Relatividad General 2024
Recuperatorio
5/7/2024

Por favor resuelva cada ejercicio en hojas separadas. Se aprueba con 6 puntos.

---

1. *(3.5 puntos)* En el espacio-tiempo de Minkowski, considere un fluido perfecto con densidad de energía ρ. El fluido es no relativista, es decir, tiene presión nula y cuadrivelocidad $u^\mu = (1, \vec{u})$ con $|\vec{u}| \ll 1$. Despreciando los términos cuadráticos en $\vec{u}$ pero reteniendo los términos lineales, las ecuaciones de Einstein linealizadas en el gauge de Lorenz toman la forma

$$\Box A_\mu = -4\pi J_\mu \qquad \Box \bar{h}_{ij} = 0, \tag{1}$$

donde $A_\mu = -\bar{h}_{0\mu}/(4G)$ y $J_\mu = \rho u_\mu$. Nótese que la primera de estas ecuaciones es la ecuación de Maxwell en el gauge de Lorenz.

a) Pruebe la ecuación (1) a partir de la forma general de las ecuaciones de Einstein linealizadas en el gauge de Lorenz.

b) Suponiendo que $h_{\mu\nu}$ no depende del tiempo (y tiende a cero lo bastante rápido en el infinito), encuentre la relación entre $h_{0\mu}$ y A_μ.

c) Considere una partícula libre no relativista con cuadrivelocidad $v^\mu = (1, \vec{v})$. Bajo la hipótesis del ítem anterior, muestre a partir de la ecuación de la geodésica que, hasta orden lineal en $\vec{v}$,

$$\dot{\vec{v}} = -G\left(\vec{E} + 4\vec{v} \times \vec{B}\right), \tag{2}$$

donde $\vec{E} = \nabla A_0$ y $\vec{B} = \nabla \times \vec{A}$. *Ayuda:* $(\vec{v} \times \vec{B})^i = v^j(\partial^i A_j - \partial_j A^i)$.

d) Considere un cilindro infinito hueco que rota con velocidad angular constante alrededor de su eje. En el interior del cilindro hay una partícula que se mueve en dirección radial hacia afuera. ¿Hacia dónde apunta su aceleración?

2. *(3.5 puntos)* En la geometría de Schwarzschild con masa M, un astronauta se encuentra en una órbita circular estable de radio r.

a) Calcule el periodo de la órbita medido por el reloj del astronauta.

b) Calcule el mismo periodo, pero ahora medido por un observador en reposo en el infinito. *Ayuda:* la energía de la órbita es $E = (1 - 2GM/r)/\sqrt{1 - 3GM/r}$.

c) En un punto de la órbita del astronauta se encuentra en reposo una nave espacial. ¿Cada cuánto tiempo ven pasar al astronauta los pasajeros de la nave?

3. *(2 puntos)* Considere un universo de Friedmann-Robertson-Walker con geometría espacial cerrada y dominado por radiación.

a) Usando como coordenada temporal el tiempo conforme η, definido por $d\eta = dt/a$, resolver la ecuación de Friedmann y hallar $a\left(\eta\right)$ a menos de una constante de integración.

b) Mostrar que un rayo de luz que viaja desde el comienzo de la expansión del universo sólo logra recorrer la mitad del mismo antes del momento del recolapso.

4. *(1 punto)* En la figura se muestran las líneas de mundo de dos observadores, A y B, en el diagrama de Penrose de Schwarzschild. Mediante un argumento gráfico (sin cuentas), explique por qué para A pasa un tiempo finito desde que se separa de B hasta que cruza el horizonte, y en cambio B necesita un tiempo infinito para ver a A cruzar el horizonte.