Resolución del parcial de Relatividad 2024

Problema 1

(a) Teniendo en cuenta que tanto la perturbación de la métrica como las componentes espaciales de la cuadrivelocidad son pequeñas, la ecuación de la geodésica al orden más bajo no trivial es

$$\frac{d^2x^\mu}{d\tau^2} + \Gamma^\mu_{tt}\left(\frac{dt}{d\tau}\right)^2 = 0. \tag{1}$$

Como la perturbación de la métrica no depende del tiempo, tenemos

$$\Gamma^t_{tt} = 0 \qquad \Gamma^i_{tt} = -\frac{1}{2}\partial^i h_{tt}. \tag{2}$$

La primera ecuación implica que t es lineal en τ, $t = a\tau + b$, con a y b constantes. Dividiendo por a^2 las componentes espaciales de (1) se obtiene entonces

$$\frac{d^2x^i}{dt^2} = \frac{1}{2}\partial^i h_{tt}, \tag{3}$$

que es la ecuación de Newton con potencial

$$\phi = -h_{tt}/2. \tag{4}$$

(b) El reverso de traza tiene la propiedad $\bar{h} = -h$ (de ahí su nombre), así que $h_{\mu\nu} = \bar{h}_{\mu\nu} - \eta_{\mu\nu}\bar{h}/2$. De la ecuación de Einstein linealizada (ecuación (1) del parcial) obtenemos entonces

$$\Box h_{\mu\nu} = \Box\bar{h}_{\mu\nu} - \frac{1}{2}\eta_{\mu\nu}\Box\bar{h} = -16\pi G\left(T_{\mu\nu} - \frac{1}{2}\eta_{\mu\nu}T\right) - 2\Lambda\eta_{\mu\nu}. \tag{5}$$

Ahora, como la única componente no nula del tensor de energía-momento es $T_{tt} = \rho$, su traza es $T = T^t_t = -\rho$, de manera que la componente tt de esta ecuación queda

$$\Box h_{tt} = -8\pi G\rho + 2\Lambda. \tag{6}$$

De la relación (4) con el potencial newtoniano y el hecho de que no hay dependencia en el tiempo obtenemos finalmente la ecuación

$$\Delta\phi = 4\pi G\rho - \Lambda, \tag{7}$$

que es la ecuación de Poisson de toda la vida de gravedad newtoniana, salvo por la presencia del término de constante cosmológica.

(c) Como Λ es constante y la estrella es esféricamente simétrica, el problema

tiene simetría esférica. La ley de Gauss nos dice entonces que el campo gravitatorio en el exterior de la estrella es igual al de una partícula puntual con masa igual a la masa encerrada,

$$\vec{g}(\vec{r}) = -\frac{G[M + M_\Lambda(r)]}{r^2}\hat{r}, \tag{8}$$

donde M_Λ es la contribución de la constante cosmológica a la masa encerrada,

$$M_\Lambda(r) = -\frac{\Lambda}{4\pi G}\frac{4}{3}\pi r^3 = -\frac{\Lambda r^3}{3G}. \tag{9}$$

Reemplazando en (8) obtenemos

$$\vec{g}(\vec{r}) = \left(-\frac{GM}{r^2} + \frac{\Lambda r}{3}\right)\hat{r}. \tag{10}$$

Como vemos, la constante cosmológica tiene un efecto repulsivo (si es que es positiva). Ahora, sabemos que la gravedad newtoniana (sin ninguna constante cosmológica) funciona perfectamente bien en el sistema solar, así que para r igual a la distancia entre el Sol y Plutón queremos que el segundo término de la ecuación de arriba sea mucho más pequeño que el primero,

$$\Lambda \ll \frac{GM}{r^3}. \tag{11}$$

Lo que tenemos en el lado derecho de esta ecuación es la velocidad angular de Plutón al cuadrado (para comprobarlo, escriban la condición de que la fuerza gravitatoria del Sol sobre Plutón sea igual a la centrípeta). Si T denota el período de esta órbita, ignorando factores numéricos tenemos

$$\Lambda \ll \frac{1}{T^2} \simeq \frac{1}{(250\text{ años})^2} \sim 10^{-5}\text{ años}^{-2}. \tag{12}$$

Las observaciones cosmológicas dan para la constante cosmológica el valor $\Lambda \sim 10^{-21}$ años^{-2}, así que la cota que se obtiene en este problema es muy laxa. Pero igualmente el problema está muy bueno!

Problema 2

(a) Las componentes de la métrica no dependen de t ni de φ, así que ∂_t y ∂_φ son Killings. Las cantidades conservadas asociadas son

$$E = -\dot{x}\cdot\partial_t = \left(1 + \frac{r^2}{\ell^2}\right)\dot{t} \qquad L = \dot{x}\cdot\partial_\varphi = r^2\dot{\varphi}, \tag{13}$$

que interpretamos respectivamente como la energía y el momento angular. Para partículas masivas tenemos además $\dot{x}^2 = -1$ (si parametrizamos la geodésica con el tiempo propio), así que

$$-1 = -\left(1 + \frac{r^2}{\ell^2}\right)\dot{t}^2 + \frac{\dot{r}^2}{1 + \frac{r^2}{\ell^2}} + r^2\dot{\varphi}^2 = \frac{-E^2 + \dot{r}^2}{1 + \frac{r^2}{\ell^2}} + \frac{L^2}{r^2}. \tag{14}$$

Esta ecuación se puede reescribir en la forma de la típica ecuación de conservación de la energía,

$$\frac{1}{2}\dot{r}^2 + V(r) = \frac{E^2-1}{2}, \tag{15}$$

con potencial efectivo

$$V(r) = \frac{r^2}{2\ell^2} + \left(\frac{1}{r^2} + \frac{1}{\ell^2}\right)\frac{L^2}{2}. \tag{16}$$

Este potencial efectivo tiene un único punto estacionario (que es un mínimo) en $r = \sqrt{|L|\ell}$. Éste es el radio de la órbita circular de momento angular L. Dicho de otra manera, el momento angular de las órbitas circulares de radio r es

$$L = \pm\frac{r^2}{\ell}. \tag{17}$$

Por lo tanto, la velocidad angular es

$$\dot{\varphi} = \frac{L}{r^2} = \pm\frac{1}{\ell}. \tag{18}$$

La energía de estas órbitas se obtiene reemplazando el valor obtenido del momento angular en la ecuación de conservación (15) e imponiendo $\dot{r} = 0$,

$$\frac{E^2-1}{2} = V(r) = \frac{r^2}{2\ell^2} + \left(\frac{1}{r^2} + \frac{1}{\ell^2}\right)\frac{r^4}{2\ell^2} = \frac{r^2}{\ell^2} + \frac{r^4}{2\ell^4}, \tag{19}$$

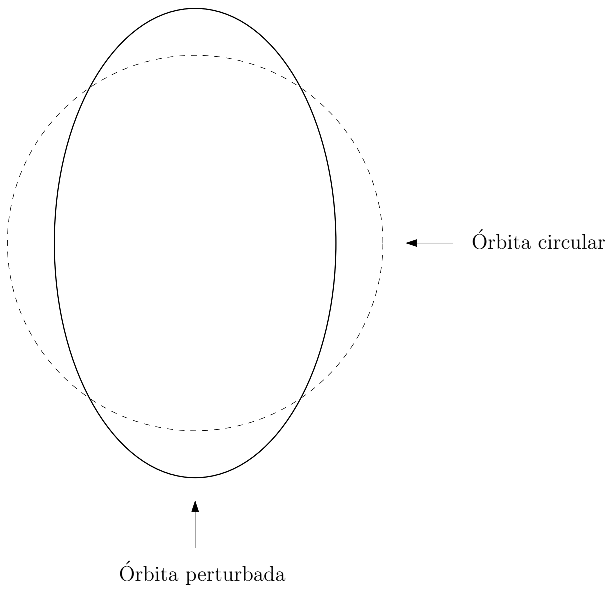
de manera que

$$E = 1 + \frac{r^2}{\ell^2}. \tag{20}$$

(b) La frecuencia angular ω de las pequeñas oscilaciones alrededor de una órbita circular de radio r está dada por

$$\omega^2 = V''(r) = \frac{1}{\ell^2} + 3\frac{L^2}{r^4} = \frac{4}{\ell^2}, \tag{21}$$

donde en el último paso hemos usado que r es el mínimo del potencial y por lo tanto L está dado por (17) (ojo que es importante hacer este reemplazo después de derivar). Por lo tanto tenemos $\omega = 2\dot{\varphi}$. En una vuelta, la partícula oscila dos veces alrededor de la órbita circular, de manera que la órbita es cerrada. Cualitativamente, tiene la siguiente forma.



(c) La energía medida por un observador con cuadrivelocidad u es $E_{\text{obs}} = -p \cdot u$, donde p es el cuadrimomento del fotón (en realidad acá deberíamos decir trivelocidad y trimomento porque estamos en 3 dimensiones espaciotemporales). Como el fotón se mueve radialmente y la cuadrivelocidad no tiene componente radial, tenemos simplemente

$$E_{\text{obs}} = -p_t u^t = E_\gamma u^t, \tag{22}$$

donde E_γ es la energía del fotón. Ahora, para el observador en reposo en $r = 0$ tenemos $u^t = 1$, y para el observador en órbita circular

$$u^t = \dot{t} = \frac{E}{1 + \frac{r^2}{\ell^2}} = 1. \tag{23}$$

Así pues, los dos observadoresz miden la misma energía del fotón, y por lo tanto la misma frecuencia. En otras palabras, no hay redshift! Cómo se explica esto? Para todo observador en órbita circular la cuadrivelocidad es

$$u = \partial_t \pm \frac{1}{\ell} \partial_\varphi \tag{24}$$

Esto también aplica para el observador en $r = 0$, ya que ahí se tiene $\partial_\varphi = 0$ (nótese que este observador también describe una órbita circular, la de radio 0). El campo de vectores (24) es una combinación lineal de Killings con coeficientes constantes, y por lo tanto es un Killing, de manera que $E_{\text{obs}} = -p \cdot u$ se conserva a lo largo de la geodésica del fótón, por eso no hay redshift.

Problema 3

Tenemos que calcular el tiempo que le lleva al fotón dar una vuelta según el observador en reposo en uno de los vértices del cuadrado. En el gauge TT se tiene $h_{t\mu} = 0$, así que ese tiempo (tiempo propio del observador) es igual al tiempo coordenado. Para un fotón que se mueve en la dirección x tenemos

$$0 = ds^2 = -dt^2 + (1 + h_{xx})dx^2, \tag{25}$$

de manera que

$$dt = \pm\sqrt{1 + h_{xx}}\, dx = \pm\left(1 + \frac{h_{xx}}{2}\right) dx. \tag{26}$$

Para el fotón que se mueve en la dirección y es todo igual, cambiando x por y. Como la longitud de la onda gravitatoria es muy grande comparada con el lado del cuadrado, podemos asumir que $h_{\mu\nu}$ es constante a lo largo del camino del fotón y el tiempo total queda

$$t = L[4 + 2(h_{xx} + h_{yy})], \tag{27}$$

donde L es el lado del cuadrado. Ahora, como la onda se propaga en la dirección z, en el gauge TT tenemos $h_{z\mu} = 0$ y por lo tanto $h_{xx} + h_{yy} = h = 0$. Así pues, el tiempo total es

$$t = 4L, \tag{28}$$

que no depende de la perturbación de la métrica, de manera que el observador NO puede detectar el paso de la onda. Cualitativamente, esto se puede entender de la siguiente manera: cuando pasa la onda, el cuadrado se deforma dilatándose en una dirección y contrayéndose en la dirección perpendicular, y esos dos efectos (dilatación y contracción) se compensan. Para detectar el paso de la onda, en lugar de medir la suma de los lados del cuadrado (que es básicamente lo que hacemos en este experimento), conviene medir la diferencia. Eso es, a grandes rasgos, lo que hace un interferómetro como LIGO.

Problema 4

(a) Dado que inicialmente tenemos $\dot{a} > 0$, para que el universo recolapse necesitamos que en algún momento se cumpla $\dot{a} = 0$. La ecuación de Friedmann es

$$\dot{a}^2 - \frac{8\pi G}{3}\rho a^2 = -k. \tag{29}$$

Si el universo es espacialmente plano o abierto ($k = 0, -1$), el lado derecho de esta ecuación es no negativo, de manera que nunca se puede cumplir $\dot{a} = 0$ con una densidad de energía $\rho > 0$. Por lo tanto, la afirmación es VERDADERA.

(b) Una singularidad desnuda es una singularidad que no está "vestida" por un horizonte. Busquemos el horizonte en la métrica de Reissner-Nordstrom. Éste se encuentra ahí donde $g_{tt} = 0$ o $g_{rr} = \infty$, es decir,

$$r = GM \pm \sqrt{(GM)^2 - GQ^2}. \tag{30}$$

Si $M < Q/\sqrt{G}$ tenemos $(GM)^2 < GQ^2$, de manera que lo que hay dentro de la raíz es negativo y la ecuación no tiene solución real. En ese caso, entonces, no hay horizonte y la singularidad en $r = 0$ está desnuda. La afirmación es pues VERDADERA.