se resuelve si aceptamos que dentro de la frontera existe una segunda superficie, la *superficie extremal*, con área A_{ext} , de tal manera que la entropía de grano fino siga la ley

$$S = \frac{1}{4}A_{ext} + S_m \quad (12.43)$$

donde S_m es la entropía de la materia que hubiera quedado entre la superficie extremal y la frontera. Todo ocurre como si al comienzo del proceso el radio del área extremal es mucho menor al radio de Schwarzschild, y luego comienza a crecer, hasta que ambos radios se encuentran (el radio de Schwarzschild viene disminuyendo debido a la pérdida de masa del agujero), alrededor del tiempo de Page, luego de lo cual el horizonte y el área extremal se encogen juntos.

Acerca de los argumentos por los cuales debiera haber algo así como un área extremal, y porqué se comporta de esa manera, nos referiremos a la literatura.

12.7. Acerca de la literatura

Esta clase está basada en A. Almheiri, Th. Hartman, J. Maldacena, E. Shaghoulian y A. Tajdini, The entropy of Hawking radiation, *Rev. Mod. Phys* 93, 035002 (2021).

Acerca del uso de experimentos pensados en termodinámica de agujeros negros, ver R. El Skaf y P. Palacios, What can we learn (and not learn) from thought experiments in black hole thermodynamics?, *Synthese* 200, 434 (2022).

Sobre las contribuciones de Arquímedes a la termodinámica de agujeros negros, ver Archimedes, *The Works of Archimedes*, editado por T. L. Heath, Cambridge University Press, Cambridge (1897, 2010).

Sobre porqué un absorbente perfecto debe radiar como un cuerpo negro, ver M. Planck, *The theory of heat radiation*, Dover (1991).

Sobre la curva de Page, ver D. Page, Information in Black Hole Radiation, *Phys. Rev. Lett.* 71, 3743 (1993); Hawking radiation and black hole thermodynamics, *New J. Phys.* 7, 203 (2005); Time dependence of Hawking radiation entropy, *JCAP* 09, 028 (2013).

Muchos de los temas básicos de mecánica cuántica los vemos en la materia de termodinámica avanzada, algún día los apuntes serán publicados por Eudeba. Mientras tanto, ver A. Peres, *Quantum Theory: Concepts and Methods*, Kluwer Academic Publishers (2002).

Sobre el teorema de Wootters y Zurek, ver W. Wootters y W. Zurek, A single quantum cannot be cloned, *Nature* 299, 802 (1982).

Sobre paredes de fuego, ver A. Almheiri, D. Marolf, J. Polchinski y J. Sully, Black holes: complementarity or firewalls?, *JHEP* 02, 062 (2013).

Sobre el cálculo de las entropías de granulado fino que presentamos al final de la clase ver A. Almheiri, Th. Hartman, J. Maldacena, E. Shaghoulian y A. Tajdini, Replica wormholes and the entropy of Hawking radiation, *JHEP* 05, 013 (2020). Un intento de hacer una presentación “didáctica” es N. Callebaut, Entanglement in conformal field theory and holography, en B. Hartmann y J. Kunz (editoras), *Gravity, Cosmology, and Astrophysics*, LNP 1022, Springer (2023), p. 239-271.

Bibliografía

- [1] B. Schutz, *A first course in General Relativity* (3rd ed.), Cambridge University Press (2022).
- [2] Ch. Misner, K. Thorne and J. A. Wheeler, *Gravitation* (W. H. Freeman, San Francisco, 1970).
- [3] L. Landau y E. Lifchitz, *Physique Theorique Tome 2: Theorie des champs* (Mir, Mosc, 1964).
- [4] K. Schaffner, *Nineteen-century aether theories*, Pergamon (1972).
- [5] R. Ferraro y D. Sforza, Arago (1810): the first experimental result against the ether, *Eur. J. Phys.* 26, 195204 (2005).
- [6] Amitabha Ghosh, *Conceptual Evolution of Newtonian and Relativistic Mechanics*, Springer (2018).
- [7] L. Landau y E. Lifshitz, *Teoría de los campos*, Revert008).
- [8] G. Gamow, *Gravity*, Anchor Books (1962).
- [9] S. Brush, *The kind of motion we call heat*, 2 Vol, North Holland (1976).
- [10] K. Hentschel, *Photons*, Springer (2018).
- [11] M. Segre, Galileo, Viviani and the Tower of Pisa, *Stud. Hist. Phil. Sk.*, Vol. 20, No. 4, pp. 435-451, 1989.
- [12] L. Landau y E. Lifshitz, *Mecca*, Revert994).
- [13] E. Hecht, *Optics*, Pearson (2017).
- [14] V. I. Arnold, *Mathematical methods of classical mechanics*, Springer (1989).
- [15] B. Latour, A Relativistic Account of Einstein's Relativity, *Social Studies of Science* 18, 3 (1988).