

Resultados de BCS

Repaso

- Si hay una interacción atractiva entre dos fermiones (electrones) en un mar de Fermi, esto da como resultado estados ligados, por más débil que sea esa interacción.
- Para obtener ese resultado es importante que la interacción sea $\neq 0$ solo en un entorno de la E_F .
- Se puede ver que hay una interacción atractiva entre electrones mediadas por los fonones de la red, $V \neq 0$ en un entorno del orden de la energía asociada con la frecuencia de Debye ω_D .
- La energía del estado ligado es menor que la original de los dos electrones. Esa diferencia de energía es finita:

$$E_b \approx 2\hbar\omega_D e^{-\frac{2}{VG(\epsilon_F)}}.$$

Notación: $\rho_F \equiv G(\epsilon_F)$

Repaso

Hamiltoniano BCS

En un sistema de N electrones:

$$H = \sum_{\mathbf{k}\sigma} \xi_{\mathbf{k}} c_{\mathbf{k}\sigma}^{\dagger} c_{\mathbf{k}\sigma} + \frac{1}{N} \sum_{\mathbf{k}\mathbf{k}'} V_{\mathbf{k}\mathbf{k}'} c_{\mathbf{k}\uparrow}^{\dagger} c_{-\mathbf{k}\downarrow}^{\dagger} c_{-\mathbf{k}'\downarrow} c_{\mathbf{k}'\uparrow}$$

$$\xi_{\mathbf{k}} = \varepsilon_{\mathbf{k}} - \mu.$$

No es resoluble. Se lo escribe en campo medio y queda resoluble, pero no es diagonal en esa base

$$H = \sum_{\mathbf{k}\sigma} \xi_{\mathbf{k}} c_{\mathbf{k}\sigma}^{\dagger} c_{\mathbf{k}\sigma} - \sum_{\mathbf{k}} \left(\Delta_{\mathbf{k}} c_{\mathbf{k}\uparrow}^{\dagger} c_{-\mathbf{k}\downarrow}^{\dagger} + \Delta_{\mathbf{k}}^* c_{-\mathbf{k}\downarrow} c_{\mathbf{k}\uparrow} \right) + \sum_{\mathbf{k}} \Delta_{\mathbf{k}} \langle c_{\mathbf{k}\uparrow}^{\dagger} c_{-\mathbf{k}\downarrow}^{\dagger} \rangle$$

Definiendo:
$$\Delta_{\mathbf{k}} = -\frac{1}{N} \sum_{\mathbf{k}'} V_{\mathbf{k}\mathbf{k}'} \langle c_{-\mathbf{k}'\downarrow} c_{\mathbf{k}'\uparrow} \rangle$$

Δ es mayor cuanto mas estados hay disponibles.

Para diagonalizarlo se pasa a una nueva base:

$$c_{\mathbf{k}\uparrow} = u_{\mathbf{k}}^* \gamma_{\mathbf{k}\uparrow} + v_{\mathbf{k}} \gamma_{-\mathbf{k}\downarrow}^{\dagger}$$

$$c_{-\mathbf{k}\downarrow}^{\dagger} = u_{\mathbf{k}} \gamma_{-\mathbf{k}\downarrow}^{\dagger} - v_{\mathbf{k}}^* \gamma_{\mathbf{k}\uparrow}$$

Para que H quede diagonal en esa base se pide:

$$2\xi_{\mathbf{k}} u_{\mathbf{k}} v_{\mathbf{k}} - \Delta_{\mathbf{k}} u_{\mathbf{k}}^2 + \Delta_{\mathbf{k}}^* v_{\mathbf{k}}^2 = 0 \Rightarrow$$

$$H = \sum_{\mathbf{k}\sigma} E_{\mathbf{k}} \gamma_{\mathbf{k}\sigma}^{\dagger} \gamma_{\mathbf{k}\sigma} + E_0$$

$$|u_{\mathbf{k}}|^2 = \frac{1}{2} \left(1 + \frac{\xi_{\mathbf{k}}}{\sqrt{\xi_{\mathbf{k}}^2 + |\Delta_{\mathbf{k}}|^2}} \right)$$

$$|v_{\mathbf{k}}|^2 = \frac{1}{2} \left(1 - \frac{\xi_{\mathbf{k}}}{\sqrt{\xi_{\mathbf{k}}^2 + |\Delta_{\mathbf{k}}|^2}} \right)$$

Repaso

$$H = \sum_{\mathbf{k}\sigma} E_{\mathbf{k}} \gamma_{\mathbf{k}\sigma}^{\dagger} \gamma_{\mathbf{k}\sigma} + E_0$$

$$E_{\mathbf{k}} = \sqrt{\xi_{\mathbf{k}}^2 + |\Delta_{\mathbf{k}}|^2}$$

$$E_0 = \sum_{\mathbf{k}} \left(\xi_{\mathbf{k}} - E_{\mathbf{k}} + \Delta_{\mathbf{k}} \langle c_{\mathbf{k}\uparrow}^{\dagger} c_{-\mathbf{k}\downarrow}^{\dagger} \rangle \right)$$

Energía del fundamental

La excitaciones son los Bogolubones, mezcla de huecos y electrones

Los valores medios dependen de $\beta = \frac{1}{kT}$: $\langle \gamma_{\mathbf{k}'\uparrow}^{\dagger} \gamma_{\mathbf{k}'\uparrow} \rangle = \langle \gamma_{-\mathbf{k}'\downarrow}^{\dagger} \gamma_{-\mathbf{k}'\downarrow} \rangle = \frac{1}{e^{\beta E_{\mathbf{k}'}} + 1}$

$$\left. \begin{array}{l} V_{\mathbf{k}\mathbf{k}'} = -V_0 \\ |\xi_{\mathbf{k}}|, |\xi_{\mathbf{k}'}| < \hbar\omega_D \\ \Delta_{\mathbf{k}} = \Delta \end{array} \right\} 1 = V_0 \rho_F \int_0^{\hbar\omega_D} \frac{d\varepsilon}{\sqrt{\varepsilon^2 + \Delta^2}} \tanh\left(\frac{\sqrt{\varepsilon^2 + \Delta^2}}{2k_B T}\right)$$

$$\Delta_0 = 2\hbar\omega_D e^{-\frac{1}{V_0 \rho_F}}$$

$$\Delta(T_c) = 0 \Rightarrow \Delta_0 = 1.76 kT_c$$

El Gap de Energia

Se puede calcular la energia del estado fundamental, que asociamos a la energia interna del sistema a $T = 0$

$$U_s(0) - U_n(0) = -\frac{1}{2}N(0)\Delta^2(0)$$

La densidad de energia de condensacion es:

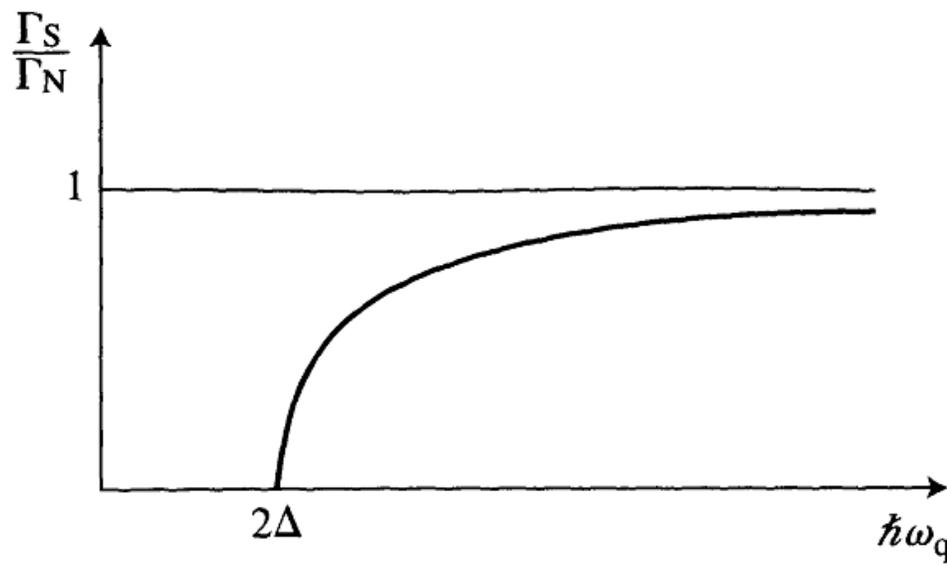
$$(u_s - u_n)(T = 0) = -\frac{G(\epsilon_F)}{2} \Delta_0^2$$

Valores típicos: $\epsilon_F \approx 5 \text{ eV}$; $\hbar\omega_D \approx 20 \text{ meV}$; $G(\epsilon_F)V \approx 0.25$; $\Delta(0) \approx 0.75 \text{ meV}$; $T_c \sim 8.5 \text{ K}$

	T_c [K]	$\hbar\omega_D$ [meV]	$2\Delta(0)$ [meV]	$2\Delta(0)/k_B T_c$
Al	1.175	35.76	0.34	3.40
Pb	7.196	8.67	2.70	4.41
Nb	9.250	22.79	3.00	3.81
Sn (white tin)	3.720	16.45	1.40	4.43
Hg	4.150	5.95	1.70	4.82

El Gap : evidencia experimental

Absorción de fotones en el estado superconductor



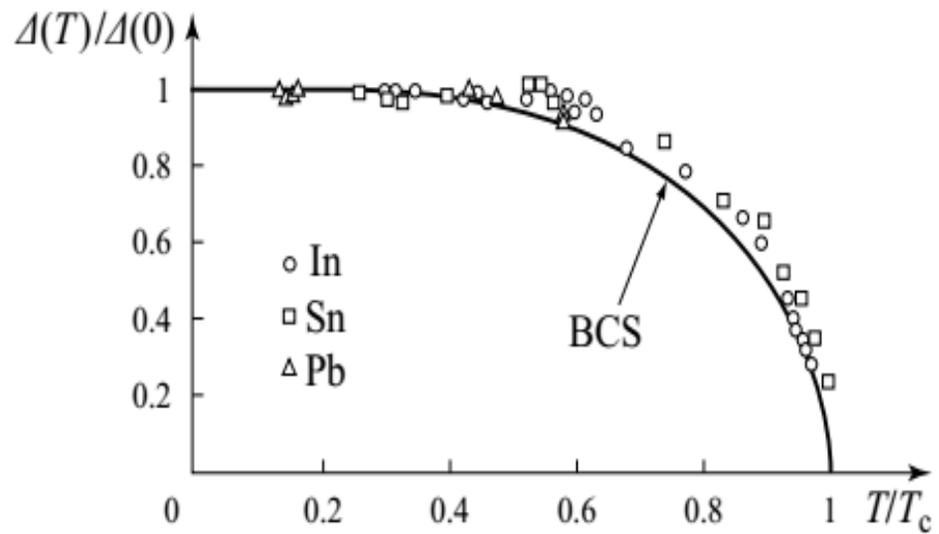
Valores típicos:

$$\frac{2\Delta_0}{h} \approx 4 \cdot 10^{11} \text{ Hz}$$

Entre infrarrojo y microondas

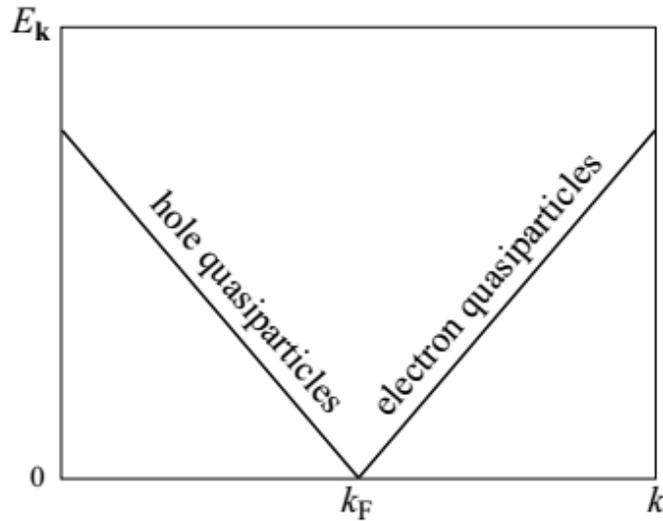
Cociente entre la absorción en el estado superconductor y el normal

GAP BCS y experimentos



Predicción BCS vs puntos experimentales

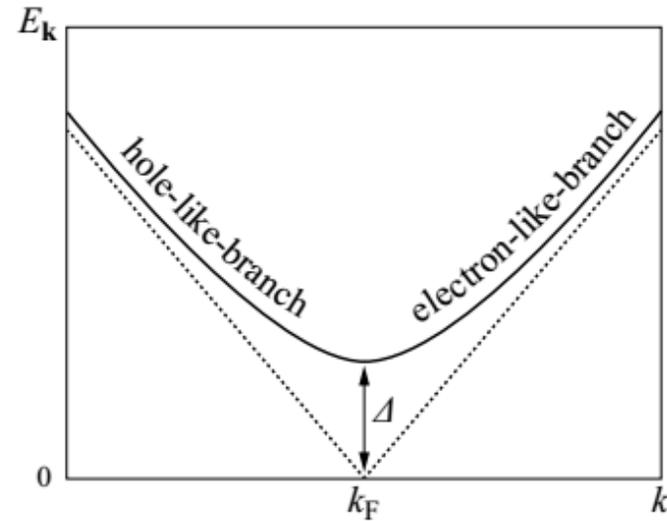
Espectro de excitaciones



$$E_{\mathbf{k}}^n = |\xi_{\mathbf{k}}| = \frac{\hbar^2}{2m} |k^2 - k_F^2| \approx \frac{\hbar^2 k_F}{m} |k - k_F|$$

Metal normal

Energía de excitación de electrones a niveles con momento $k > k_F$ o a huecos con $k < k_F$. Cerca de k_F , $E \sim 0$.

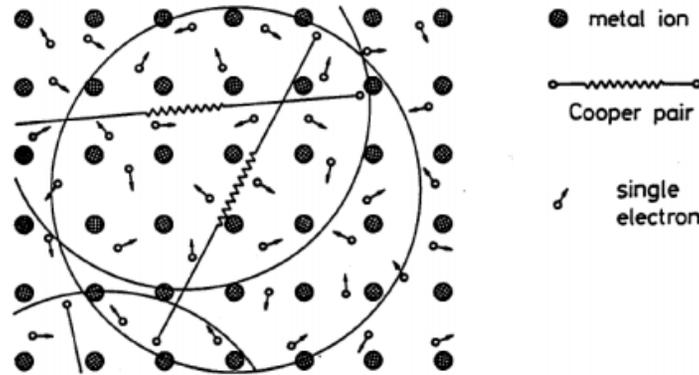
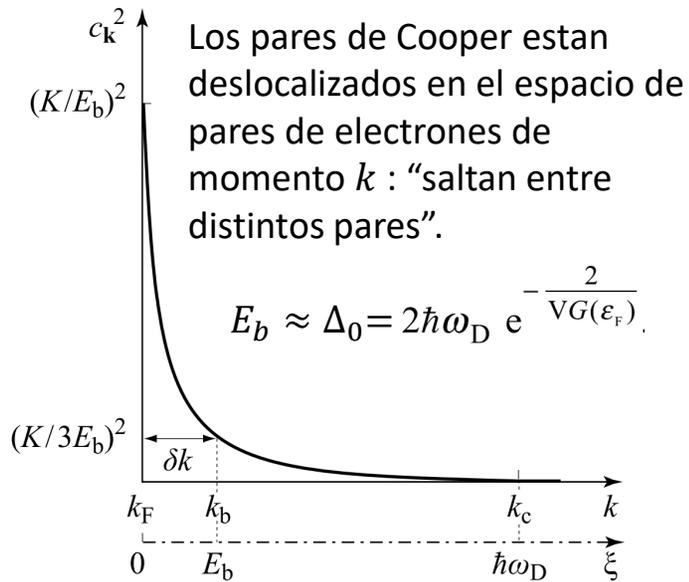


$$E_{\mathbf{k}} = \sqrt{\Delta^2 + \xi_{\mathbf{k}}^2} = \sqrt{\Delta^2 + \left(\frac{\hbar^2 k^2}{2m} - \varepsilon_F \right)^2}$$

Superconductor

Costo energético de romper un par de Cooper creando una excitación de momento k (electrón o hueco), Cerca de k_F hay probabilidad de que sea ambas cosas. $E \sim \Delta$.

Tamaño de un par de Cooper: longitud de coherencia



$$\frac{\xi}{d_{el}} \sim \frac{\epsilon_F}{\Delta} \sim 10^4$$

Y por el principio de incerteza $\delta r \delta k \sim 1$

Probabilidad de que un par de cooper se forme con el par de electrones $k, -k$.

$$E_b \approx \frac{\hbar^2 k_F}{m} (k_b - k_F) \quad \delta k = \frac{m}{\hbar^2 k_F} E_b = \frac{E_b}{\hbar v_F} \quad v_F = \hbar k_F / m$$

$$\delta r = \frac{1}{\delta k} \approx \frac{\hbar v_F}{E_b}$$

$$E_b \sim \Delta_0 \sim k T_c \implies \delta r \sim \xi \sim \frac{\hbar v_F}{k T_c}$$

$$\xi_{BCS}(0) = \frac{\hbar v_F}{\pi \Delta(0)}$$

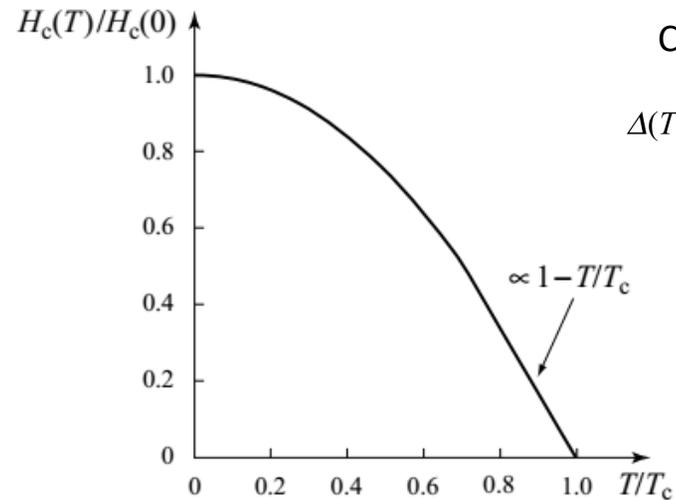
$$\xi_{BCS}(T) = \frac{\hbar v_F}{\pi \Delta(T)}$$

Campo critico termodinamico

$$(u_s - u_n)(T = 0) = -\frac{G(\epsilon_F)}{2} \Delta_0^2$$

$$G(\epsilon_F) \frac{\Delta_0^2}{2} = \mu_0 \frac{H_c^2(0)}{2}$$

$$H_c(0) = \sqrt{\frac{G(\epsilon_F)}{\mu_0}} \Delta_0$$



Cerca de T_c :

$$\Delta(T) = 1.55\Delta(0) \left(1 - \frac{T}{T_c}\right)^{1/2}$$

$$\frac{\Delta(T)}{\Delta_0} \Rightarrow \frac{H_c(T)}{H_c(0)}$$

Numero de portadores y Longitud de penetracion

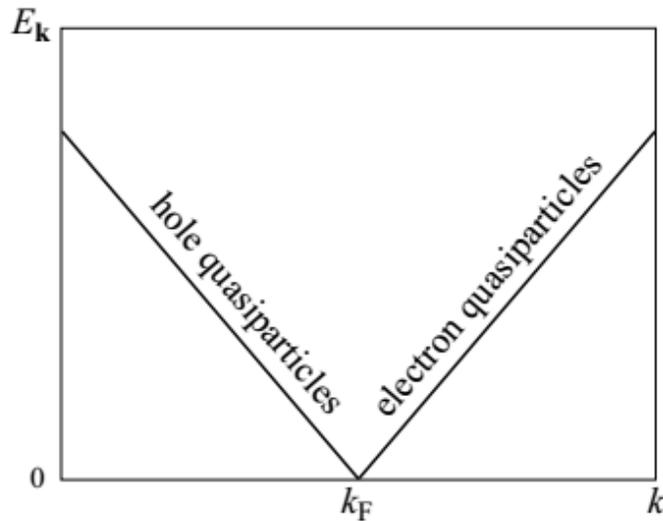
$$G(\epsilon_F) = \frac{3n}{4\epsilon_F}$$

La densidad relativa de portadores que participa en la formacion de pares es $\approx \frac{\Delta}{\epsilon_F} \ll 1$

Lo que define "el numero de portadores superconductores" n_s/n es la proporcion entre electrones apareados y sueltos (cuasiparticulas) en el entorno $\pm k_b$.

$$\lambda_L = \sqrt{\frac{m}{\mu_0 n_s e^2}}$$

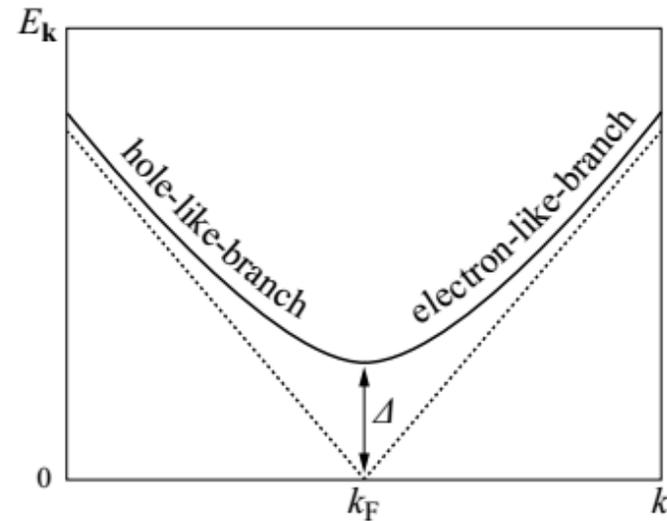
Volvamos al Espectro de excitaciones



$$E_{\mathbf{k}}^n = |\xi_{\mathbf{k}}| = \frac{\hbar^2}{2m} |k^2 - k_F^2| \approx \frac{\hbar^2 k_F}{m} |k - k_F|$$

Metal normal

Energía de excitación de electrones a niveles con momento $k > k_F$ o a huecos con $k < k_F$. Cerca de k_F , $E \sim 0$.



$$E_{\mathbf{k}} = \sqrt{\Delta^2 + \xi_{\mathbf{k}}^2} = \sqrt{\Delta^2 + \left(\frac{\hbar^2 k^2}{2m} - \varepsilon_F \right)^2}$$

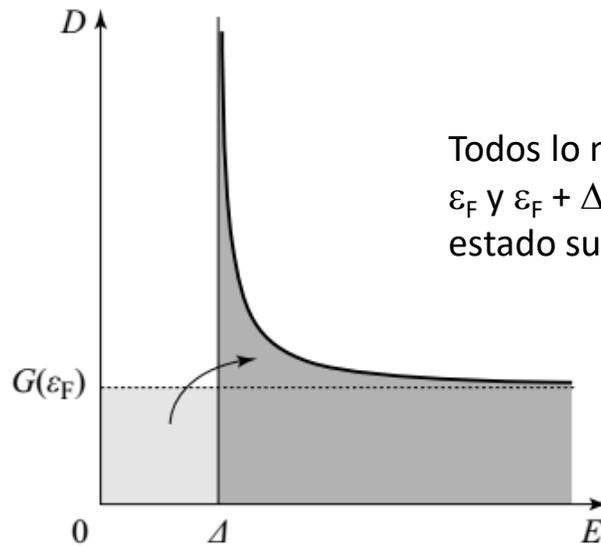
Superconductor

Costo energético de romper un par de Cooper creando una excitación de momento k (electrón o hueco), Cerca de k_F hay probabilidad de que sea ambas cosas. $E \sim \Delta$.

Densidad de estado de cuasiparticulas.

A cada valor de k le corresponde un nivel de energia. Entonces: $D(E) dE = G(k) dk$

$$E_{\mathbf{k}} = \sqrt{\Delta^2 + \xi_{\mathbf{k}}^2} = \sqrt{\Delta^2 + \left(\frac{\hbar^2 k^2}{2m} - \varepsilon_F\right)^2} \quad \Rightarrow \quad D(E) = G(\varepsilon_F) \frac{E}{\sqrt{E^2 - \Delta^2}}.$$



Todos lo niveles que en el estado normal estaban entre ε_F y $\varepsilon_F + \Delta$ ocupan la divergencia cerca del nivel Δ en el estado superconductor.

Aproximacion a baja T : podemos pensar el estado superconductor con dos niveles:
0 (estado fundamental) y Δ (estado excitado).

El numero total de estados es $2G(\varepsilon_F)\Delta(0)$

Manguin-Kahn (2017)

Calor específico

Aproximacion a baja T :

- Hay pocas excitaciones, por lo que el gap no depende dramaticamente de T : $\Delta(T) = \Delta(0)$
- Podemos pensar el estado superconductor con dos niveles: 0 (estado fundamental) y $\Delta(0)$ (estado excitado).

La probabilidad de ocupacion del estado excitado es: $e^{-\Delta(0)/k_B T}$

$$\delta U = \underbrace{[2G(\varepsilon_F)\Delta(0)]}_{\text{Numero de estados}} \Delta(0) e^{-\frac{\Delta(0)}{k_B T}}$$

$$C_s^{\text{el}} = \frac{d(\delta U)}{dT} \approx \frac{2G(\varepsilon_F)[\Delta(0)]^3}{k_B T^2} e^{-\frac{\Delta(0)}{k_B T}}$$

$$C_s^{\text{el}} \sim A e^{-\frac{\Delta(0)}{k_B T}}$$

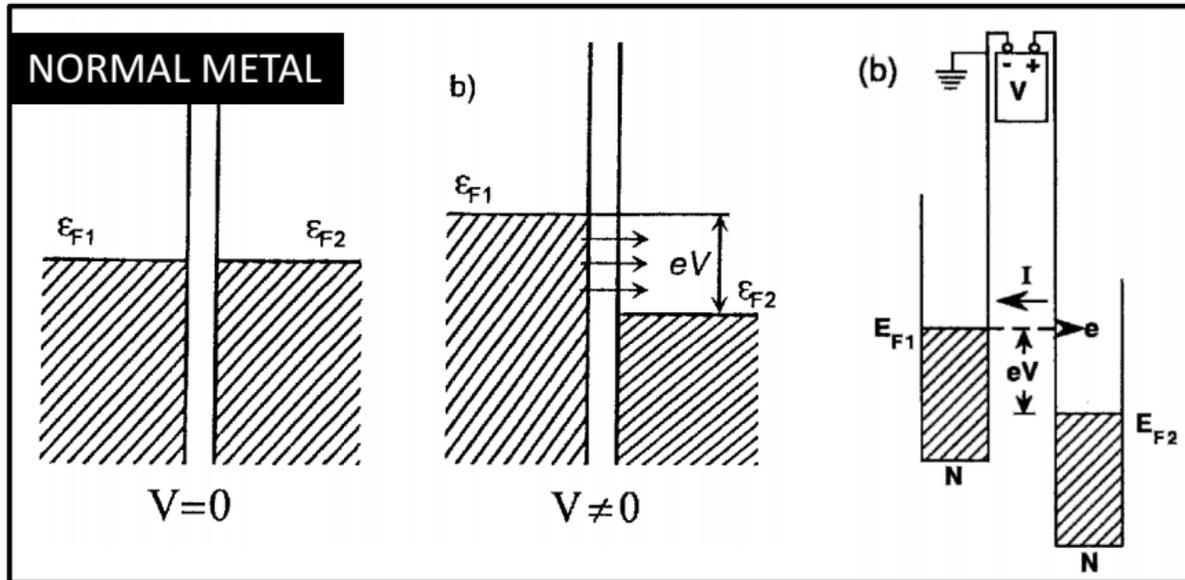
Esto sale en forma rigurosa de BCS

BCS tambien predice el salto en T_c : $\frac{C_s^{\text{el}} - C_n^{\text{el}}}{C_n^{\text{el}}} = 1.43$

Experimentos de STM/STS

Cómo se mide la densidad de estados?

Efecto Tunel metal-metal

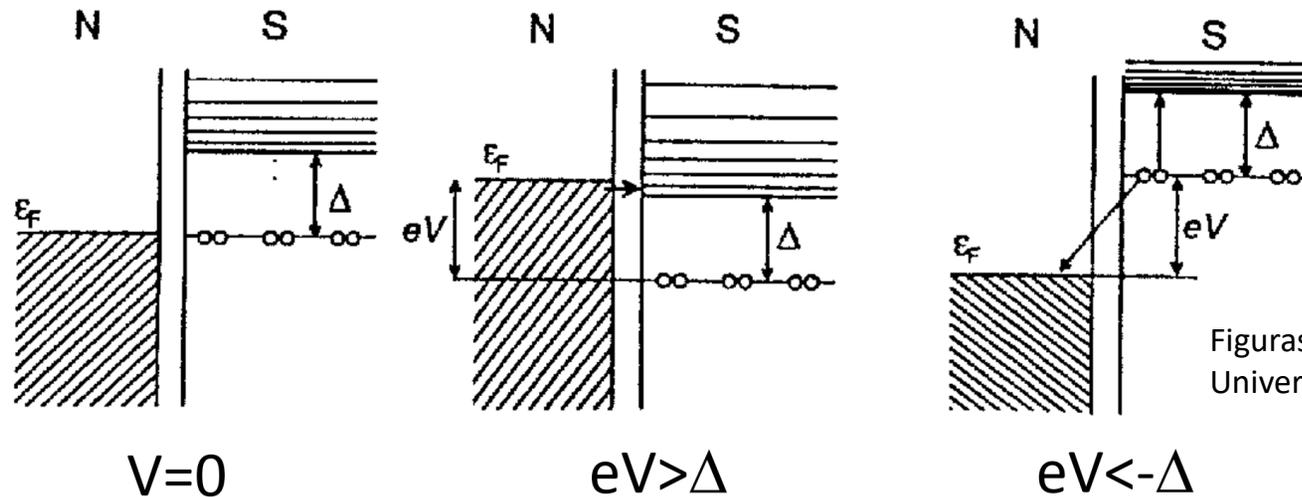


Figuras Lectures Prof. A. Silhanek
Universidad de Liege

Si hay overlap de las funciones de onda en 1) y 2) , hay una probabilidad no nula de que los electrones salten la barrera de potencial generada por el aislante. La probabilidad decae exponencialmente con la distancia d .

Al aplicar una diferencia de potencial hay una corriente neta de electrones I inversamente proporcional a la distancia y proporcional a las densidades de estado en el nivel de Fermi.

Efecto Tunel metal-superconductor



Figuras Lectures Prof. A. Silhanek
Universidad de Liege

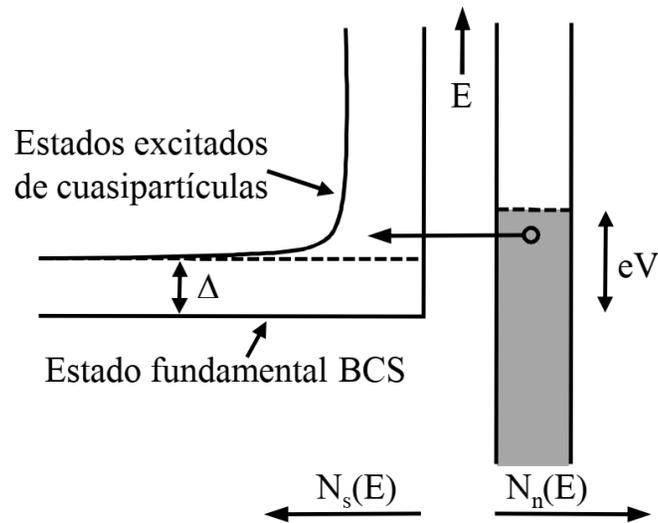
Con $V = 0$ no hay estados de electrones libres accesibles

Inyeccion: Al aplicar una diferencia de potencial tal que $eV > \Delta$ los electrones pueden pasar a los niveles de cuasipartícula (niveles excitados del S) que estan cerca del gap. Hay una corriente neta de electrones I proporcional a las densidades de estado respectivas.

Extraccion: Al aplicar una diferencia de potencial tal que $eV \ll -\Delta$ se pueden romper pares de cooper. Un e del par pasa al N y el otro pasa a nivel excitado de cuasipartícula del S.

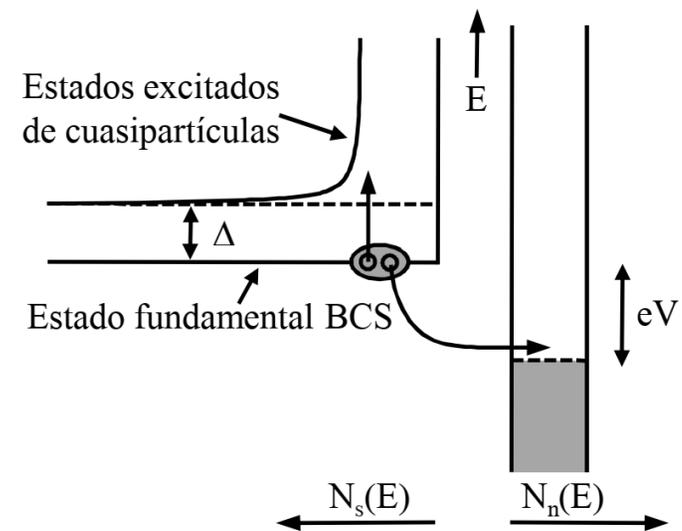
Efecto Tunel metal-superconductor

a) Inyección ($V > 0$)



Habrà corriente de Inyección si hay niveles excitados disponibles. I sera maxima cuando eV este muy cercano a Δ .

b) Extracción ($V < 0$)



Habrà corriente de extracción si hay niveles excitados disponibles para romper el par. I sera maxima cuando eV este muy cercano a $-\Delta$.

I. Gullamon, Tesis Doctoral UAM (2009)

STM y STS: punta normal en muestra superconductora

Expresion para la corriente de efecto tunel suponiendo tunel elastico y distancia suficientemente grande (algunos Å) como para aplicar un desarrollo perturbativo:

$$I = \frac{4\pi e}{\hbar} \int_{-\infty}^{\infty} |M|^2 N_m(E - eV) N_p(E) [f(E - eV) - f(E)] dE$$

N_m y N_p la densidad de estados de muestra y punta.

$f(E, T) = [1 + \exp((E - E_F)/k_B T)]^{-1}$ es la funcion de distribucion de Fermi .

$|M|$ es la matriz de trasmision tunel (overlap de las funciones de onda) que da la probabilidad de trasmision.

$$M = \frac{\hbar^2}{2m} \int_{\Sigma} (\Psi_{\mu}^* \nabla \Psi_{\nu} - \Psi_{\nu} \nabla \Psi_{\mu}^*) d\mathbf{S}$$

$$\begin{cases} \Psi_{\mu} \propto e^{-\kappa z} \\ \Psi_{\nu} \propto e^{-\kappa(d-z)} \end{cases} \quad \kappa = \sqrt{\frac{2m\phi}{\hbar^2}} \approx 0.5\sqrt{\phi} \text{ \AA}^{-1}, \phi \text{ en eV} \quad \Rightarrow \quad I \propto e^{-2\kappa d}$$

Decae en distancias del orden del Å.

STM y STS: punta normal en muestra superconductora

Si la densidad de estados a estudiar esta muy concentrada en energia, suele ser buena aproximacion tomar $|M|$ y N_p como ctes en ese rango, en cuyo caso la expresion de la corriente queda:

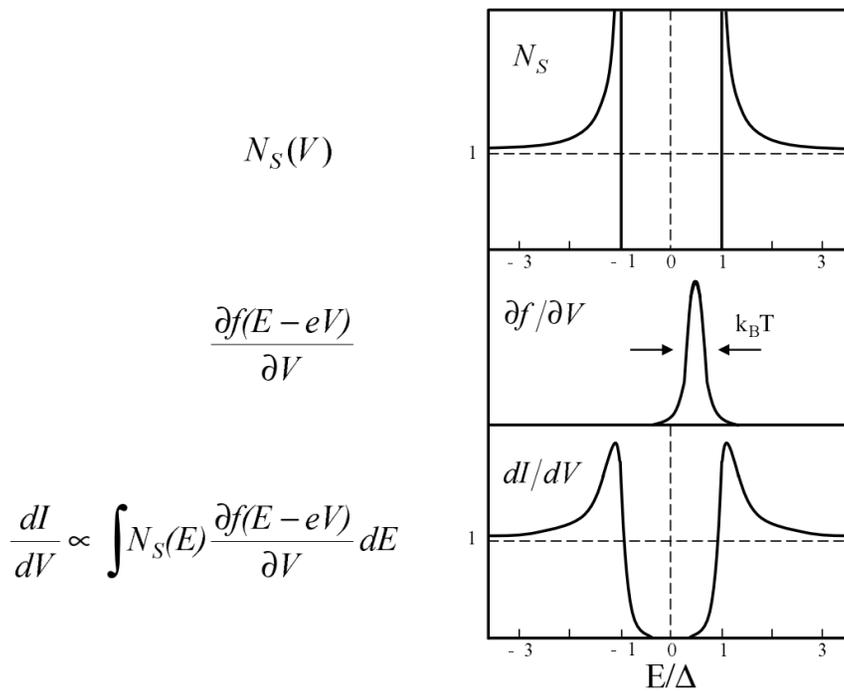
$$I(V) \propto \int_{-\infty}^{\infty} N_S (E - eV) [f(E - eV) - f(E)] dE$$

Conductancia Tunel:

$$\sigma(V) = \frac{dI(V)}{dV} \propto \int_{-\infty}^{\infty} N_S(E) \frac{\partial f(E - eV)}{\partial V} dE$$

La conductancia tunel es proporcional a la convolucion de la densidad de estados superconductora $N_S(E)$ y la derivada de la funcion de Fermi.

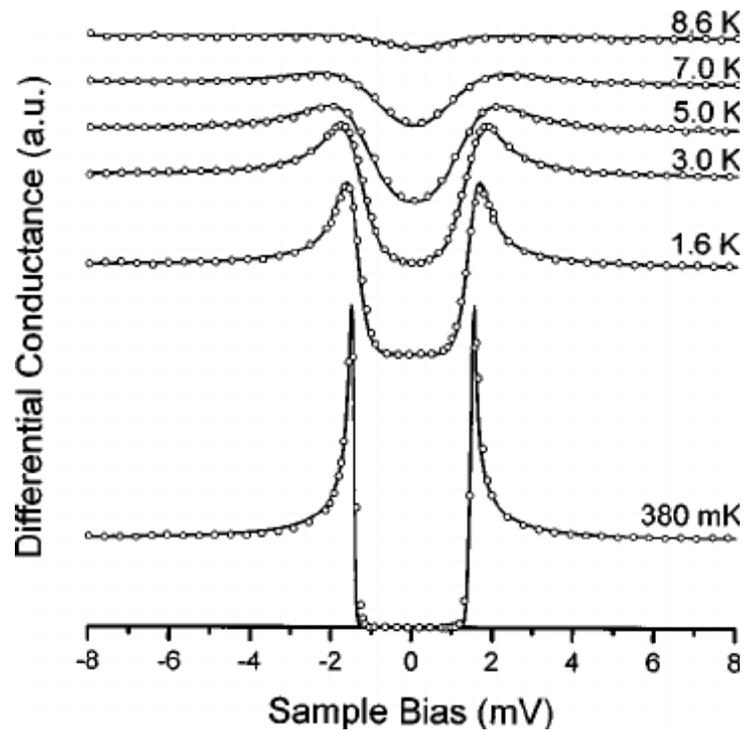
STS: punta normal en muestra superconductora



Conductancia esperada para la medición del gap a bajas temperaturas.

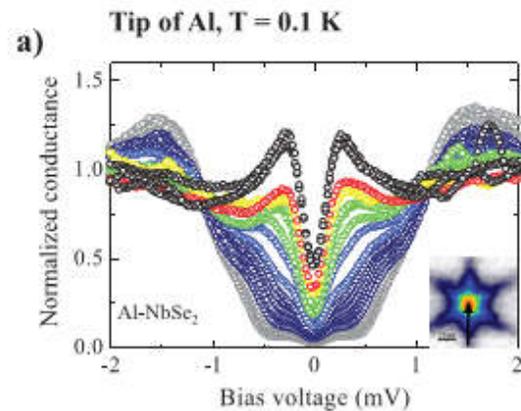
I. Gullamon, Tesis Doctoral UAM (2009)

STS: ejemplos de resultados experimentales

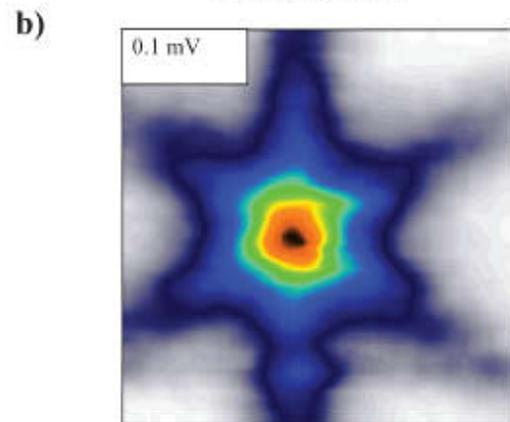


Measured differential conductance spectra (circles) for tunneling between a Nb tip and a Au surface at several temperatures. The spectra are displaced vertically from each other for clarity. The solid lines are the calculated conductance using a BCS DOS with Δ tip (0) \approx 1.47 meV and the temperatures shown. J. C. Davis group (1997)

STS: resultados experimentales en superconductores de tipo II



Dependiendo de la posición de la punta, se miden distintos espectros de energía.
El gap superconductor (gris claro) se va haciendo más chico a medida que se acerca al core del vortice (negro/rojo).



Se ve que el vortice no es redondo!!

Mediciones de STS en NbSe₂ cerca de un vortice: grupo de H. Suderow (UAM) 2009.

STS: resultados experimentales en superconductores de tipo II

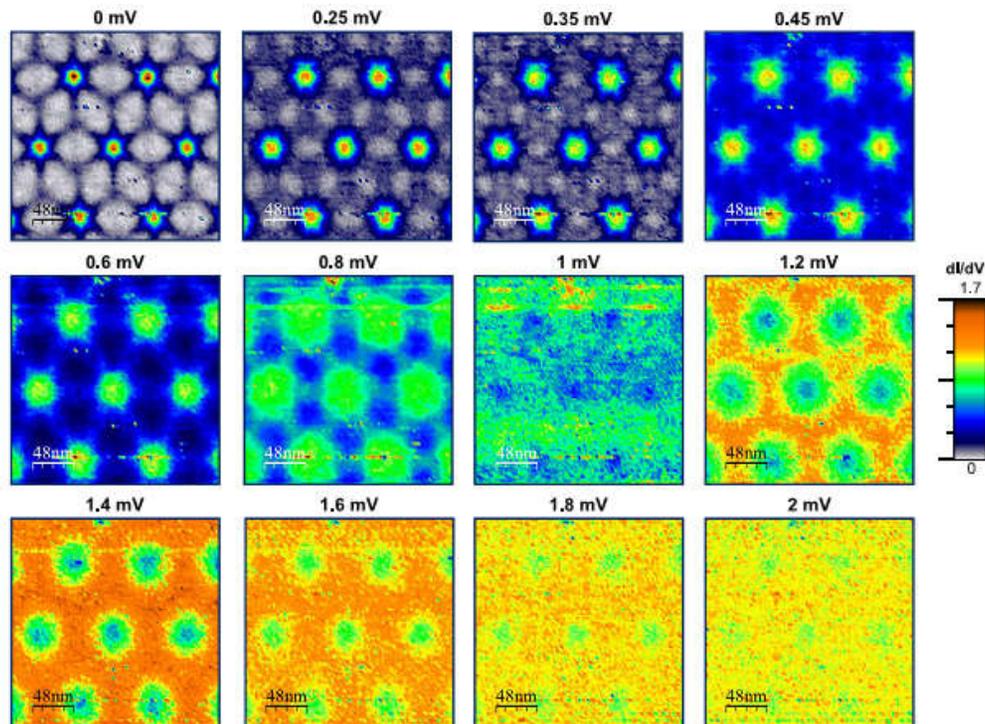


Figure 11. Vortex core structure in 2H-NbSe₂ as a function of the bias voltage. Data are from [181]. A normal tip of Au is used, and the applied magnetic field is 0.15 T.

Se puede ver la red de vortices, y como cambia la forma espacial de la densidad de estados a medida que aumenta el voltaje aplicado.

Mediciones de STS en NbSe₂ : grupo de H. Suderow (UAM) 2009.