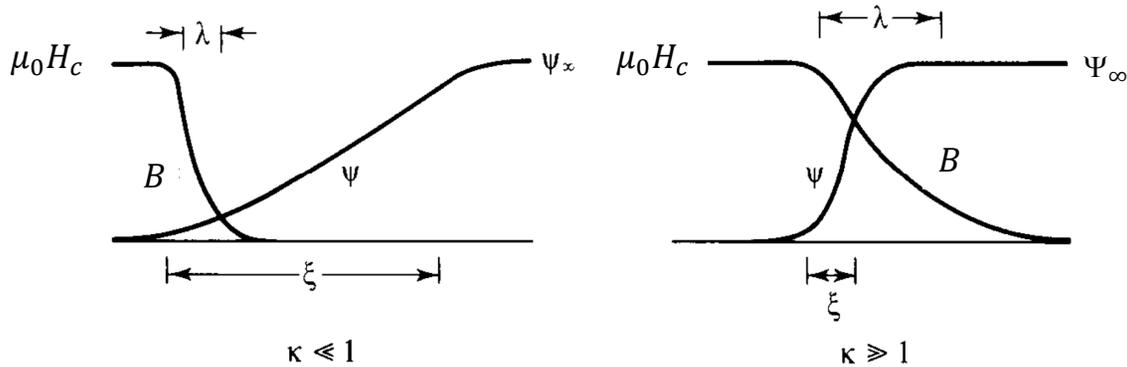


# Vortices en superconductores de tipo II

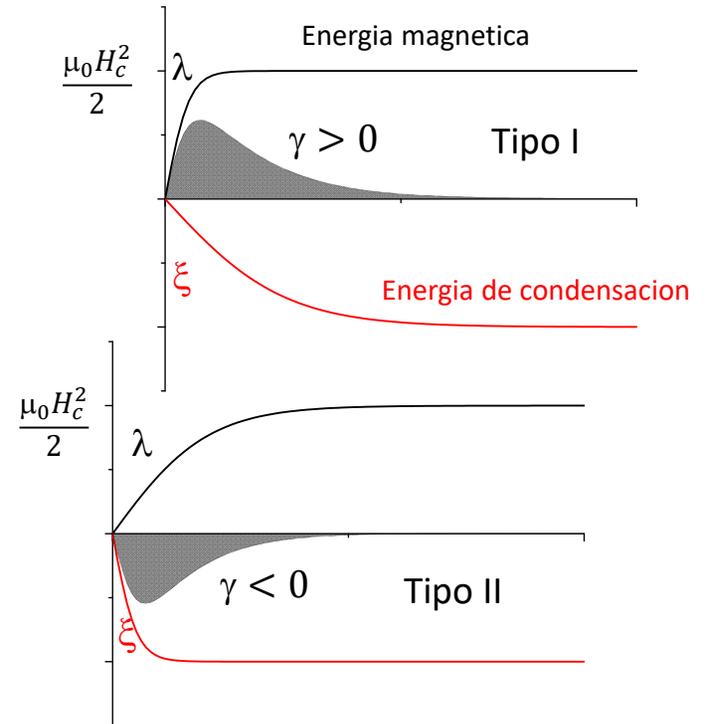
## Repaso: Superconductores de Tipo I y Tipo II: Energía de superficie N/S

$$\gamma = \frac{\mu_0 H_c^2}{2} \int_{-\infty}^{\infty} \left( \underbrace{-\frac{\Psi^4}{|\Psi|_{\infty}^4}}_{< 0} - \underbrace{\frac{2\bar{B}}{\mu_0 H_c} \cdot \left(\frac{\bar{H}}{H_c} - 1\right)}_{\substack{< 0 \text{ si } H < H_c \\ > 0 \text{ si } H > H_c}} + \underbrace{\left(\frac{\bar{B}}{\mu_0 H_c} - 1\right)^2}_{> 0} \right) dx$$



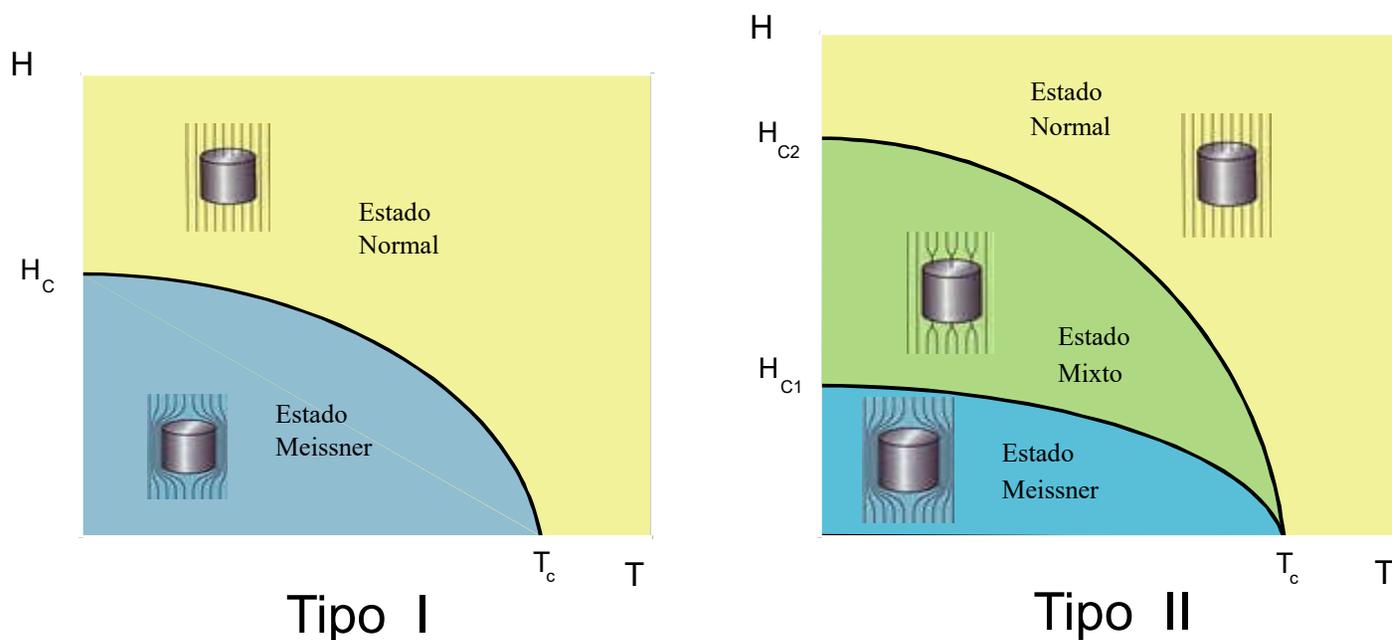
$$\gamma(H = H_c) = \frac{\mu_0 H_c^2}{2} \int_{-\infty}^{\infty} \left( -\frac{\Psi^4(x)}{|\Psi|_{\infty}^4} + \left(\frac{\bar{B}(x)}{\mu_0 H_c} - 1\right)^2 \right) dx$$

Hay que encontrar las funciones  $\Psi(x)$  y  $B(x)$  que minimizan  $\gamma$



## Repaso: Superconductores de Tipo II: Campo crítico $H_{c1}$

- En los superconductores de tipo II hay un campo  $H_{c1} < H_c$  a partir del cual la energía de pared N/S es negativa.
- Conviene entonces generar paredes N/S dentro del superconductor.
- Aparecen nucleaciones con  $|\Psi|$  deprimida ("core") en los que  $B \neq 0$ .
- El flujo magnético está cuantizado por lo que esas regiones tienen que tener cuantos de flujo  $\phi_0$ .
- Esas regiones "normales" que contienen un cuanto de flujo magnético apantallado por corrientes superconductoras se conocen como vórtices.



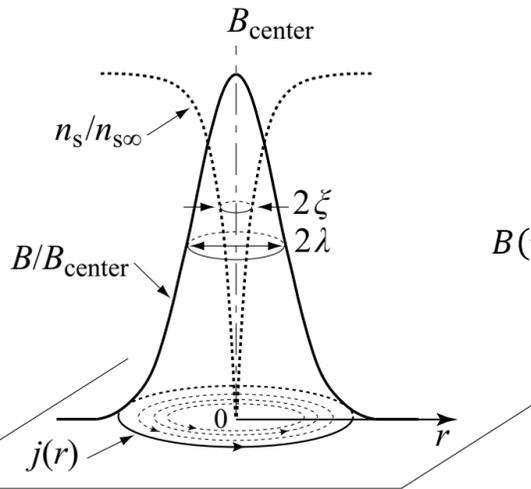
## Repaso

Vimos para qué campo conviene energéticamente que se formen vórtices.

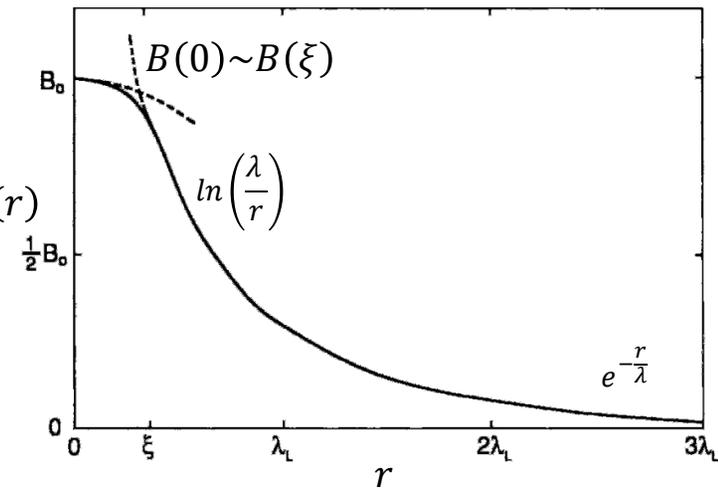
$$H_{c1} = \frac{\varepsilon_1}{\phi_0}$$

Con  $\varepsilon_1$  la energía de un vortice por unidad de longitud

En superconductores tipo II extremos  $\kappa \gg 1$ :  $B(r) = \frac{\phi_0}{2\pi\lambda^2} K_0\left(\frac{r}{\lambda}\right)$



$$B(r) = \begin{cases} \frac{\phi_0}{2\pi\lambda^2} \left(\frac{\pi\lambda}{2r}\right)^{\frac{1}{2}} e^{-\frac{r}{\lambda}}, & r \rightarrow \infty \\ \frac{\phi_0}{2\pi\lambda^2} \left[ \ln\left(\frac{\lambda}{r}\right) + 0.12 \right], & \xi < r \ll \lambda \end{cases} B(r)$$



## Repaso

Si  $\kappa \gg 1$ ,  $\xi \ll \lambda \Rightarrow$  puedo despreciar la energía de condensación y los gradientes de  $|\Psi|$  asociados con el core del vortice. Solo va a pesar la energía cinética de las corrientes y la energía magnética.

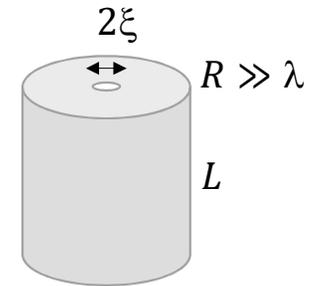
$$\Delta f = \cancel{|\Psi|^2} + \frac{\beta}{2} \cancel{|\Psi|^4} + \frac{1}{2m} [(\hbar \bar{\nabla} \varphi - q \bar{A})^2 |\Psi|^2 + \hbar^2 (\bar{\nabla} |\Psi|)^2] + \frac{B^2}{2\mu_0}$$

$$\bar{j} = \frac{q}{m} |\Psi|^2 (\hbar \bar{\nabla} \varphi - q \bar{A})$$

La energía  $\varepsilon_1$  asociada a una unidad de longitud de 1 vortice:

Integro en volumen fuera del core:

$$\varepsilon_1 = \frac{1}{L} \iiint \left[ \frac{B^2(r)}{2\mu_0} + \frac{\mu_0 \lambda^2}{2} J^2(r) \right] dV$$



$$\varepsilon_1 \sim \frac{1}{4\pi\mu_0} \left( \frac{\phi_0}{\lambda} \right)^2 \ln(\kappa)$$

$$\varepsilon_1 \sim \frac{\phi_0}{2\mu_0} B(r = \xi) \sim \frac{\phi_0}{2\mu_0} B(r = 0)$$

$$H_{c1} = \frac{\varepsilon_1}{\phi_0} \sim \frac{1}{4\pi\mu_0} \frac{\phi_0}{\lambda^2} \ln(\kappa)$$

$$H_{c1} \sim \frac{H_c}{\sqrt{2}\kappa} \ln(\kappa)$$

## Interacción entre vórtices

En la aproximación  $\kappa \gg 1$  las ecuaciones de GL son lineales, por lo que vale superposición.  
Si despreciamos el core en el balance energético solo tengo un problema electromagnético, en el que vale superposición.

Para un vortice la energía libre por unidad de longitud es:  $\Delta F = \varepsilon_1 = \frac{1}{L} \iiint \left[ \frac{B^2(r)}{2\mu_0} + \frac{\mu_0 \lambda^2}{2} J^2(r) \right] dV$

Y llegabamos a:  $\varepsilon_1 \sim \frac{\phi_0}{2\mu_0} B(r = \xi) \sim \frac{\phi_0}{2\mu_0} B(r = 0)$

Para dos vortices centrados en  $\bar{r}_1$  y  $\bar{r}_2$ :  $\Delta F = \frac{1}{L} \iiint \left[ \frac{(\bar{B}_1(|\bar{r} - \bar{r}_1|) + \bar{B}_2(|\bar{r} - \bar{r}_2|))^2}{2\mu_0} + \frac{\mu_0}{2} \lambda^2 (\bar{J}_1(|\bar{r} - \bar{r}_1|) + \bar{J}_2(|\bar{r} - \bar{r}_2|))^2 \right] dV$

Con un tratamiento parecido al usado antes (integrando en el espacio dejando afuera los core de los vortices) se llega a:

$$\Delta F = \overbrace{\frac{\phi_0}{2\mu_0} B_1(0) + \frac{\phi_0}{2\mu_0} B_2(0)}^{\text{iguales}} + \overbrace{\frac{\phi_0}{2\mu_0} B_1(r_{12}) + \frac{\phi_0}{2\mu_0} B_2(r_{21})}^{\text{iguales}} \quad \Delta F = \overbrace{2 \left( \frac{\phi_0}{2\mu_0} B(0) \right)}^{\text{energía de 2 vortices}} + \overbrace{\frac{\phi_0}{\mu_0} B(r_{12})}^{\text{Interacción } F_{12}}$$

## Interacción entre vórtices

$$F_{12} = \frac{\phi_0}{\mu_0} B(r_{12})$$

$$F_{12} = \frac{\phi_0}{\mu_0} \frac{\phi_0}{2\pi\lambda^2} K_0 \left( \frac{|\bar{r}_1 - \bar{r}_2|}{\lambda} \right)$$

$$F_{12} = \frac{1}{2\pi\mu_0} \left( \frac{\phi_0}{\lambda} \right)^2 K_0 \left( \frac{|\bar{r}_1 - \bar{r}_2|}{\lambda} \right)$$

Energía de interacción de dos vortices

### Fuerza entre vortices:

Supongamos  $\bar{B}$  en  $\hat{z}$ :  $f_{12x} = -\frac{\partial F_{12}}{\partial x_2} = -\frac{\phi_0}{\mu_0} \frac{\partial B_1}{\partial x_2} \Big|_{\bar{r}_2}$  Pero  $\frac{\partial B_1}{\partial x} = -\mu_0 J_{1y} \Rightarrow f_{12x} = \phi_0 J_{1y}(\bar{r}_2)$

Generalizando:  $\bar{f}_{12} = \bar{J}_1(\bar{r}_2) \times \bar{\phi}_0$   $\bar{\phi}_0$  tiene la dirección del campo  $\bar{B}$

Repulsiva

Si ahora tenemos muchos vortices:

$$\bar{f}(\bar{r}) = \bar{J}_S(\bar{r}) \times \bar{\phi}_0$$

Fuerza ejercida sobre un vortice ubicado en la posición  $\bar{r}$

Densidad de corriente generada por todos los demás vortices en la posición  $\bar{r}$

Si los vortices están organizados en una red (RV) simétrica  $\bar{J}_S(\bar{r}) = 0$  y el sistema está en equilibrio

Si hay una distribución asimétrica, o si agregamos una  $\bar{J}$  externa  $\Rightarrow \bar{f} = \bar{J} \times \bar{\phi}_0 \neq 0$  y los vortices se mueven!

# Magnetización de equilibrio

Los vortices en equilibrio en un sistema ideal con simetría de traslación forman una estructura periódica triangular

## Que densidad de vortices minimiza la energía?

Sabemos trabajar en tres regiones:

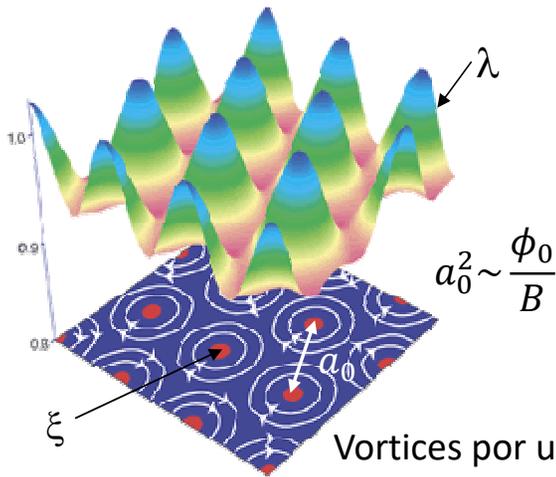
1) Vortices aislados:  $a_0 \gg \lambda$

2) Vortices interactuantes separados:  $\xi^2 \ll a_0^2 < \lambda^2$

3)  $H \lesssim H_{c2}$ :  $\xi \lesssim a_0$

Puedo despreciar el core y usar superposición

No puedo despreciar el core pero puedo usar las ecuaciones lineales de GL



Vortices por unidad de superficie  $n_V \sim \frac{B}{\phi_0}$

$$a_0 = 1.075 \left( \frac{\phi_0}{B} \right)^{\frac{1}{2}}$$

En las regiones 1) y 2):

$$g_s - g_{s0} = \frac{B}{\phi_0} \varepsilon_1 + \sum_{i>j} F_{ij} - \bar{B} \cdot \bar{H}$$

Energía libre  $F$   
despreciando el core

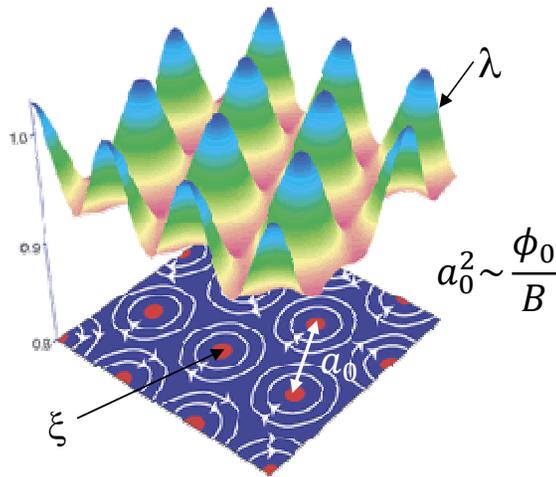
Densidad de energía libre de Gibbs con vortices
Densidad de energía libre estado Meissner
Energía de Interacción entre vortices

## Magnetizacion de equilibrio

1) Vortices aislados (muy separados):  $a_0 \gg \lambda$

2) Vortices interactuantes separados:  $\xi^2 \ll a_0^2 < \lambda^2$

Puedo despreciar el core y usar superposicion



$$\Delta g = g_s - g_{s0} = \frac{B}{\phi_0} \varepsilon_1 + \sum_{i>j} F_{ij} - \bar{B} \cdot \bar{H}$$

- Para  $H < H_{c1}$ : estado Meissner:  $\Delta g$  minimo para  $B = 0$ .  $M = -H$
- Para  $H > H_{c1}$ :

$$\frac{\partial \Delta g}{\partial B} = 0 = \frac{\varepsilon_1}{\phi_0} - H + \frac{\partial}{\partial B} \sum_{i>j} F_{ij} \Rightarrow$$

$$\frac{\partial}{\partial B} \sum_{i>j} F_{ij} = H - \frac{\varepsilon_1}{\phi_0} = H - H_{c1}$$

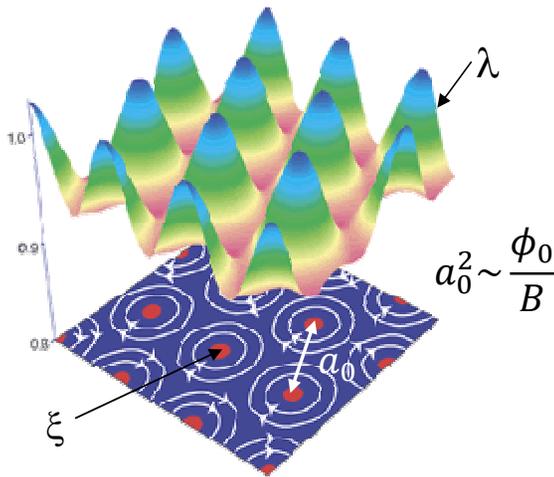
$$a_0 = 1.075 \left( \frac{\phi_0}{B} \right)^{\frac{1}{2}}$$

numero de primeros vecinos  $z = 6$ .

$$F_{ij} = \frac{1}{2\pi\mu_0} \left( \frac{\phi_0}{\lambda} \right)^2 K_0 \left( \frac{|\bar{r}_i - \bar{r}_j|}{\lambda} \right)$$

## Magnetización de equilibrio

- 1) Vortices aislados (muy separados):  $a_0 \gg \lambda$
- 2) Vortices interactuantes separados:  $\xi^2 \ll a_0^2 < \lambda^2$
- } Puedo despreciar el core y usar superposición



$$\frac{\partial}{\partial B} \sum_{i>j} F_{ij} = H - \frac{\varepsilon_1}{\phi_0} = H - H_{c1} \quad F_{ij} = \frac{1}{2\pi\mu_0} \left(\frac{\phi_0}{\lambda}\right)^2 K_0\left(\frac{|\bar{r}_i - \bar{r}_j|}{\lambda}\right)$$

En la region 1) solo cuento los 6 primeros vecinos con  $r_{ij} = a_0$ :

$$B(r = a_0) = \frac{\phi_0}{2\pi\lambda^2} \left(\frac{\pi\lambda}{2a_0}\right)^{\frac{1}{2}} e^{-\frac{a_0}{\lambda}}$$

Derivamos  $\frac{\partial}{\partial B} \sum_{vecinos} F_{ij} = 6 \frac{\partial F_{ij}}{\partial B}$  teniendo en cuenta  $a_0 = 1.075 \left(\frac{\phi_0}{B}\right)^{\frac{1}{2}}$

Resulta:

$$B \sim \frac{2\phi_0}{\sqrt{3}\lambda^2} \left\{ \ln \left[ \frac{3\phi_0}{\mu_0\lambda^2(H - H_{c1})} \right] \right\}^{-2}$$

- $B$  es continuo en  $H_{c1}$  pero la derivada es discontinua
- Hay una entrada abrupta de vortices hasta que la repulsion se vuelve significativa

## Magnetizacion de equilibrio

- 1) Vortices aislados (muy separados):  $a_0 \gg \lambda$
- 2) Vortices interactuantes separados:  $\xi^2 \ll a_0^2 < \lambda^2$
- } Puedo despreciar el core y usar superposicion

$$\frac{\partial}{\partial B} \sum_{i>j} F_{ij} = H - \frac{\varepsilon_1}{\phi_0} = H - H_{c1} \quad F_{ij} = \frac{1}{2\pi\mu_0} \left(\frac{\phi_0}{\lambda}\right)^2 K_0\left(\frac{|\bar{r}_i - \bar{r}_j|}{\lambda}\right)$$

En la region 2) la cuenta es mas complicada. Un resultado aproximado:

$$H \sim \frac{B}{\mu_0} + H_{c1} \frac{\ln\left[\frac{\mu_0 H_{c2}}{B}\right]}{\ln \kappa}$$

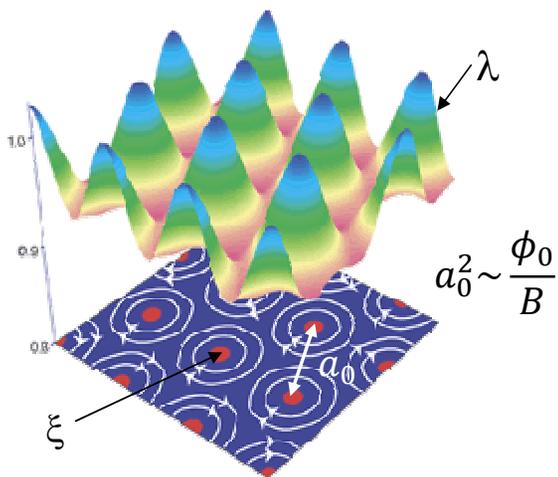
- $B$  tiende a  $\frac{B}{\mu_0}$  al acercarse a  $H_{c2}$ . Tiende más rápido cuanto mayor es  $\kappa$ .

Region 3)  $H \lesssim H_{c2}$ .

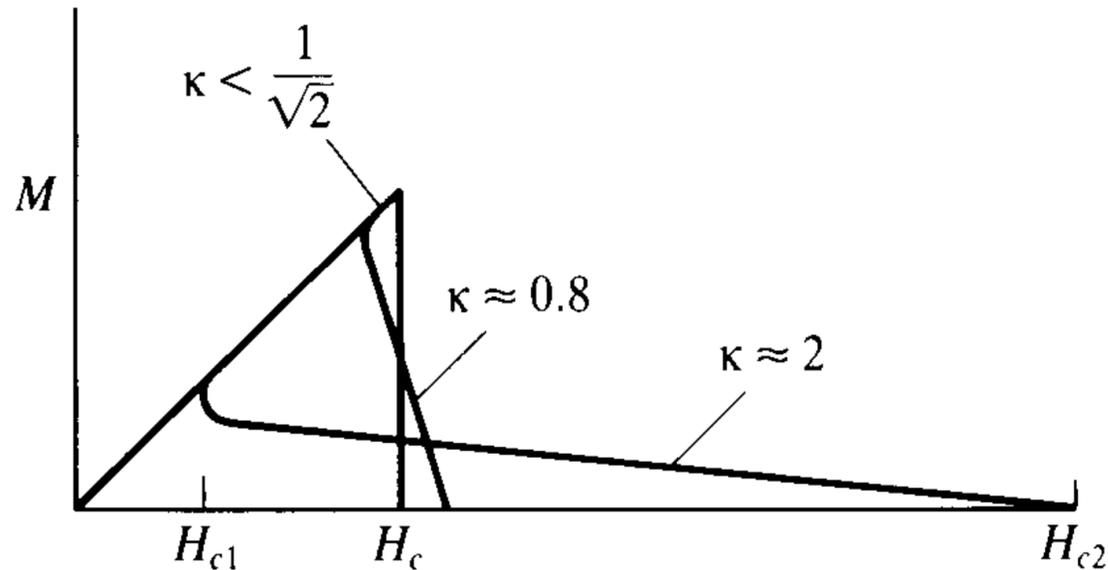
A partir de las ecuaciones lineales de GL, agregando como perturbacion termino no lineal en valor medio:

$$B \sim H - \frac{H_{c2} - H}{(2\kappa^2 - 1)\beta_A} \quad \beta_A = \frac{\langle \Psi^4 \rangle}{\langle \Psi^2 \rangle^2}$$

$\beta_A = 1.16$  para una RV triangular y minimiza  $\Delta g$



## Magnetización de equilibrio



Si  $\kappa \gg 1$ ,  $M \ll H$  apenas el campo aplicado supera  $H_{c1}$ .  
Puede considerarse  $B_{eq} \sim \mu_0 H$  en la mayor parte del estado mixto

“Paradoja”: Si bien la energía de condensación de un vortice es mucho menor que la magnética para  $\kappa \gg 1$ , finalmente la modulación del campo dentro de la muestra para  $H > H_{c1}$  es muy chica.

## Dinámica de vórtices

Tenemos un solenoide fabricado con un superconductor de tipo II por el que queremos hacer circular una corriente para generar un campo en el interior. Cuál es el máximo campo que podemos generar?

Limite superior:  $H \lesssim H_{c2}$  Vimos que estos campos son muy altos, en HTS  $\mu_0 H_{c2}$  puede llegar a 100-200 T a muy baja  $T$   
En los tipo II que se usan mas comunmente para cables: Nb<sub>3</sub>Sn 23T; Nb<sub>3</sub>Ge 37T.

Que corriente haria falta hacer pasar por el solenoide?  $B \sim \mu_0 n I \Rightarrow n I \sim 8 \cdot 10^5 \frac{A}{m}$  por cada Tesla

Por ejemplo, que construimos el solenoide con 10 capas de un cable de  $\phi = 1$  mm de diametro  $\Rightarrow n = 10^4 \Rightarrow I \sim 80$  A por T.

Eso nos da una  $J \sim 10^8$  A/m<sup>2</sup> por cada T. Para  $B \sim \mu_0 H_{c2}$  esto daría  $J \sim 10^9 - 10^{10}$  A/m<sup>2</sup>

Se puede pasar densidades de corriente de ese orden en un superconductor sin disipar? **NO**

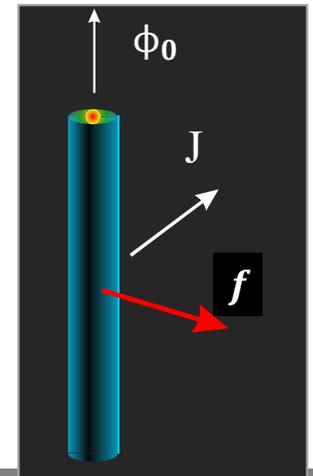
Recordemos:

$$\vec{f} = \vec{J} \times \vec{\phi}_0$$

Fuerza sobre un vortice por unidad de longitud

$$\vec{F} = \vec{J} \times \vec{B}$$

Fuerza por unidad de volumen sobre el sistema de vortices



## Dinámica de vórtices: Flux Flow

$$\vec{f} = \vec{J} \times \vec{\phi}_0$$

Fuerza de Lorentz sobre un vortice por unidad de longitud

$$\vec{F} = \vec{J} \times \vec{B}$$

Fuerza por unidad de volumen sobre el sistema de vortices

Si no hay otra fuerza que pueda impedirlo los vórtices se mueven con velocidad  $\vec{v} // \vec{F}$ .

Esto va a generar un campo electrico:  $\vec{E} = \vec{B} \times \vec{v}$

En el estacionario la fuerza de Lorentz es contrarrestada por la fuerza viscosa de forma que :  $\vec{f} - \eta \vec{v} = 0$

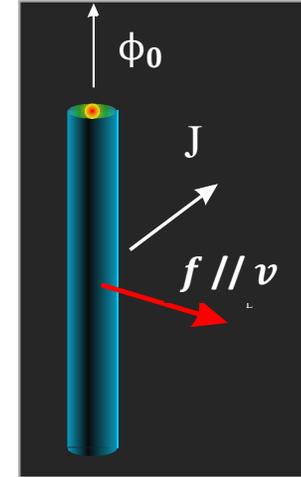
$$J\phi_0 = \eta v = \frac{E}{B} \Rightarrow \boxed{\frac{E}{J} = \frac{\phi_0 B}{\eta} = \rho_{FF}} \Rightarrow \rho \neq 0 \text{ y disipan!!}$$

Potencia disipada por un vortice en FF por unidad de longitud:

$$P = \vec{F} \cdot \vec{v} = \eta v^2 = \frac{(J\phi_0)^2}{\eta}$$

Que es esa viscosidad?

$\rho_{FF}$  es significativa? Es medible?



CONTINUARA