Relatividad General 2024
Parcial
25/6/2024

Por favor resuelva cada ejercicio en hojas separadas. Se aprueba con 6 puntos.

---

1. *(3 puntos)* En presencia de una constante cosmológica Λ pequeña, las ecuaciones de Einstein linealizadas son

$$\Box \bar{h}_{\mu\nu} = -16\pi G T_{\mu\nu} + 2\Lambda \eta_{\mu\nu}, \tag{1}$$

donde $\bar{h}_{\mu\nu} = h_{\mu\nu} - \eta_{\mu\nu} h/2$ es el reverso de traza de la perturbación de la métrica $h_{\mu\nu}$, y se asume el gauge de Lorenz. Suponga que $h_{\mu\nu}$ no depende del tiempo, y que la única componente no nula del tensor de energía-momento es $T_{00} = \rho$.

   a) A partir de la ecuación de la geodésica, muestre que una partícula no relativista (con $|d\vec{x}/d\tau| \ll dt/d\tau$) obedece una ecuación de la forma $d^2\vec{x}/dt^2 = -\nabla\phi$, y obtenga la relación entre el potencial newtoniano ϕ y $h_{\mu\nu}$.

   b) A partir de las ecuaciones de Einstein linealizadas, obtenga la ecuación diferencial que determina ϕ en términos de ρ y Λ.
   Ayuda: se sugiere empezar reescribiendo (1) como una ecuación para $\Box h_{\mu\nu}$.

   c) Suponiendo que la fuente de gravedad es una estrella esférica de masa M, calcule el campo gravitatorio newtoniano en el exterior de la estrella. Obtenga una cota para Λ sabiendo que el período de la órbita de Plutón es de unos 250 años.
   Ayuda: no hace falta recordar cómo se escribe el laplaciano en esféricas. Use la ley de Gauss.

2. *(4 puntos)* Considere el espacio-tiempo Anti de Sitter en tres dimensiones, cuya métrica es

$$ds^2 = -\left(1 + \frac{r^2}{\ell^2}\right) dt^2 + \frac{dr^2}{1 + \frac{r^2}{\ell^2}} + r^2 d\varphi^2, \tag{2}$$

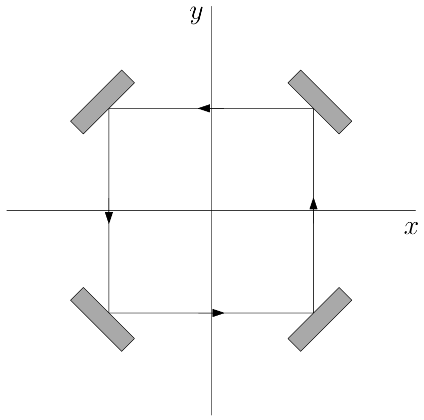
donde ℓ es una constante positiva.

   a) Calcule la velocidad angular $d\varphi/d\tau$ y la energía de las órbitas circulares de partículas libres masivas, en función de su radio r.

   b) Calcule la frecuencia angular de las pequeñas oscilaciones alrededor de una órbita circular. ¿Son cerradas las órbitas circulares perturbadas?

   c) Un observador en reposo en $r = 0$ emite un fotón, que es detectado por un observador libre en órbita circular de radio $r > 0$. ¿Cuál es la relación entre las frecuencias medidas por ambos observadores? Discuta su resultado usando que ∂_t y ∂_φ son campos de Killing.

3. *(1 punto)* En el espacio-tiempo de Minkowski, un fotón describe un circuito cuadrado en el plano xy, gracias a la presencia de cuatro espejos, tal como se muestra en la figura.



En algún momento, pasa una onda gravitatoria que se propaga en la dirección z, con longitud de onda mucho mayor que el lado del cuadrado. Toda esta descripción asume el gauge transverso y sin traza, y los espejos se pueden considerar partículas libres. Un observador situado en uno de los vértices del cuadrado mide el tiempo que le lleva al fotón completar una vuelta. ¿Puede este observador detectar el paso de la onda? Justifique claramente.

4. *(2 puntos)* Decida si cada una de las siguientes afirmaciones es verdadera o falsa. Justificar.

   a) Un universo de Friedmann-Robertson-Walker espacialmente plano o abierto e inicialmente en expansión nunca recolapsa si la densidad de energía es siempre positiva.

   b) La solución de agujero negro cargado de *Reissner–Nordstrom*,

$$ds^2 = -\left(1 - \frac{2GM}{r} + \frac{GQ^2}{r^2}\right) dt^2 + \frac{dr^2}{1 - \frac{2GM}{r} + \frac{GQ^2}{r^2}} + r^2 d\Omega^2 \,, \tag{3}$$

   donde M y Q son constantes, tiene una singularidad desnuda en $r = 0$ si $M < Q/\sqrt{G}$.