Ejercicios 7 y 8 de la Guía 6 de Relatividad General

Sivilotti Bruno

Departamento de Física, Facultad de Ciencias Exactas y Naturales, UBA

Junio del 2024

1. Ejercicio 7

1.1. Consigna

Demuestre que en un modelo de Friedman-Robertson-Walker con una geometría espacial cerrada y dominado por materia no relativista, un rayo de luz que viaja desde el comienzo de la expansión del universo completa una vuelta alrededor del mismo justo en el momento del recolapso. Además, demuestre que en un modelo donde la radiación es dominante, el rayo de luz solo logra recorrer la mitad del universo antes de su recolapso.

1.2. Resolución

Recordemos la expresión general de un universo FRW

$$ds^2 = -dt^2 + a(t)^2 \left[\frac{dr^2}{1-kr^2} + r^2(d\theta^2 + sin^2(\theta)d\varphi^2) \right] \tag{1}$$

Como es un universo espacialmente cerrado $k > 0$. Recordemos que se puede elegir $k = 1$ ya que cualquier otro valor positivo de k puede absorverse en la redefinción $\tilde{r} = \sqrt{k}r$ y $\tilde{a}(t) = a(t)/\sqrt{k}$. Además, haciendo el cambio de variables $r = sin(\psi)$ podemos reescribir la métrica como

$$ds^2 = -dt^2 + a(t)^2 \left[d\psi^2 + sin^2(\psi)(d\theta^2 + sin^2(\theta)d\varphi^2) \right] \tag{2}$$

La parte espacial de la métrica (sin el factor de escala) corresponde a una 3-esfera de radio 1. Para pisar un poco más firme y entender el rol que juega la coordenada ψ veamos el caso $\theta = \pi/2$. En este caso obtenemos la métrica familiar de una 2-esfera $dl^2 = d\psi^2 + sin^2(\psi)d\varphi^2$ donde la coordenada ψ de la 3-esfera tiene un rol análogo al θ de la 2-esfera, recorre "meridianos"(o circulos máximos) de la 3-esfera.

Entonces, para resolver el problema pensemos, sin perdida de generalidad, que el rayo de luz se mueve a lo largo de ψ, con θ y ϕ fijos.

$$\begin{aligned} 0 =& - dt^2 + a(t)^2 d\psi^2 \\ a(t) =& \frac{dt}{d\psi} \end{aligned} \tag{3}$$

Todavía no usamos las ecuaciones de Einstein ni por qué componente está dominado el universo. En un espacio cerrado dominado por materia no relativista ($w = 0$) la ecuación de Friedman es

$$\dot{a}^2 - \frac{8}{3}\pi G\alpha\frac{1}{a} = -1. \tag{4}$$

Para simplificar notación voy a llamar $l = 8\pi G\alpha/3$.

Reordenando queda

$$\left(\frac{da}{dt}\right)^2 + 1 = \frac{l}{a}. \tag{5}$$

Como nos interesa la relación entre la coordenada ψ del rayo de luz y el factor de escala a, nos conviene obtener una ecuación para $a(\psi)$. Es muy importante tener en claro que cuando escribimos $a(\psi)$ estamos queriendo decir cuánto vale el factor de escala cuando el fotón se encuentra en la coordenada ψ y **NO** estamos diciendo que el factor de escala depende del punto del espacio.

Para obtener la dependencia que queremos hacemos regla de la cadena y usamos la ecuación (3)

$$\frac{da}{dt} = \frac{da}{d\psi}\frac{d\psi}{dt} = \frac{da}{d\psi}\frac{1}{a} \tag{6}$$

Juntando todo obtenemos la ecuación diferencial

$$\left(\frac{da}{d\psi}\right)^2 + a^2 = la. \tag{7}$$

Ahora solo queda resolverla. Una forma sencilla es resolver otra ecuación que es consecuencia de la que queremos resolver y luego verificar que se satisfaga la original. Para esto, derivamos ambos lados de la ecuación respecto a ψ

$$\frac{d}{d\psi}\left[\left(\frac{da}{d\psi}\right)^2 + a^2\right] = l\frac{da}{d\psi} \tag{8}$$

$$2\frac{da}{d\psi}\frac{d^2a}{d\psi^2} + 2a\frac{da}{d\psi} = l\frac{da}{d\psi} \tag{9}$$

$$\frac{d^2a}{d\psi^2} + a = \frac{l}{2}. \tag{10}$$

Es la ecuación de un oscilador armónico con solución $a(\psi) = l/2 + Asin(\psi) + Bcos(\psi)$. Como el rayo de luz se emite en el comienzo de la expansión $a(\psi = 0) = 0$, y por la ecuación (5)

$(da/d\psi)(\psi = 0) = 0$. Por lo que la solución queda

$$a(\psi) = \frac{l}{2}(1 - cos(\psi)) \tag{11}$$

Y pueden verificar que satisface la ecuación diferencial original (5). Con esto, el rayo de luz completa la vuelta al universo ($\psi = 2\pi$) justo en el momento del recolapso ($a = 0$).

Si en cambio el universo hubiese estado dominado por radiación la ecuación de Friedman queda

$$\dot{a}^2 - \frac{8}{3}\pi G\alpha\frac{1}{a^2} = -1. \tag{12}$$

Haciendo un desarrollo análogo al que hicimos con materia no relativista llegamos a la ecuación diferencial

$$\left(\frac{da}{d\psi}\right)^2 + a^2 = l. \tag{13}$$

Que podemos resolver de la misma forma

$$\frac{d}{d\psi}\left[\left(\frac{da}{d\psi}\right)^2 + a^2\right] = 0 \tag{14}$$

$$\frac{d^2a}{d\psi^2} + a = 0. \tag{15}$$

Para condiciones iniciales $a(\psi = 0) = 0$ y $(da/d\psi)(\psi = 0) = \sqrt{l}$ la solución es

$$a(\psi) = \sqrt{l}sin(\psi). \tag{16}$$

El universo recolapsa cuando el rayo está en $\psi = \pi$.

1.3. Juguemos un rato

Vimos que si el universo está dominado por materia no relativista, un fotón emitido en el comienzo de la expansión del universo solo volverá a su punto inicial en el recolapso. Es decir, que si una persona nace con el universo y vive hasta el recolapso, no podrá ver su nacimiento (¡pero casi!). Si domina la radiación es todavía peor. Pensemos como podemos construir un universo que a partir de cierto momento funcione como un proyector de tu pasado. Para esto, tenemos que lograr que el recolapso tarde más que una vuelta completa de un rayo de luz. Intuitivamente parece que si metemos energía oscura debería frenar el recolapso ya que la energía oscura hace que el universo se expanda.

La ecuación de Friedman general en un universo cerrado es

$$\dot{a}^2 + 1 = \frac{l}{a^{1+3w}} \tag{17}$$

Evaluando en la trayectoria del fotón como hicimos en los casos anteriores queda la ecuación

$$\left(\frac{da}{d\psi}\right)^2 + a^2 = la^{1-3w} \tag{18}$$

Si particularizamos para un universo dominado por energía oscura y metemos la ecuación diferencial en algún software obtenemos la solución

$$a(\psi) = \sqrt{\frac{1 + tg^2(\psi + A)}{l}} \tag{19}$$

No sirve, nos pasamos de fuerza. No solo no podemos pedir que el rayo de luz se emita cuando el universo comienza a expandirse (a nunca es cero) sino que antes de que pegue la vuelta el universo se desgarra, a se hace infinito en $\psi + A = \pi/2$. Hay que volver al taller.

En este punto pueden ir probando ustedes con distintos valores de w entre 0 y 1[1]. Obviamente los valores físicos de w son los que comentamos en clase, acá solo estamos jugando con la matemática.

Si conseguimos en alguna ferretería materia con $w = -1/6$ la ecuación a resolver es

$$\left(\frac{da}{d\psi}\right)^2 + a^2 = la^{3/2} \tag{20}$$

y tiene solución

$$a(\psi) = l^2 sin^4\left(\frac{\psi}{4}\right). \tag{21}$$

¡Ahora si! El universo recolapsa cuando el fotón da dos vueltas al universo. Una persona que nace con este universo podrá a la mitad de su vida prepararse un café, sentarse en su sillón favorito, mirar al cielo y ver su infancia y todo lo que alguna vez hizo[2]. Si esto es un final feliz o una tortura escapa de los temas de esta materia.

2. Ejercicio 8

2.1. Enunciado

Considere un objeto estelar en r = 0 en la métrica (1) que a tiempo t_e emite luz de frecuencia ν_e con luminosidad L.

a) Calcule el flujo F de fotones recibido en r a un tiempo posterior t_0.

b) Se define la distancia de luminosidad como

$$d_L = \sqrt{\frac{L}{4\pi F}} \tag{22}$$

Probar que

$$d_L = a_0 r(1 + z) \tag{23}$$

donde $a_0 = a(t_0)$ y z es el corrimiento al rojo de los fotones emitidos.

[1] Yo no conseguí soluciones que arranquen con $a = 0$ para $w < -1/3$

[2] Eso si, le llevará toda la segunda mitad de su vida ver la película completa.

c) Suponiendo que el espacio es aproximadamente plano y que z es pequeño, relacione r con z y utilice la ecuación(23) para probar que

$$d_L \approx \left(\frac{z}{H_0}\right)\left[1+\left(1+\frac{1}{2}\frac{\dot{H}_0}{H_0^2}\right)z\right] \tag{24}$$

siendo $H_0 = H(t_0)$. Midiendo la distancia de luminosidad y el corrimiento al rojo de distintos objetos estelares podemos obtener $\dot{H}_0$. Estas mediciones son las que llevaron a concluir que el universo se expande de forma acelerada.

2.2. Resolución

a) El flujo de fotones en r es la energía recibida dividido el área de la esfera en la que se reparte y el tiempo que tardan en pasar todos los fotones.

$$F = \frac{Nh\nu_r}{A\delta t_r} \tag{25}$$

donde N es la cantidad de fotones y ν_r es la frecuencia que tienen al cruzar.

La cantidad de fotones emitidos por la fuente en un intervalo δt_e es

$$N = \frac{L}{h\nu_e}\delta t_e \tag{26}$$

Con esto, el flujo queda

$$F = \frac{L}{A}\frac{\nu_r}{\nu_e}\frac{\delta t_e}{\delta t_r}. \tag{27}$$

Entonces queda calcular el área de la esfera y la relación entre los intervalos de tiempo y las frecuencias de los fotones emitidos y recibidos. Para esto último tenemos que calcular el redshift cosmológico.

Para un rayo de luz emitido en la dirección r tenemos

$$\frac{dt}{a(t)} = \frac{dr}{\sqrt{1-kr^2}}. \tag{28}$$

Integrando en la trayectoria del fotón

$$\int_{t_e}^{t_r}\frac{dt}{a(t)} = \int_0^r \frac{dr}{\sqrt{1-kr^2}}. \tag{29}$$

Igualmente para un fotón emitido en el siguiente período

$$\int_{t_e+T}^{t_r+T'}\frac{dt}{a(t)} = \int_0^r \frac{dr}{\sqrt{1-kr^2}}. \tag{30}$$

donde T' es el período de la onda recibida en r. Restando ambas expresiones obtenemos

$$\int_{t_e}^{t_r}\frac{dt}{a(t)} - \int_{t_e+T}^{t_r+T'}\frac{dt}{a(t)} = 0 \tag{31}$$

O lo que es lo mismo

$$\int_{t_e}^{t_e+T} \frac{dt}{a(t)} = \int_{t_r}^{t_r+T'} \frac{dt}{a(t)} \tag{32}$$

Considerando que el factor de escala es aproximadamente constante a lo largo del viaje del fotón obtenemos

$$\begin{aligned} \frac{T}{a(t_e)} &= \frac{T'}{a(t_r)} \\ \frac{T}{T'} &= \frac{\nu_r}{\nu_e} = \frac{a(t_e)}{a(t_r)} \end{aligned} \tag{33}$$

Si el universo se expande, es decir el factor de escala crece, la frecuencia del fotón va disminuyendo en su viaje. Este efecto es el redshift cosmológico.

Definiendo el corrimiento de frecuencias relativo z como

$$z = \frac{\nu_e - \nu_r}{\nu_r} = \frac{a(t_r)}{a(t_e)} - 1 \tag{34}$$

Los factores que aparecían en el flujo quedan

$$\frac{\nu_r}{\nu_e}\frac{\delta t_e}{\delta t_r} = \left(\frac{a(t_e)}{a(t_r)}\right)^2 = \frac{1}{(1+z)^2}. \tag{35}$$

Nos queda calcular el área de la esfera. Esto sale de integrar la parte angular del elemento de linea de FRW que es idéntico al del espacio euclideo multipllicado por $a(t)^2 r^2$. Por lo que $A = 4\pi a(t_r)^2 r^2$. Finalmente el flujo queda

$$F = \frac{L}{4\pi a(t_r)^2 r^2 (1+z)^2}. \tag{36}$$

b) Con la definición de d_L que nos da el enunciado y la expresión del flujo que obtuvimos sale directo.

c) Por ahora tenemos

$$d_L = a_r r(1+z) \tag{37}$$

Donde llamamos a_r a $a(t_r)$. De ahora en más vamos a llamar $t_e = t$ ya que es la única variable temporal que tenemos libre (t_r lo pensamos fijo, es el momento actual en el que mido).

Tenemos que relacionar r con z. Con el espacio aproximadamente plano plano tenemos

$$\begin{aligned} \frac{dt}{a(t)} &= dr \\ \frac{dt}{a_r + H_r a_r (t - t_r) + ...} &\approx dr \\ [1 + H_r(t_r - t) + ...]dt &\approx a_r dr \\ (t_r - t)\left[1 + \frac{H_r}{2}(t_r - t)^2\right] &\approx a_r r \end{aligned} \tag{38}$$

donde aproximamos $a(t)$ pensando que la diferencia $(t - t_r)$ es pequeña y en el ultimo paso integramos. Así llegamos a una relación entre r y t, para encontrar la relación entre r y z podemos vincular z y t y reemplazarla en la ecuación (38).

Escribimos la definición de z y como lo asumimos chico, $a(t)$ se puede aproximar alrededor de a_r

$$
\begin{aligned}
z =& \frac{a_r}{a(t)} - 1 \approx \frac{1}{1 + H_r(t-t_r) - \frac{q_r}{2} H_r^2 (t-t_r)^2} - 1 \\
\approx& H_r(t_r - t) + \left(1 + \frac{q_r}{2}\right) H_r^2 (t_r - t)^2
\end{aligned}
\tag{39}
$$

con q_r es el parámetro de desaceleración definido como $q = -\frac{a\ddot{a}}{\dot{a}^2}$. Invirtiendo la relación hasta orden cuadrático en z

$$
(t_r - t) \approx \frac{z}{H_r} - \left(1 + \frac{q_r}{2}\right) \frac{z^2}{H_r} \tag{40}
$$

Juntando todo y quedandonos hasta orden cuadrático en z

$$
d_L \approx \frac{z}{H_r} \left(1 + \frac{1}{2}(1 - q_r) z\right) = \frac{z}{H_r} \left[1 + \left(1 + \frac{\dot{H}_r}{2H_r^2}\right) z\right]. \tag{41}
$$

Con esta relación, si se observa un objeto de luminosidad conocida y se mide su redshift (por ejemplo viendo sus lineas espectrales y viendo qué tan corridas están de lo esperado) se puede obtener la aceleración a la cual se expande el universo. En 1998 dos colaboraciones independientes midieron que el universo se está expandiendo aceleradamente utilizando como candela patrón un cierto tipo de supernovas con luminosidad conocida. En 2011 se otorgó el premio Nobel por dicho descubrimiento. En particular si les interesa leer sobre la historia de estos proyectos, cómo se llevaron a cabo y cómo pudieron determinar tanto la aceleración de la expansión del universo como la proporción de energía oscura en el universo, les recomiendo que lean el documento en la pestaña "advanced information".