

Teoría fenomenológica de Ginzburg- Landau (GL) (2da parte)

Repaso

Parámetro de orden superconductor: $\Psi(\vec{r}) = |\Psi(\vec{r})|e^{-i\phi(\vec{r})}$

En presencia de campos y corrientes y considerando gradientes:

$$f(T, \vec{A}, \vec{B}) = f_n(T, 0) + \alpha(T)|\Psi|^2 + \frac{\beta(T)}{2}|\Psi|^4 + \underbrace{\frac{1}{2m} |(-i\hbar\vec{\nabla} - q\vec{A})\Psi|^2}_{\frac{p^2}{2m} \text{ Energía cinética}} + \underbrace{\frac{B^2}{2\mu_0}}_{\text{Densidad de energía magnética}}$$

Se puede ver que f es invariante ante transformaciones de Gauge

$$\frac{1}{2m} |(i\hbar\vec{\nabla} + q\vec{A})\Psi|^2 = \frac{1}{2m} \left[\underbrace{(\hbar\vec{\nabla}\phi - q\vec{A})^2 |\Psi|^2}_{\text{Energía cinética asociada a las } J. \text{ Puede estar aunque } |\Psi|^2 \text{ sea uniforme}} + \underbrace{\hbar^2 (\vec{\nabla}|\Psi|)^2}_{\text{Energía adicional asociada a la variación espacial de } |\Psi|^2} \right]$$

Repaso

En ausencia de campos y corrientes y sin considerar contornos ni gradientes:

$$\Delta f = f(T, 0) - f_n(T, 0) = \alpha(T)|\Psi|^2 + \frac{\beta(T)}{2}|\Psi|^4$$

$$|\Psi|_\infty = \begin{cases} 0 & \text{Estable si } \alpha > 0 \\ -\sqrt{-\frac{\alpha}{\beta}} & \begin{cases} \alpha > 0, \beta < 0 \\ \alpha < 0, \beta > 0 \end{cases} \end{cases} \begin{cases} \text{Inestable} \\ \text{Estable} \end{cases}$$

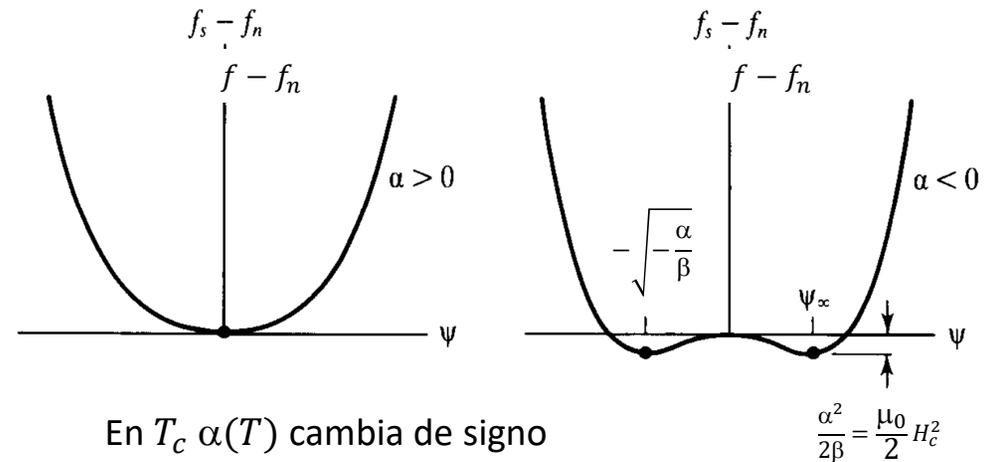
$$\Rightarrow \Delta f_{estable} = \begin{cases} 0 \\ -\frac{\alpha^2}{2\beta} = -\frac{\mu_0}{2} H_c^2 \end{cases}$$

$$\alpha(T) = -\frac{\mu_0^2 e^2 H_c^2(T) \lambda^2(T)}{m} \propto \frac{t^2 - 1}{1 + t^2} \sim t - 1$$

Cambia de signo en $T = T_c$

$$\beta(T) = \frac{\mu_0^3 e^4 H_c^2(T) \lambda^4(T)}{m^2} \propto \frac{1}{1 + t^2}$$

Aprox cte en $T = T_c$



Repaso

En el caso general: $\Delta F(T, \bar{A}, \bar{B}) = \iiint \Delta f(\bar{r}, T, \bar{A}, \bar{B}) d^3\bar{r}$ Hay que minimizar ΔF o ΔG respecto de $\Psi(\bar{r})$ y $\bar{A}(\bar{r})$

Esto lleva a las **Ecuaciones de Ginzburg Landau**, que son dos ecuaciones diferenciales no lineales acopladas:

$$\alpha\Psi + \beta|\Psi|^2\Psi + \frac{1}{2m} (i\hbar\bar{\nabla} + q\bar{A})^2\Psi = 0 \quad \text{1ra Ecuacion de GL}$$

$$\bar{J} = \frac{1}{\mu_0} \bar{\nabla} \times \bar{B} = -\frac{q}{2m} i\hbar(\Psi^*\bar{\nabla}\Psi - \Psi\bar{\nabla}\Psi^*) - \frac{q^2}{m} \Psi^*\Psi\bar{A}$$

Hay que resolver estas dos ecuaciones acopladas con c.c.

o

$$\bar{J} = \frac{q}{m} |\Psi|^2 (\hbar\bar{\nabla}\varphi - q\bar{A}) \quad \text{2da Ecuacion de GL}$$

Repaso

Ecuaciones de Ginzburg Landau:

$$\alpha\Psi + \beta|\Psi|^2\Psi + \frac{1}{2m} (i\hbar\bar{\nabla} + q\bar{A})^2\Psi = 0$$

1ra Ecuacion de GL

$$\bar{J} = \frac{q}{m} |\Psi|^2 (\hbar\bar{\nabla}\Psi - q\bar{A})$$

2da Ecuacion de GL

Hay que resolver estas dos ecuaciones acopladas con c.c.

En un problema unidimensional sin campos ni corrientes: $\alpha\Psi + \beta\Psi^3 + \frac{\hbar^2}{2m} \frac{\partial^2\Psi}{\partial x^2} = 0$

Para un plano SC semi infinito la solucion es: $k = \frac{\Psi(x)}{|\Psi|_\infty} = \tanh\left(\frac{x}{\sqrt{2}\xi}\right)$

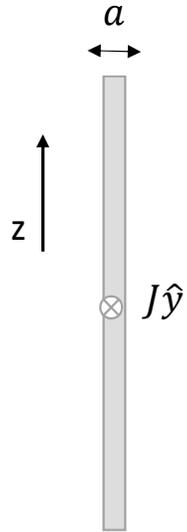
$$\xi^2 = \frac{\hbar^2}{2m|\alpha|}$$

$$\xi = \frac{\Phi_0}{2\pi\mu_0 H_c \lambda}$$

Superconductores delgados

Película delgada con corriente uniforme

$|\Psi|^2$ y \bar{A} uniformes



$a \ll \xi, \lambda$

$$f - f_n = \alpha |\Psi|^2 + \frac{\beta}{2} |\Psi|^4 + \frac{1}{2m} |(-i\hbar \bar{\nabla} - q\bar{A})\Psi|^2 + \frac{B^2}{2\mu_0}$$

$$\Psi(\vec{r}) = |\Psi| e^{-i\phi(\vec{r})}$$

$$\bar{\nabla}\Psi = \bar{\nabla}|\Psi| e^{-i\phi} - i\bar{\nabla}\phi |\Psi| e^{-i\phi} = -i\bar{\nabla}\phi \Psi$$

$$f - f_n = \alpha |\Psi|^2 + \frac{\beta}{2} |\Psi|^4 + \frac{1}{2m} (\hbar \bar{\nabla}\phi + q\bar{A})^2 |\Psi|^2 + \frac{B^2}{2\mu_0}$$

$$\bar{J} = \frac{q}{m} |\Psi|^2 (\hbar \bar{\nabla}\phi - q\bar{A}) \quad \text{2da Ecuacion de GL}$$

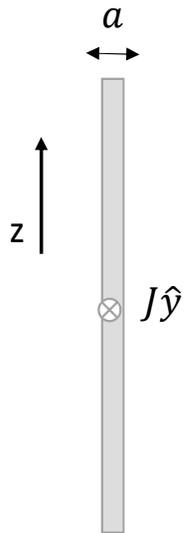
$$|\Psi|^2 = n_s$$

$$\bar{J} = n_s q \bar{v} = \frac{q}{m} n_s (\hbar \bar{\nabla}\phi - q\bar{A}) \implies m\bar{v} = (\hbar \bar{\nabla}\phi - q\bar{A})$$

$$\implies f - f_n = \alpha |\Psi|^2 + \frac{\beta}{2} |\Psi|^4 + \frac{m}{2} v^2 |\Psi|^2 + \frac{B^2}{2\mu_0} \implies f - f_n = \alpha |\Psi|^2 + \frac{\beta}{2} |\Psi|^4 + \frac{m}{2} v^2$$

Planteo del Tinkham: se puede ver que la energia magnetica es mucho menor que la energia cinética (a discutir)

Superconductores delgados



$$f - f_n = \alpha|\Psi|^2 + \frac{\beta}{2}|\Psi|^4 + \frac{m}{2}v^2|\Psi|^2$$

$$\frac{\partial f}{\partial |\Psi|^2} = \alpha + \beta|\Psi|^2 + \frac{m}{2}v^2 = 0 \quad \Rightarrow \quad |\Psi|^2 = \frac{1}{\beta} \left(\frac{m}{2}v^2 - \alpha \right) = -\frac{\alpha}{\beta} \left(1 - \frac{mv^2}{2|\alpha|} \right)$$

$$\boxed{\frac{|\Psi|^2}{|\Psi|_\infty^2} = \left(1 - \frac{mv^2}{2|\alpha|} \right)}$$

$$a \ll \xi, \lambda$$

Hay una competencia energética entre la velocidad v y la densidad de los portadores $|\Psi|^2$

Esto vale para cualquier geometría si la dimensión relevante para la variación de los parámetros es $\ll \xi, \lambda$

Little y Parks usaron esto para mostrar en un experimento la cuantización del flujoide y validar la propuesta de GL

Cuantización del flujoide a partir de GL

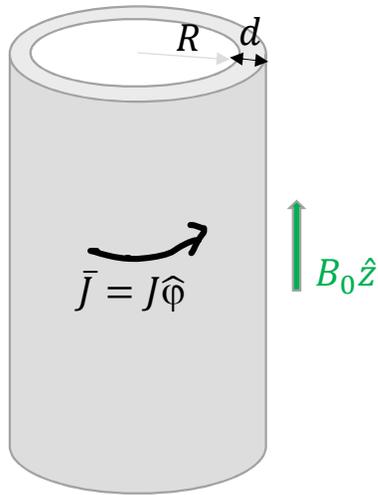
$$\boxed{\bar{J} = \frac{q}{m} |\Psi|^2 (\hbar \bar{\nabla} \varphi - q \bar{A})} \quad \text{2da Ecuacion de GL} \quad \hbar \bar{\nabla} \varphi = q \bar{A} + \frac{m \bar{J}}{q n_s} = q \bar{A} + \mu_0 \lambda^2 \bar{J}$$

$$\hbar \oint \bar{\nabla} \varphi \cdot \bar{d}l = 2\pi n \hbar = n h \quad \Rightarrow \quad \oint (\mu_0 \lambda^2 \bar{J} + \bar{A}) \cdot \bar{d}l = \frac{n h}{q} = n \left(\frac{h}{q} \right) = n \Phi_0$$

$$\boxed{\Phi' = \mu_0 \lambda^2 \oint \bar{J} \cdot \bar{d}l + \Phi = n \Phi_0}$$

Que implicancia tiene esta cuantización en la velocidad de los portadores?

Experimento de Little y Parks



Cilindro hueco SC

$$d \ll \xi, \lambda$$

En este caso tambien vale:

$$\frac{|\Psi|^2}{|\Psi|_\infty^2} = \left(1 - \frac{mv^2}{2|\alpha|}\right)$$

Elegimos una curva en el SC paralela a las corrientes: $d\vec{l} = l\hat{\phi}$

$$\mu_0 \lambda^2 \oint \vec{J} \cdot d\vec{l} = 2\pi R \mu_0 \lambda^2 J = 2\pi R \mu_0 \lambda^2 n_s q \bar{v} = 2\pi R \frac{m}{q} \bar{v}$$

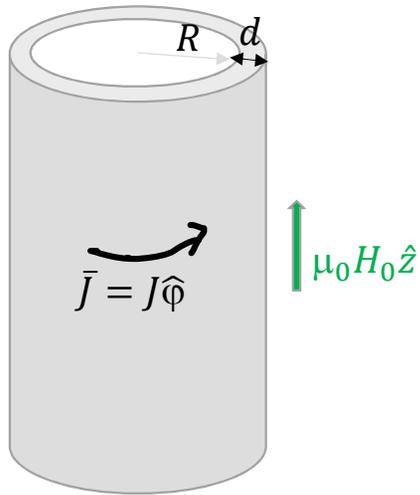
Si el flujo de esta cuantizado:

$$\mu_0 \lambda^2 \oint \vec{J} \cdot d\vec{l} + \phi = 2\pi R \frac{m}{q} \bar{v} + \phi = n\phi_0$$

$$\bar{v} = \frac{\hbar}{mR} \left(n - \frac{\phi}{\phi_0} \right)$$

Miden la temperatura T^* en donde el cilindro hueco se hace superconductor en función del campo aplicado H_0

Experimento de Little y Parks



Cilindro hueco SC

$$d \ll \xi, \lambda$$

Si el flujo de esta cuantizado:

$$\bar{v} = \frac{\hbar}{mR} \left(n - \frac{\phi}{\phi_0} \right)$$

Miden la temperatura T_c^* en donde el cilindro hueco se hace superconductor ($|\Psi| = 0$) en función del flujo ϕ .

$$\frac{|\Psi|^2}{|\Psi|_\infty^2} = \left(1 - \frac{mv^2}{2|\alpha|} \right)$$

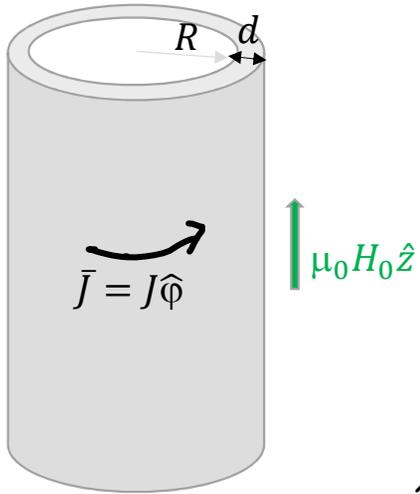
Muy cerca de T_c : $\alpha(T) = \alpha_0(T - T_c)$

$$\text{Cuando } |\Psi| = 0: \quad \alpha_0(T_c - T) = \frac{1}{2}mv^2 = \frac{\hbar^2}{2mR^2} \left(n - \frac{\phi}{\phi_0} \right)^2$$

$$\text{Entonces el material se vuelve normal en: } T^* = T_c - \frac{\hbar^2}{2m\alpha_0 R^2} \left(n - \frac{\phi}{\phi_0} \right)^2$$

$$\text{Si la energía magnética además deprime la superconductividad: } \Delta T(H) = - \frac{\hbar^2}{2m\alpha_0 R^2} \left(n - \frac{\phi}{\phi_0} \right)^2$$

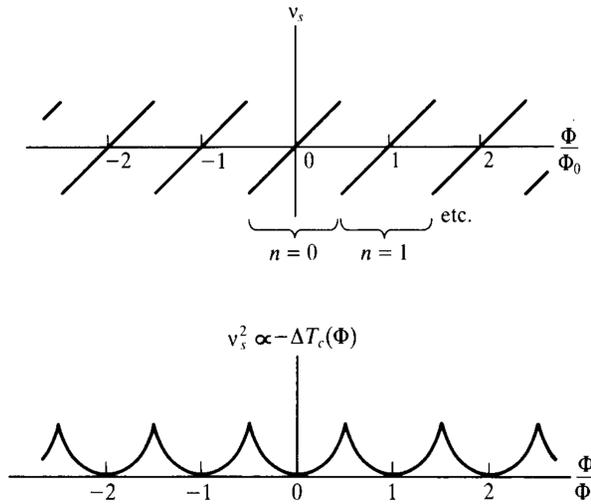
Experimento de Little y Parks



Si el fluxoide esta cuantizado el material se vuelve normal en:

$$\Delta T(H) = -\frac{\hbar^2}{2m\alpha_0 R^2} \left(n - \frac{\Phi}{\Phi_0} \right)^2 \qquad \frac{1}{2} m v^2 = \frac{\hbar^2}{2mR^2} \left(n - \frac{\Phi}{\Phi_0} \right)^2$$

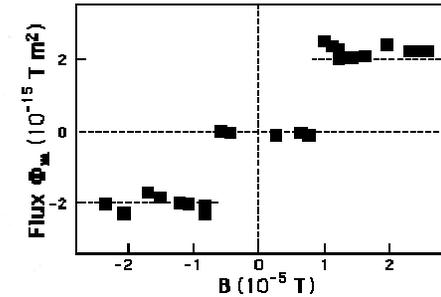
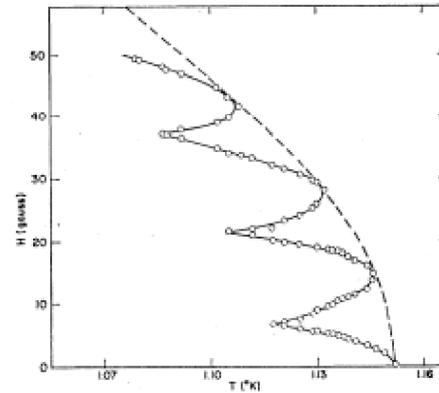
Cilindro hueco SC
 $d \ll \xi, \lambda$



OBSERVATION OF QUANTUM PERIODICITY IN THE TRANSITION TEMPERATURE OF A SUPERCONDUCTING CYLINDER*

W. A. Little† and R. D. Parks‡

Department of Physics, Stanford University, Stanford, California
 (Received May 10, 1962; revised manuscript received June 15, 1962)



Quantized magnetic flux in a superconducting ring. B. S. Deaver and W. M. Fairbank, Phys. Rev. Lett. 7, 43 (1961).

Ecuaciones de GL linearizadas

- Vimos que en SC tipo I sin FD la transición a campo $H > 0$ es de primer orden.
 - Eso quiere decir que Ψ es discontinua y M es discontinua.
- Sin embargo, en los SC tipo II, incluso sin FD, la transición es continua:
 - La superconductividad se nuclea a un campo $H_{c2}(T) > H_c(T)$
 - M es continua, por lo que $B \sim B_0$.
 - Ψ es continua en H_{c2}
 - Por lo tanto, cerca de H_{c2} , $|\Psi|$ es muy chico $\Rightarrow |\Psi|^2 \ll |\Psi|^4$
 - Con esas aproximaciones, la 1ra Ec. De GL queda:

$$\alpha\Psi + \frac{1}{2m} \left(\frac{\hbar}{c} \bar{\nabla} - q\bar{A} \right)^2 \Psi = 0$$

Con $\bar{A} \sim \bar{A}_0$ campo aplicado externo

Esto se puede reescribir como:

$$\left(-i\bar{\nabla} - \frac{2\pi}{\phi_0} \bar{A}_0 \right)^2 \Psi = \frac{\Psi}{\xi^2}$$

+ cc permite obtener Ψ

Ademas:

$$\bar{J} = \frac{q}{m} |\Psi|^2 (\hbar \bar{\nabla} \phi - q \bar{A}_0)$$

Quedó desacoplada, ya que Ψ se obtiene de la 1era

Nucleación en H_{c2}

- SC sin FD con campo aplicado $\bar{H} = H\hat{z}$ homogéneo.
 - Lejos de las fronteras N/S (lo pensamos como ∞)
- Vamos a ver si encontramos una solución a las ecuaciones de GL con parámetro $|\Psi| > 0$ a campos $H > H_c$.
- Vamos a buscar el máximo campo $H_{c2}(T)$ donde eso sea posible.
- Esperamos que cerca de H_{c2} valgan las ecuaciones linealizadas de GL:

$$\left(-i\bar{\nabla} - \frac{2\pi}{\phi_0}\bar{A}\right)^2 \Psi = \frac{\Psi}{\xi^2}$$

$$\bar{J} = \frac{q}{m} |\Psi|^2 (\hbar\bar{\nabla}\phi - q\bar{A})$$

$\bar{A} = A\hat{y}$ es el aplicado Elegimos el Gauge: $\bar{A} = \mu_0 H x \hat{y}$

La 1er ecuación $\left(-i\bar{\nabla} - \frac{2\pi}{\phi_0}\bar{A}_0\right)^2 \Psi = \frac{\Psi}{\xi^2}$

Queda: $-\nabla^2 \Psi + \frac{4\pi^2}{\phi_0^2} \mu_0^2 H^2 x^2 \Psi + \frac{i4\pi}{\phi_0} \mu_0 H x \frac{\partial \Psi}{\partial y} = \frac{1}{\xi^2} \Psi$

Nucleación en H_{c2}

- SC sin FD con campo aplicado $\bar{H} = H\hat{z}$ homogéneo.
- Lejos de las fronteras N/S (lo pensamos como ∞) $\bar{A} = \mu_0 H x \hat{y}$

La 1er ecuación de GL queda:
$$-\nabla^2 \Psi + \frac{4\pi^2}{\phi_0} \mu_0^2 H^2 x^2 \Psi + \frac{i4\pi}{\phi_0} \mu_0 H x \frac{\partial \Psi}{\partial y} = \frac{1}{\xi^2} \Psi$$

Abrikosov propuso soluciones de la forma: $\Psi(x, y, z) = e^{ik_y y} e^{ik_z z} f(x)$

Reemplazando en la ecuación de GL queda:
$$-f''(x) + \left(\frac{2\pi\mu_0 H}{\phi_0}\right)^2 (x - x_0)^2 f(x) = \left(\frac{1}{\xi^2} - k_z^2\right) f(x)$$

con
$$x_0 = \frac{k_y \phi_0}{2\pi\mu_0 H}$$

Esta ecuación es análoga a otras famosas ecuaciones de la física; es formalmente idéntica a la que describe una partícula cargada en un campo magnético, que da origen a los niveles de Landau.

Los autovalores cumplen con la solución:
$$\mu_0 H = \frac{\phi_0}{2\pi(2n+1)} \left(\frac{1}{\xi^2} - k_z^2\right)$$

Nucleación en H_{c2}

- SC sin FD con campo aplicado $\bar{H} = H\hat{z}$ homogéneo.
- Lejos de las fronteras N/S (lo pensamos como ∞)

$$\bar{A} = \mu_0 H x \hat{y}$$

La 1er ecuación de GL queda:
$$-\nabla^2 \Psi + \frac{4\pi^2}{\phi_0} \mu_0^2 H^2 x^2 \Psi + \frac{i4\pi}{\phi_0} \mu_0 H x \frac{\partial \Psi}{\partial y} = \frac{1}{\xi^2} \Psi$$

$$\Psi(x, y, z) = e^{ik_y y} e^{ik_z z} f(x)$$

Tiene solución si:
$$\mu_0 H = \frac{\phi_0}{2\pi(2n+1)} \left(\frac{1}{\xi^2} - k_z^2 \right)$$

El campo H máximo que tiene solución es con $k_z = 0$ y $n = 0$

$$\mu_0 H_{c2} = \frac{\phi_0}{2\pi\xi^2}$$

$$\xi = \frac{\phi_0}{2\pi\mu_0 H_c \lambda} \Rightarrow$$

$$\mu_0 H_{c2} = \sqrt{2}\kappa H_c$$

$$\kappa = \frac{\lambda}{\xi}$$

- En los SC tipo II ($\kappa > 1/\sqrt{2}$) hay una transición de segundo orden en $H_{c2}(T) > H_c$.
- En los SC tipo I ($\kappa < 1/\sqrt{2}$) $H_{c2}(T) < H_c$ es el límite para la existencia de configuraciones metaestables sobreenfriadas.
- En los SC tipo II $H_{c3}(T) \sim 1.66 H_{c2}(T)$; nucleación de la superconductividad en la superficie a campos mayores.

Propuesta de Abrikosov: La red de vortices en $H \lesssim H_{c2}$

- SC sin FD con campo aplicado $\vec{H} = H\hat{z}$ homogéneo. $\vec{A} = \mu_0 H x \hat{y}$
- Lejos de las fronteras N/S (lo pensamos como ∞)

Soluciones: $\Psi(x, y, z) = e^{ik_y y} e^{ik_z z} f(x)$ $\mu_0 H = \frac{\phi_0}{2\pi(2n+1)} \left(\frac{1}{\xi^2} - k_z^2 \right)$

El campo H máximo que tiene solución es: $\mu_0 H_{c2} = \frac{\phi_0}{2\pi\xi^2} = \sqrt{2}\kappa H_c$

Las solución correspondiente a $k_z = 0$, $n = 0$ es una combinación de las autofunciones:

$$\Psi_k = e^{iky} e^{-\frac{(x-x_k)^2}{2\pi\xi^2}} \quad \text{con} \quad x_k = \frac{k\phi_0}{2\pi\mu_0 H} \quad (\text{llamo } k \text{ a } k_y)$$

Gaussianas de ancho ξ
alrededor de cada x_k

En $H = H_{c2}$ cualquier combinación de las Ψ_k tiene la misma energía (no importa el valor de k_y)

- Abrikosov mostró que apenas se baja el campo $H \lesssim H_{c2}$ se rompe la degeneración ya que el término no lineal, si bien muy chico, no es estrictamente nulo.
- Mostró que una distribución uniforme en todo el bulk y periódica en y minimiza la energía.

Propuesta de Abrikosov: La red de vortices en $H \lesssim H_{c2}$

Combinaciones de: $\Psi_k = e^{iky} e^{-\frac{(x-x_k)^2}{2\xi^2}}$ con $x_k = \frac{k\phi_0}{2\pi\mu_0 H}$ (llamo k a k_y)

Propuesta de Abrikosov:

1) $k_n = nq$ Modulación de la fase en y con periodo $\Delta y = \frac{2\pi}{q}$

2) $x_{k_n} = \frac{k_n\phi_0}{2\pi\mu_0 H} = \frac{nq\phi_0}{2\pi\mu_0 H}$ La periodicidad en x es: $\Delta x = \frac{q\phi_0}{2\pi\mu_0 H} = \frac{\phi_0}{\mu_0 H \Delta y}$

$\Rightarrow \mu_0 H \Delta x \Delta y = \phi_0$ Cada unidad espacial periódica $\Delta x \Delta y$ tiene un cuanto de flujo

Solución general: $\Psi(y, x) = \sum_n c_n e^{inqy} e^{-\frac{(x-x_n)^2}{2\xi^2}}$ Con c_n una función periódica de n

Por ejemplo: Si todos los c_n son iguales resulta una red cuadrada.

Si son iguales de a pares y alternados reales y complejos $c_1 = ic_0$ y $c_{n+2} = c_n$, red triangular

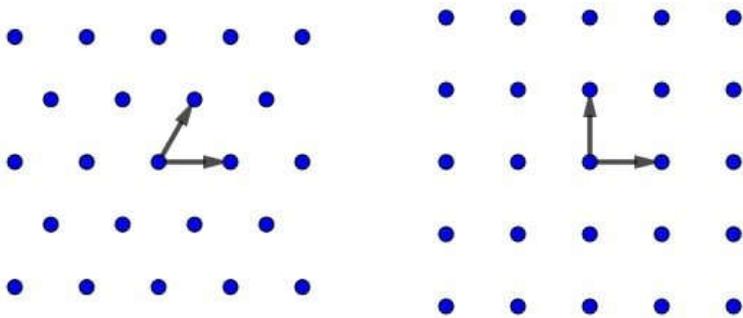
La red de vortices

Solucion general de Abrikosov:
$$\Psi(y, x) = \sum_n c_n e^{inqy} e^{-\frac{(x-x_n)^2}{2\xi_2^2}}$$

Con c_n una funcion periódica de n

Por ejemplo: Si todos los c_n son iguales resulta una red cuadrada.

Si son iguales de a pares y alternados reales y complejos $c_1 = ic_0$ y $c_{n+2} = c_n$, red triangular

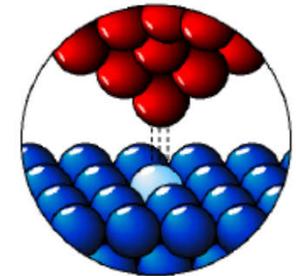
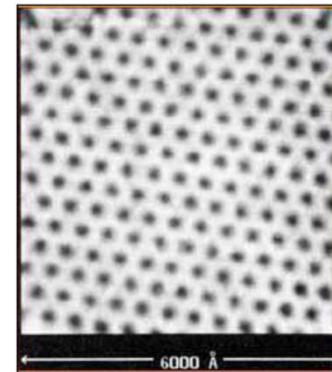


$$a_0 = \frac{4}{3} \left(\frac{\phi_0}{B} \right)^{\frac{1}{2}}$$

$$a_0 = \left(\frac{\phi_0}{B} \right)^{\frac{1}{2}}$$

Cada unidad espacial periodica $\Delta x \Delta y$ tiene un cuanto de flujo ϕ_0

Abrikosov calculó que la red cuadrada minimiza la energía pero se equivocó



Red de vortices en NbSe₂ observada en forma Directa por STM; H. Suderow et al; 2014