Relatividad General – 1er cuatrimestre de 2024

Guía 3: *Geometría diferencial.*

1. El ejemplo más sencillo no trivial de variedad diferenciable es la 2-esfera S^2, definida como el conjunto de puntos $(x^1, x^2, x^3) \in \mathbb{R}^3$ tales que

$$(x^1)^2 + (x^2)^2 + (x^3)^2 = 1. \tag{1}$$

Para ver que efectivamente es una variedad diferenciable, considere los seis hemisferios

$$O_i^{\pm} = \{(x^1, x^2, x^3) \in S^2 \mid \pm x^i > 0\} \qquad i = 1, 2, 3, \tag{2}$$

y sea $f_i^{\pm} : O_i^{\pm} \to \mathbb{R}^2$ la proyección de $O_i^{\pm}$ sobre el plano $x^i = 0$, es decir, $f_1^{\pm}(x^1, x^2, x^3) = (x^2, x^3)$ y análogamente para las otras cuatro funciones. Muestre que el conjunto $\{(O_i^{\pm}, f_i^{\pm})\}$ es un atlas C^∞ para S^2.

2. Calcule y dibuje las curvas integrales de los siguientes campos de vectores en $\mathbb{R}^2$:

   a) $v(x, y) = -y\partial_x + x\partial_y$

   b) $w(x, y) = -(y - \ell x/r)\partial_x + (x + \ell y/r)\partial_y$, donde $r = \sqrt{x^2 + y^2}$ y ℓ es una constante.

   Ayuda: para ambos ítems, en especial el segundo, conviene usar coordenadas polares y la base asociada.

3. Dados dos campos de vectores v y w, se define su conmutador $[v, w]$ (también conocido como corchete de Lie) como el campo de vectores cuya acción sobre una función f es

$$[v, w](f) = v(w(f)) - w(v(f)). \tag{3}$$

   a) Compruebe que $[v, w]$ es efectivamente un campo de vectores verificando que es lineal y cumple la regla de Leibnitz.

   b) Muestre que, si $\{e_1, \dots, e_n\}$ es una base coordenada, entonces $[e_\alpha, e_\beta] = 0$ para todo α y β. El recíproco también resulta ser cierto: si los conmutadores se anulan, entonces la base es coordenada.

   c) Halle las componentes de $[v, w]$ en una base coordenada.

4. El gradiente de una función f se define como la 1-forma df cuya acción sobre un vector v es $df(v) = v(f)$.

   a) Dado un sistema de coordenadas $(x^1, \dots, x^n)$, mueste que el conjunto de gradientes $\{dx^1, \dots, dx^n\}$ es la base dual de la base coordenada $\{\partial_1, \dots, \partial_n\}$

   b) Halle las componentes de df en esta base.

5. En $\mathbb{R}^2$, considere los campos de vectores

$$e_r = \frac{1}{\sqrt{x^2+y^2}}\left(x\partial_x + y\partial_y\right) \qquad e_\theta = \frac{1}{\sqrt{x^2+y^2}}\left(-y\partial_x + x\partial_y\right), \tag{4}$$

definidos en toda la variedad excepto en el origen.

   a) Muestre que, en todo punto, $\{e_r, e_\theta\}$ es una base del espacio tangente.

   b) ¿Es coordenada esta base?

   c) Calcule la base dual.

6. Si T_1 y T_2 son tensores de tipo (p_1, q_1) y (p_2, q_2) sobre un espacio vectorial V, su producto tensorial $T_1 \otimes T_2$ es el tensor de tipo (p_1+p_2, q_1+q_2) definido por

$$\begin{aligned}(T_1 \otimes T_2)(\omega^1, \dots, \omega^{p_1+p_2}, v_1, \dots, v_{q_1+q_2}) &= \\ &= T_1(\omega^1, \dots \omega^{p_1}, v_1, \dots, v_{q_1}) T_2(\omega^{p_1+1}, \dots \omega^{p_1+p_2}, v_{q_1+1}, \dots, v_{q_1+q_2})\end{aligned} \tag{5}$$

para $\omega^i \in V^*$ y $v_i \in V$.

   a) Muestre que $T_1 \otimes T_2$ es efectivamente un tensor, comprobando que es multilineal.

   b) Escriba las componentes de $T_1 \otimes T_2$ en términos de las de T_1 y T_2.

   c) Si $\{e_1, \dots e_n\}$ es una base de V y $\{\sigma^1, \dots, \sigma^n\}$ es su base dual, muestre que todo tensor T de tipo (p, q) se puede escribir en la forma

$$T = T^{\alpha_1 \dots \alpha_p}{}_{\beta_1 \dots \beta_q} e_{\alpha_1 \otimes} \cdots \otimes e_{\alpha_p} \otimes \sigma^{\beta_1} \otimes \cdots \otimes \sigma^{\beta_q}, \tag{6}$$

   donde $T^{\alpha_1 \dots \alpha_p}{}_{\beta_1 \dots \beta_q}$ son las componentes de T en esta base, y se asume la identificación natural entre V y V^{**}.

7. La contracción CT de un tensor T de tipo $(p+1, q+1)$ es el tensor de tipo (p, q) cuyas componentes en alguna base son

$$(CT)^{\alpha_1 \dots \alpha_p}{}_{\beta_1 \dots \beta_q} = T^{\alpha_1 \dots \alpha_p \gamma}{}_{\beta_1 \dots \beta_q \gamma}. \tag{7}$$

Muestre que esta ecuación se sigue cumpliendo en cualquier base.

8. Un tensor T de tipo $(0, 2)$ sobre un espacio vectorial V se dice simétrico si $T(v, w) = T(w, v)$ para todo $v, w \in V$, y antisimétrico si $T(v, w) = -T(w, v)$.

   a) Muestre que, si T es simétrico/antisimétrico, entonces también lo es su matriz de componentes en cualquier base.

   b) Muestre que, si la matriz de componentes es simétrica/antisimétrica en alguna base, entonces T es simétrico/antisimétrico.

   c) Muestre que cualquier tensor de tipo $(0, 2)$ se puede escribir de forma única como la suma de un tensor simétrico y uno antisimétrico.

d) La noción de tensor simétrico o antisimétrico se extiende de manera obvia a tensores de tipo $(2,0)$. Muestre que, si S es un tensor simétrico de tipo $(0,2)$ y A un tensor antisimétrico de tipo $(2,0)$, entonces $S_{\alpha\beta}A^{\alpha\beta} = 0$.

9. Un tensor T de tipo $(0,2)$ sobre un espacio vectorial V se dice no degenerado si la condición $T(v,w) = 0$ para todo $w \in V$ implica $v = 0$. Muestre que, si T es no degenerado, entonces su matriz de componentes en cualquier base es invertible.

10. Una métrica sobre un espacio vectorial es un tensor de tipo $(0,2)$ simétrico y no degenerado.

    a) Muestre que, si g es una métrica, entonces existe una base en la que $g_{\alpha\beta} = 0$ para $\alpha \neq \beta$ y $g_{\alpha\alpha} \in \{1, -1\}$. Las bases con esta propiedad se llaman *bases ortonormales*.

    b) Muestre que el número de componentes positivas/negativas de la métrica en una base ortonormal es independiente de la base.
    Ayuda: muestre que, si no es así, el subespacio generado por los vectores de norma cuadrado positiva de una base ortonormal tiene intersección no trivial con el subespacio generado por los vectores de norma cuadrado negativa de otra base ortonormal, y llegue a un absurdo estudiando algún vector no nulo de esa intersección.

El número de componentes positivas y el número de componentes negativas de una métrica en una base ortonormal forman lo que se llama su *signatura*. Las métricas con signatura $+\cdots+$ se dicen riemannianas, y las métricas con signatura $-+\cdots+$ se dicen lorentzianas.

11. Una métrica sobre una variedad es un campo de tensores suave cuyo valor en cada punto es una métrica sobre el espacio tangente. Es posible probar, mediante el método de Gram-Schmidt, que toda métrica admite una base ortonormal suave en algún entorno abierto de cualquier punto.

    a) Muestre que la signatura de la métrica es constante en toda la variedad.

    b) Si la variedad tiene dimensión 4 y la métrica es lorentziana, lo de arriba significa que, en un entorno abierto de cualquier punto, hay una base en la que la matriz de componentes de la métrica es $\eta = \mathrm{diag}(-1,1,1,1)$. ¿Qué tiene de especial, entonces, la métrica de Minkowski?

12. La métrica estándar de la 2-esfera es la inducida por la métrica euclídea en $\mathbb{R}^3$. Calcule esa métrica en coordenadas esféricas.

13. Otro sistema de coordenadas para la 2-esfera es la proyección estereográfica: se etiqueta cada punto $p = (x^1, x^2, x^3) \in S^2$ con las coordenadas cartesianas (y^1, y^2) del punto donde la recta que une p con el polo sur $(0,0,-1)$ intersecta el plano $x^3 = 0$.

    a) Muestre que

$$x^1 = \frac{2y^1}{1+r^2} \qquad x^2 = \frac{2y^2}{1+r^2} \qquad x^3 = \frac{1-r^2}{1+r^2}, \tag{8}$$

donde $r^2 = (y^1)^2 + (y^2)^2$. ¿Cuál es el rango de valores de y^1 e y^2?

b) Calcule la métrica de la 2-esfera en estas coordenadas.

14. El plano hiperbólico H^2 es el conjunto de puntos $(x^0, x^1, x^2) \in \mathbb{R}^3$ tales que

$$-(x^0)^2 + (x^1)^2 + (x^3)^2 = -1 \qquad x^0 > 0, \tag{9}$$

con la métrica inducida de la métrica de Minkowski en $\mathbb{R}^3$,

$$ds^2 = -(dx^0)^2 + (dx^1)^2 + (dx^2)^2. \tag{10}$$

a) Represente H^2 gráficamente. ¿Qué signatura tiene su métrica?

b) La proyección estereográfica también sirve como sistema de coordenadas para el plano hiperbólico: se etiqueta cada punto $p = (x^0, x^1, x^2) \in H^2$ con las coordenadas cartesianas (y^1, y^2) del punto donde la recta que une p con $(-1, 0, 0)$ intersecta el plano $x^0 = 0$. Muestre que

$$x^0 = \frac{1 + r^2}{1 - r^2} \qquad x^1 = \frac{2y^1}{1 - r^2} \qquad x^2 = \frac{2y^2}{1 - r^2}, \tag{11}$$

donde $r^2 = (y^1)^2 + (y^2)^2$. ¿Qué rango de valores toman y^1 e y^2? En estas coordenadas, el plano hiperbólico luce como un disco, que se conoce como el *disco de Poincaré*.

c) Calcule la métrica de H^2 en estas coordenadas.

15. Muestre que la única derivada covariante ∇ compatible con una métrica g, es decir, que satisface $\nabla_\mu g_{\alpha\beta} = 0$, es la que tiene símbolos de Christoffel

$$\Gamma^\mu_{\alpha\beta} = \frac{1}{2} g^{\mu\nu} \left(\partial_\alpha g_{\beta\nu} + \partial_\beta g_{\alpha\nu} - \partial_\nu g_{\alpha\beta}\right) \tag{12}$$

(ver la página 35 del libro de Wald).

16. Muestre que, en una variedad con métrica lorentziana, una geodésica que es temporal (espacial, nula) en un punto lo sigue siendo en todo punto, asumiendo que la conexión es compatible con la métrica.

17. Toda derivada covariante ∇ tiene asociado un tensor R de tipo $(1, 3)$, llamado tensor de Riemann, tal que, para toda 1-forma ω,

$$(\nabla_\mu \nabla_\nu - \nabla_\nu \nabla_\mu)\, \omega_\alpha = R_{\mu\nu\alpha}{}^\beta \omega_\beta. \tag{13}$$

Pruebe las siguientes propiedades de este tensor (ver la página 39 del libro de Wald):

a) $R_{\mu\nu\alpha}{}^\beta = -R_{\nu\mu\alpha}{}^\beta$

b) $R_{[\mu\nu\alpha]}{}^\beta = 0$

c) $\nabla_{[\gamma} R_{\mu\nu]\alpha}{}^\beta = 0$ (identidad de Bianchi) *d*) Si ∇ es compatible con la métrica, entonces $R_{\mu\nu\alpha\beta} = -R_{\mu\nu\beta\alpha}$.

En estas ecuaciones, el símbolo [ ] denota antisimetrización, es decir, suma de permutaciones pares de los índices menos suma de permutaciones impares, dividido por el número total de términos (que es el factorial del número de índices involucrados). Por ejemplo,

$$T_{[\alpha\beta\gamma]} = \frac{1}{3!}\left(T_{\alpha\beta\gamma} + T_{\beta\gamma\alpha} + T_{\gamma\alpha\beta} - T_{\alpha\gamma\beta} - T_{\beta\alpha\gamma} - T_{\gamma\beta\alpha}\right). \tag{14}$$

En este caso, en el que hay tres índices involucrados, las permutaciones pares son las cíclicas, y las impares se obtienen a partir de éstas agregando una transposición.

18. A partir de las propiedadades a), b) y d) del problema anterior, muestre que, si ∇ es compatible con la métrica, entonces

$$R_{\mu\nu\alpha\beta} = R_{\alpha\beta\mu\nu}. \tag{15}$$

Use este resultado para mostrar que el tensor de Ricci $R_{\alpha\beta} = R_{\alpha\mu\beta}{}^{\mu}$ es simétrico, $R_{\alpha\beta} = R_{\beta\alpha}$.

19. A partir de la identidad de Bianchi, muestre que, si ∇ es compatible con la métrica, entonces

$$\nabla^{\beta} R_{\alpha\beta} = \frac{1}{2}\nabla_{\alpha} R, \tag{16}$$

donde $R = R_{\alpha}{}^{\alpha}$ es el escalar de Ricci, y por lo tanto el tensor de Einstein

$$G_{\alpha\beta} = R_{\alpha\beta} - \frac{1}{2} R g_{\alpha\beta} \tag{17}$$

es covariantemente conservado, $\nabla^{\beta} G_{\alpha\beta} = 0$.

20. Muestre que, en una base coordenada,

$$R_{\mu\nu\alpha}{}^{\beta} = \partial_{\nu}\Gamma^{\beta}_{\mu\alpha} - \partial_{\mu}\Gamma^{\beta}_{\nu\alpha} + \Gamma^{\sigma}_{\mu\alpha}\Gamma^{\beta}_{\sigma\nu} - \Gamma^{\sigma}_{\nu\alpha}\Gamma^{\beta}_{\sigma\mu}. \tag{18}$$

21. Considere la conexión métrica sobre la 2-esfera.

a) Calcule los símbolos de Christoffel en coordenadas esféricas.

b) Calcule el tensor de Riemann (antes de hacerlo, piense cuántas componentes independientes tiene).

c) Escriba la ecuación de las geodésicas, y muestre que los meridianos (φ constante) son solución.
Comentario: de hecho, los meridianos agotan todas las geodésicas que pasan por el polo norte. Como cualquier punto de la esfera se puede tomar como el polo norte, todas las geodésicas son meridianos con una elección apropiada de los ejes cartesianos.

22. Sobre la 2-esfera construya un "rectángulo" que tenga por lados segmentos del ecuador, del paralelo $\theta = \pi/2 + \Delta\theta$ y de los meridianos $\varphi = 0$ y $\varphi = \Delta\varphi$.

a) Calcule el transporte paralelo del vector $v = \partial_\theta$ en el punto ($\theta = \pi/2$, $\varphi = 0$) a lo largo de este camino cerrado, empezando por el tramo contenido en el ecuador.

b) Muestre que, para $\Delta\varphi, \Delta\theta \ll 1$, la diferencia δv entre el vector final y el vector inicial cumple

$$\delta v^\alpha \simeq \Delta\varphi \Delta\theta R_{\varphi\theta\beta}{}^\alpha v^\beta. \tag{19}$$

Ésta es una propiedad general del tensor de Riemann: mide qué tanto se desvía el transporte paralelo de un vector a lo largo de un camino cerrado del vector original.

23. Considere la conexión métrica sobre el plano hiperbólico.

a) Calcule los símbolos de Christoffel en las coordenadas asociadas a la proyección estereográfica (ver problema 14).

b) Calcule el tensor de Riemann.

c) Escriba la ecuación de las geodésicas, y muestre que las rectas que pasan por el centro del disco de Poincaré son solución.
Comentario: las geodésicas más generales son círculos que inciden perpendicularmente sobre el borde del disco de Poincaré.

24. Se dice que una variedad pseudo-riemanniana (es decir, una variedad con una métrica) tiene curvatura constante si existe una constante κ tal que

$$R_{\mu\nu\alpha\beta} = \kappa \left(g_{\mu\alpha} g_{\nu\beta} - g_{\mu\beta} g_{\nu\alpha} \right). \tag{20}$$

A partir de lo obtenido en los problemas 21 y 23, muestre que la esfera y el plano hiperbólico tienen curvatura constante, y calcule el valor de κ para ambos espacios. ¿Qué otro espacio de curvatura constante conoce?

25. En el plano $\mathbb{R}^2$, calcule el transporte de Lie del vector ∂_x en el punto $(x = \ell, y = 0)$ a lo largo de los dos campos de vectores del problema 2.

26. Se dice que un campo de vectores ξ es de Killing respecto a una métrica g si $\mathcal{L}_\xi g = 0$. Muestre que esta condición es equivalente a

$$\nabla_\alpha \xi_\beta + \nabla_\beta \xi_\alpha = 0, \tag{21}$$

donde ∇ es la derivada covariante compatible con g.

27. Calcule los vectores de Killing del plano euclídeo, la esfera y el plano hiperbólico. Muestre que los tres espacios son maximalmente simétricos.