Resolución del recuperatorio de Relatividad 2024

Problema 1

(a) Las ecuaciones de Einstein linealizadas en el gauge de Lorenz son

$$\Box\bar{h}_{\mu\nu} = -16\pi G T_{\mu\nu}. \tag{1}$$

El fluido no tiene presión, así que

$$T_{\mu\nu} = \rho u_\mu u_\nu. \tag{2}$$

Las componentes espaciales T_{ij} son cuadráticas en $\vec{u}$, así que las tenemos que considerar despreciables. De ahí ya sale la segunda ecuación que queremos probar. Las componentes con un tiempo son

$$T_{0\mu} = u_0 J_\mu = -J_\mu, \tag{3}$$

así que reemplazando en (1) y definiendo $A_\mu = -\bar{h}_{0\mu}/4G$ obtenemos la primera ecuación que queríamos probar.

(b) Si $h_{\mu\nu}$ no depende del tiempo, el D'Alembertiano en (1) se convierte en un laplaciano. Como las componentes espaciales de la ecuación no tienen fuente y la ecuación de Laplace tiene solución única dadas unas condiciones de contorno, $\bar{h}_{ij} = 0$. Así pues, $\bar{h} = h^0_0 = -h_{00}$, y por lo tanto

$$h_{00} = \frac{1}{2}\bar{h}_{00} = -2GA_0 \qquad \bar{h}_{0i} = \bar{h}_{0i} = -4GA_i. \tag{4}$$

(c) Despreciando todo lo que es cuadrático en $\vec{v}$, la ecuación de la geodésica nos dice que

$$\dot{v} + \Gamma^i_{00} + 2\Gamma^i_{0j}v^j = 0. \tag{5}$$

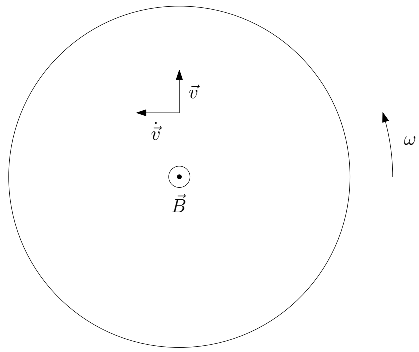
Calculemos los Christoffels que aparecen en esta ecuación. Usando que $h_{\mu\nu}$ no depende del tiempo obtenemos

$$\begin{aligned}\Gamma^i_{00} &= -\frac{1}{2}\partial^i h_{00} = G\partial^i A_0 = GE^i \\ \Gamma^i_{0j} &= \frac{1}{2}\left(\partial_j h^i_0 - \partial^i h_{0j}\right) = 2G\left(\partial^i A_j - \partial_j A^i\right).\end{aligned} \tag{6}$$

Reemplazando en (5) y usando la ayuda obtenemos directamente la ecuación que queremos demostrar.

(d) Simplemente se trata de usar la analogía con el electromagnetismo que desarrollamos en los ítems anteriores. Dentro de un cilindro uniforme hueco el campo eléctrico es cero. Si rota con velocidad angular constante, es un solenoide,

así que el campo magnético apunta en la dirección del eje del cilindro. Por la regla de la mano derecha sacamos entonces hacia dónde va la aceleración:



Así pues, la gravedad empuja a la partícula a rotar en la misma dirección que el cilindro.

Problema 2

(a) Para calcular el periodo medido por el reloj del astronauta, necesitamos la velocidad angular $\dot{\varphi}$, donde el punto es derivada respecto al tiempo propio. Como siempre, las cantidades conservadas son

$$E = \left(1 - \frac{2GM}{r}\right)\dot{t} \qquad L = r^2\dot{\varphi}, \tag{7}$$

que interpretamos respectivamente como la energía y el momento angular, y la condición $\dot{x}^2 = -1$ implica

$$\frac{1}{2}\dot{r}^2 + V(r) = \frac{E^2 - 1}{2}, \tag{8}$$

donde el potencial efectivo es

$$V(r) = -\frac{GM}{r} + \left(1 - \frac{2GM}{r}\right)\frac{L^2}{2r^2}. \tag{9}$$

La órbita circular estable se encuentra en el mínimo del potencial efectivo,

$$V'(r) = \frac{GM}{r^2} - \left(\frac{1}{r^3} - \frac{3GM}{r^4}\right)L^2 = 0, \tag{10}$$

y por lo tanto su momento angular es

$$L = r\sqrt{\frac{GM}{r - 3GM}}. \tag{11}$$

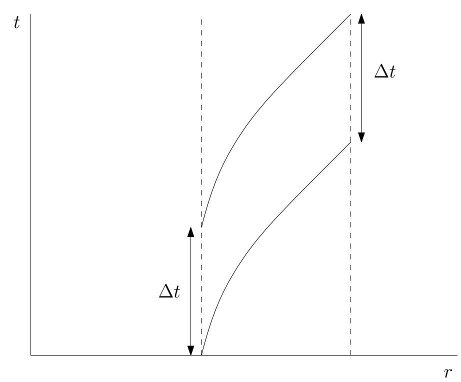
La velocidad angular es entonces

$$\dot{\varphi} = \frac{1}{r}\sqrt{\frac{GM}{r-3GM}}, \tag{12}$$

de donde se sigue que el periodo de la órbita es

$$T = \frac{2\pi}{\dot{\varphi}} = 2\pi r\sqrt{\frac{r-3GM}{GM}}. \tag{13}$$

(b) Para calcular el periodo medido por el observador en el infinito, imaginemos que el astronauta le envía un fotón cada vez que completa una vuelta. El tiempo coordenado entre fotones sucesivos es el mismo a la salida que a la llegada, porque, por la estacionariedad de la métrica, ambos fotones hacen exactamente lo mismo, tal como se ve en la siguiente figura.



Ahora, el tiempo coordenado es el tiempo propio del observador en el infinito, así que Δt es el periodo que mide este observador. Para averiguar Δt necesitamos $d\varphi/dt$, lo cual podemos calcular usando la ayuda,

$$\frac{d\varphi}{dt} = \frac{\dot{\varphi}}{\dot{t}} = \left(1 - \frac{2GM}{r}\right)\frac{\dot{\varphi}}{E} = \sqrt{1-\frac{3GM}{r}}\,\dot{\varphi} = \frac{1}{r}\sqrt{\frac{GM}{r}}. \tag{14}$$

El periodo medido por el observador en el infinito es pues

$$T_\infty = \Delta t = \frac{2\pi}{d\varphi/dt} = 2\pi r\sqrt{\frac{r}{GM}}. \tag{15}$$

(c) Por último, el período medido por los pasajeros de la nave es

$$T_{\text{nave}} = \sqrt{-g_{tt}}\,\Delta t = 2\pi r\sqrt{\frac{r-2GM}{GM}} \tag{16}$$

Nótese que $T_\infty > T_{\rm nave}$. Esto es el redshift gravitatorio. Nótese también que $T_{\rm nave} > T$. Esto nos podría sorprender, porque la órbita circular es una geodésica y la intuición de Minkowski es que las geodésicas temporales maximizan el tiempo propio. Como alguna vez discutimos en clase, en espacio-tiempo curvo no siempre es así, y la geodésica circular es un ejemplo de eso.

Problema 3

(a) La ecuación de Friedmann para un universo cerrado dominado por radiación es

$$\dot{a}^2 + 1 = \frac{8\pi G}{3}\frac{\alpha}{a^2}, \tag{17}$$

donde α es una constante. Si $a' \equiv da/d\eta$ tenemos $a' = a\dot{a}$ y por lo tanto

$$a'^2 + a^2 = \frac{8\pi G\alpha}{3}. \tag{18}$$

Esto es la ecuación de conservación de la energía para un oscilador armónico de frecuencia angular 1. Si imponemos que el factor de escala se anule en $\eta = 0$, la solución es

$$a(\eta) = A\sin\eta, \tag{19}$$

donde A es una constante (el máximo valor de a). De acá vemos que el dominio del tiempo conforme es $(0, \pi)$.

(b) En términos del tiempo conforme, el intervalo es

$$ds^2 = a^2(\eta)\left(d\eta^2 + d\psi^2 + \sin^2\psi\left(d\theta^2 + \sin^2\theta d\varphi^2\right)\right). \tag{20}$$

Digamos que el fotón se mueve en un meridiano de la 3-esfera, es decir, con θ y φ constantes, y que a $\eta = 0$ se encuentra en el polo norte, $\psi = 0$. Entonces su línea de mundo está dada por

$$\psi = \pm\eta. \tag{21}$$

En toda la historia del universo, el fotón sólo tiene tiempo de llegar hasta $\psi = \pi$, es decir, de completar media vuelta.

Problema 4

El tiempo propio de A es la longitud de su línea de mundo. Entre el evento "A se separa de B" y el evento "A cruza el horizonte", la línea de mundo de A es un segmento finito y por lo tanto tiene longitud finita.

Para que B vea cómo A cruza el horizonte, le tiene que llegar un fotón enviado desde ese evento. Ese fotón es recibido por B al final de su línea de mundo, que ocurre en el infinito futuro, de manera que B necesita un tiempo infinito para ver a A caer al agujero negro.