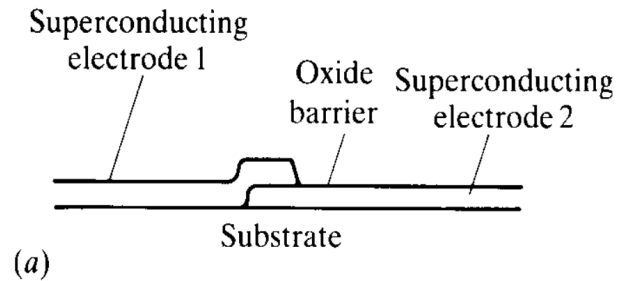


Efecto Josephson

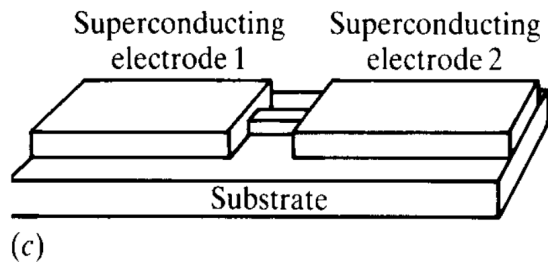
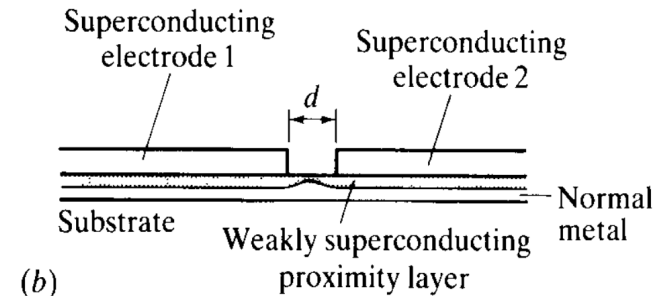
Tuneleo de pares

Tuneleo de pares de Cooper a traves de una barrera no superconductor entre dos S de ancho $d < \lambda$.



(a) SIS:
I Insulator (aislante)
($d \sim 1$ nm):

(b) SNS:
N metal normal (conductor)
($d \sim 10/100$ nm):

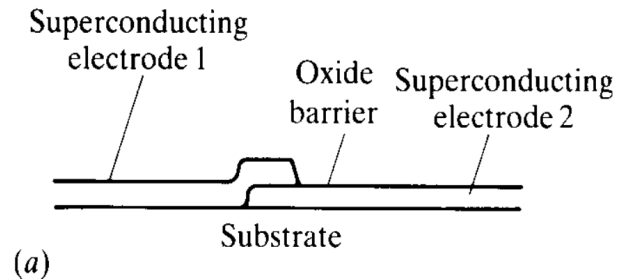


(c) SCS:
C: constriccion del superconductor

- Distintos mecanismos microscopicos
- Misma fenomenología

Tuneleo de pares en junturas SIS

Tuneleo de pares de Cooper a traves de una barrera aislante de ancho $d \ll \xi$.



(a) SIS:
I Insulator (aislante)
($d \sim 1$ nm):

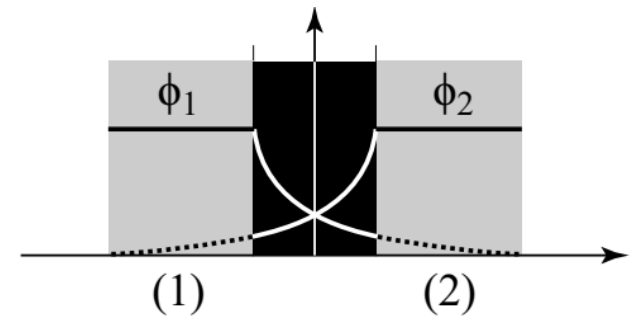
Solución microscópica BCS: Similar al tuneleo normal-superconductor, involucra las densidades de estado $N_S(E)$, las distribuciones de fermi a esa T , y las superposicion de las funciones de onda BCS.

Solución simplificada: Modelo de 2 niveles (Feymann, 1966).

Considera que en cada S hay un unico estado (el fundamental): $|\mathbf{1}\rangle$ y $|\mathbf{2}\rangle$ con energias E_1 y E_2 respectivamente.

En presencia de un acoplamiento K debil, la funcion de onda sera:

$$|\Psi(t)\rangle = \sqrt{n_1(t)} e^{i\theta_1(t)} |\mathbf{1}\rangle + \sqrt{n_2(t)} e^{i\theta_2(t)} |\mathbf{2}\rangle$$



Tuneleo de pares en juntas SIS

Solución simplificada: Modelo de 2 niveles (Feymann, 1966).

Considera que en cada S hay un unico estado (el fundamental): $|\mathbf{1}\rangle$ y $|\mathbf{2}\rangle$ con energias E_1 y E_2 respectivamente.

En presencia de un acoplamiento K debil, la funcion de onda sera:

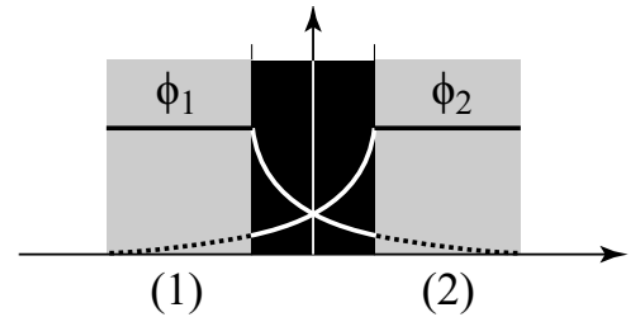
$$|\Psi(t)\rangle = \sqrt{n_1(t)} e^{i\theta_1(t)} |\mathbf{1}\rangle + \sqrt{n_2(t)} e^{i\theta_2(t)} |\mathbf{2}\rangle$$

Con coeficientes $c_1(t) = \sqrt{n_1(t)} e^{i\theta_1(t)}$ y $c_2(t) = \sqrt{n_2(t)} e^{i\theta_2(t)}$

La ecuacion de Shoedinger del Hamiltoniano con acoplamiento queda:

$$\begin{pmatrix} E_1 & -K \\ -K & E_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \sqrt{n_1(t)} e^{i\theta_1(t)} \\ \sqrt{n_2(t)} e^{i\theta_2(t)} \end{pmatrix} = i\hbar \frac{d}{dt} \begin{pmatrix} \sqrt{n_1(t)} e^{i\theta_1(t)} \\ \sqrt{n_2(t)} e^{i\theta_2(t)} \end{pmatrix}.$$

Caso particular de dos superconductores iguales (mismo material). Si no aplicamos ningun V : $E_1 = E_2 = E$

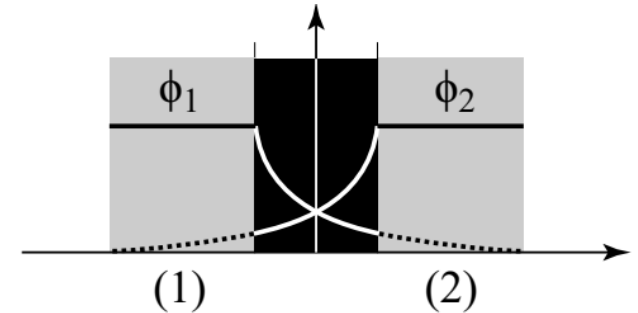


Tuneleo de pares en junturas SIS

Solución simplificada: Modelo de 2 niveles (Feymann, 1966).

$$|\Psi(t)\rangle = \sqrt{n_1(t)} e^{i\theta_1(t)} |\mathbf{1}\rangle + \sqrt{n_2(t)} e^{i\theta_2(t)} |\mathbf{2}\rangle$$

$$\left(\begin{array}{l} |\Psi(t)\rangle = \sqrt{n_1(t)} e^{i\theta_1(t)} |\mathbf{1}\rangle + \sqrt{n_2(t)} e^{i\theta_2(t)} |\mathbf{2}\rangle \\ \left(\begin{array}{l} \sqrt{n_1(t)} e^{i\theta_1(t)} \\ \sqrt{n_2(t)} e^{i\theta_2(t)} \end{array} \right) \end{array} \right)^{1(t)}$$



Caso particular de dos superconductores iguales (mismo material). Si no aplicamos ningun V : $E_1 = E_2 = E$

Aplicamos diferencia de potencial V , de forma que $E_1 - E_2 = 2eV \Rightarrow E_1 = E + eV \quad E_2 = E - eV$

Poniendo el cero de energia en $E = 0$, quedan las ecuaciones:

$$\frac{dn_1}{dt} = -\frac{dn_2}{dt} = \frac{2}{\hbar} K \sqrt{n_1 n_2} \sin(\theta_1 - \theta_2)$$

Corriente de pares de cooper, no aparece V !

$$\frac{d\theta_1}{dt} = \frac{K}{\hbar} \sqrt{\frac{n_2}{n_1}} \cos(\theta_1 - \theta_2) + \frac{eV}{\hbar}$$

$$\frac{d\theta_2}{dt} = \frac{K}{\hbar} \sqrt{\frac{n_1}{n_2}} \cos(\theta_1 - \theta_2) - \frac{eV}{\hbar}$$

Efecto Josephson

$$E_1 = eV \quad E_2 = -eV$$

$$\frac{dn_1}{dt} = -\frac{dn_2}{dt} = \frac{2}{\hbar} K \sqrt{n_1 n_2} \sin(\theta_1 - \theta_2)$$

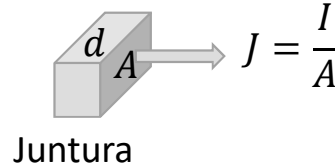
$$\frac{d\theta_1}{dt} = \frac{K}{\hbar} \sqrt{\frac{n_2}{n_1}} \cos(\theta_1 - \theta_2) + \frac{eV}{\hbar}$$

$$\frac{d\theta_2}{dt} = \frac{K}{\hbar} \sqrt{\frac{n_1}{n_2}} \cos(\theta_1 - \theta_2) - \frac{eV}{\hbar}$$

La cantidad de pares que tunelean es insignificante frente a la cantidad total $\Rightarrow \sqrt{n_1} \sqrt{n_2} \sim n$ y $\frac{\sqrt{n_1}}{\sqrt{n_2}} \sim 1$.

$\Theta = \Theta_{1,2} = \theta_1 - \theta_2$ la diferencia relativa de fases

$$I_{1 \rightarrow 2} = -2e A d \frac{dn_1}{dt} \quad J = -2ed \frac{dn}{dt}$$



$$\frac{d\Theta}{dt} = \frac{2eV}{\hbar}$$

General

Modelo dos niveles juntura SIS

$$J = -\frac{4edK}{\hbar} n \sin\Theta$$

$$J = cte n \sin\Theta$$

$$J = J_c \sin\Theta$$

Donde J_c es la maxima J que puede pasar por la juntura.

General

Efecto Josephson DC: entre dos superconductores cuyas funciones de onda (parametro de orden en GL) tienen una fase relativa Θ no nula hay una corriente neta de pares .

Efecto Josephson DC

$$V = 0 \quad \frac{d\Theta}{dt} = \frac{2eV}{\hbar} = 0$$

$$J = J_c \sin\Theta$$

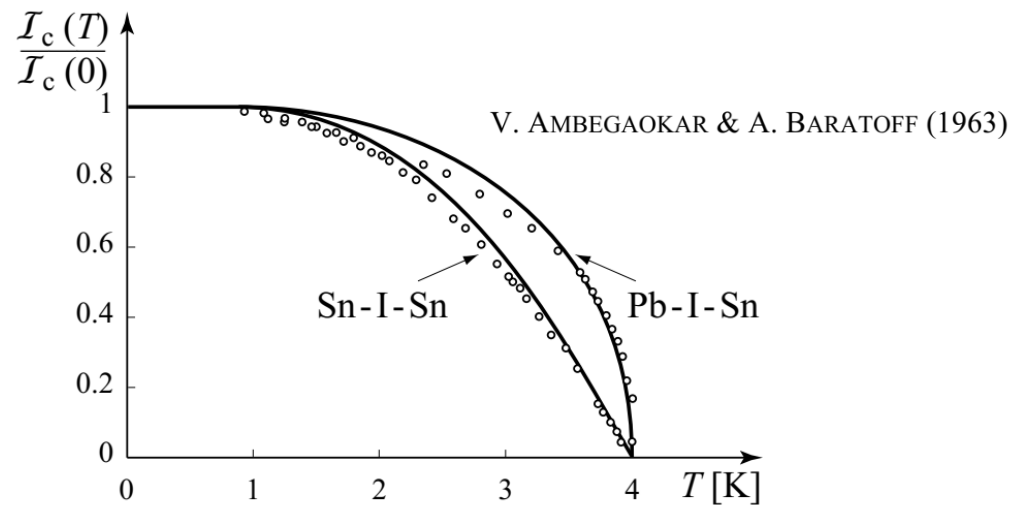
$$I = I_c \sin\Theta$$

Corriente continua, que depende de la fase relativa y no puede superar I_c (característica de la juntura).

De BCS sale, bajo ciertas aproximaciones que, si la resistencia de la juntura en el estado normal es R_n , en una SIS:

$$I_c(T) = \frac{\pi\Delta(T)}{2eR_n} \tanh\left(\frac{\Delta(T)}{2kT}\right)$$

$$I_c(T = 0) = \frac{\pi\Delta(0)}{2eR_n}$$



Efecto Josephson AC

$$V \neq 0 \quad \frac{d\Theta}{dt} = \frac{2eV}{\hbar} \quad \Rightarrow \quad \Theta(t) = \Theta_0 + \frac{2eV}{\hbar} t$$

$$J = J_c \sin(\Theta(t)) = J_c \sin\left(\Theta_0 + \frac{2eV}{\hbar} t\right)$$

$$J = J_c \sin(\Theta_0 + \omega t)$$

$$\omega = \frac{2eV}{\hbar}$$

Si se aplica una tensión V se genera una corriente alterna, de frecuencia proporcional a V y a una cte universal ω_j .

Frecuencia Josephson

$$\omega_j = \frac{2e}{\hbar} \sim 3.04 \cdot 10^9 \text{ Hz}/\mu\text{V}$$

$$f_j = \frac{2e}{h} \sim 483 \text{ MHz}/\mu\text{V}$$

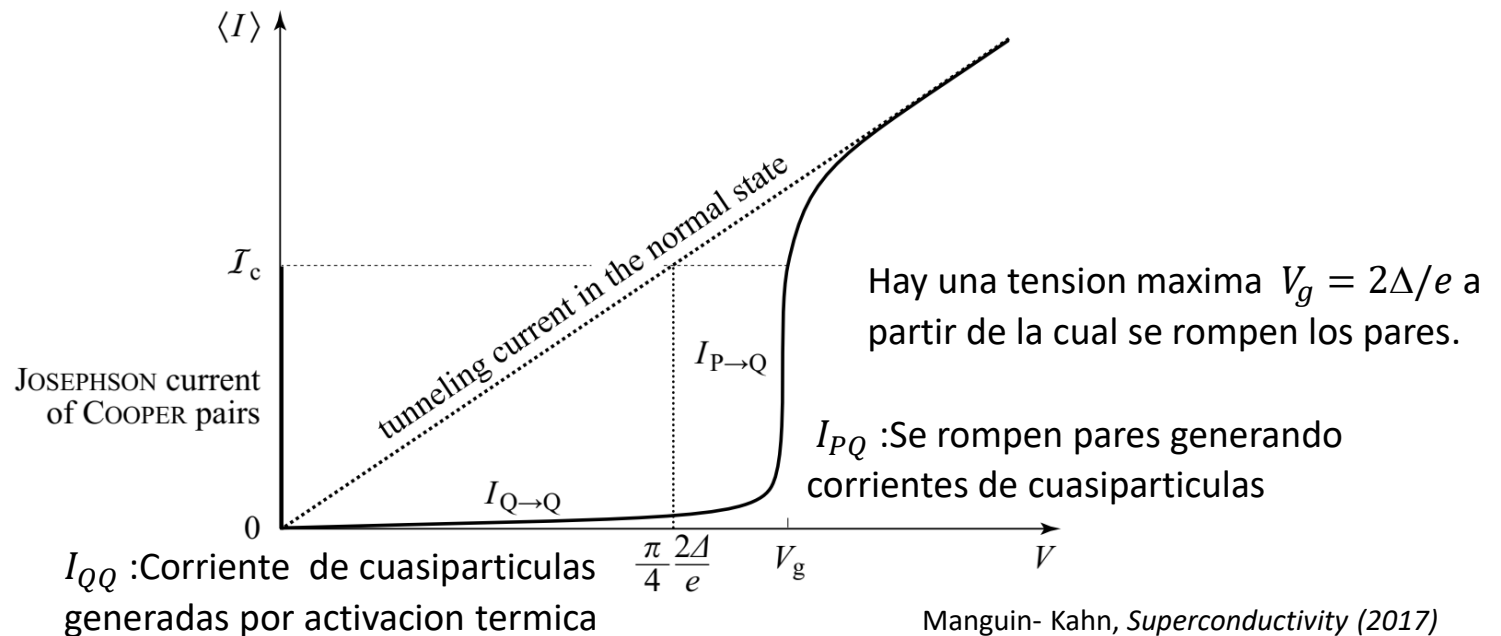
Definición del Volt (1990): es el voltaje que genera en una juntura Josephson una frecuencia: $\frac{2e}{h} = 483597.9 \text{ GHz}$

Junturas Josephson (JJ)

Dado que la relacion $I(V)$ es no lineal, el comportamiento es muy distinto si se controla V o I .

Junturas conectadas a una fuente de Tension: controlo V y la corriente se acomoda al voltaje.

- Aparecen juntos el efecto Josephson AC y DC. Si integramos en tiempos mayores que $1/f_j$ vemos solo la continua



Curva $I(V)$ a T baja, a tiempos caracteristicos mayores a $1/f_j$.

Junturas Josephson

Junturas conectadas a una fuente de Tension: controlo V y la corriente se acomoda al voltaje.

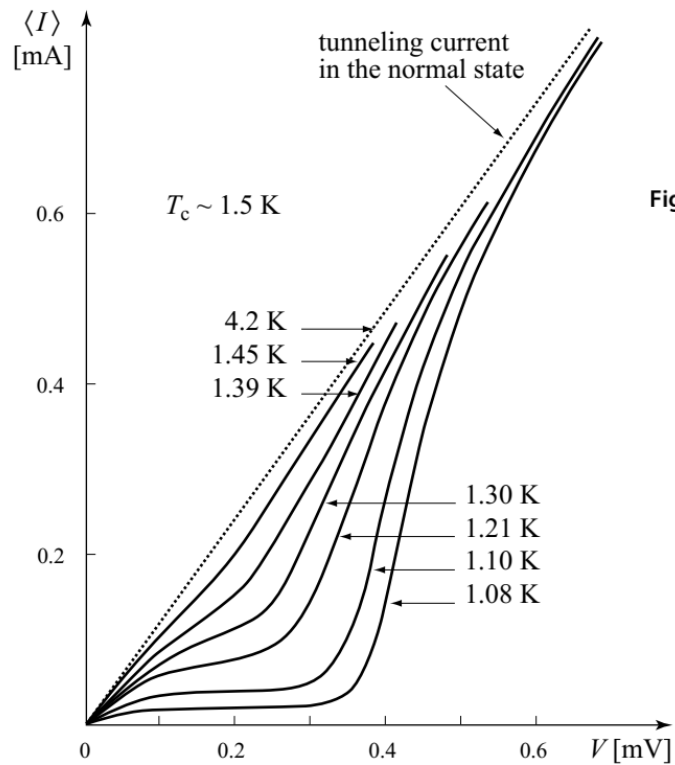


Figure 10.5 - Tunneling current across an Al/Al₂O₃/Al junction as a function of temperature⁶

When the temperature increases, the density of quasiparticles grows and the gap voltage decreases. The two contributions $I_{Q \rightarrow Q}$ and $I_{P \rightarrow Q}$ are no longer independent, and are more and more difficult to identify separately. For any voltage V , the conductance tends towards that of the junction for the normal state. During these measurements, the transition temperature of the Al/Al₂O₃/Al junction has been estimated as $T_c = 1.5$ K and the gap voltage at zero temperature $V_g(0) = 0.42$ mV.

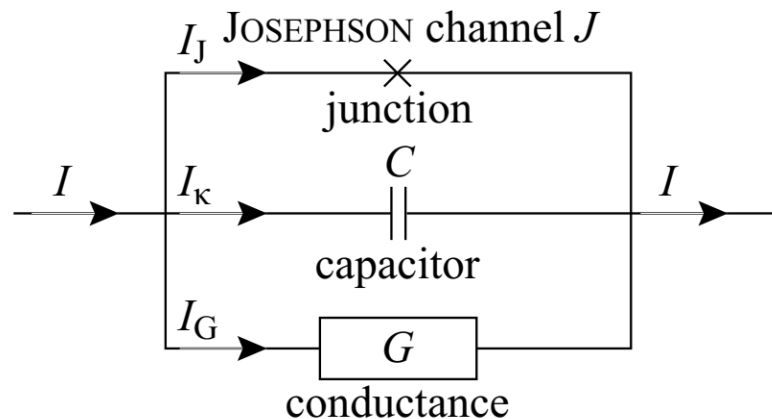
Manguin- Kahn, *Superconductivity* (2017)

Junturas Josephson: modelo *RCSJ*

Junturas conectadas a una fuente de corriente: controlo I y la tension V se acomoda.

Una juntura real tiene, ademas del canal Josephson (J):

- Una capacidad debida a la acumulacion de cargas en la cara de las junturas (C)
- Una resistencia (R) o Conductancia (G) debidad a la conduccion disipativa de las cuasiparticulas.
- La I que controlo es la total, pero no controlo que corriente pasa efectivamente por la juntura.



$$I = I_J + I_G + I_K$$

$$I_J = \mathcal{I}_c \sin \Theta(t)$$

$$I_G = GV(t)$$

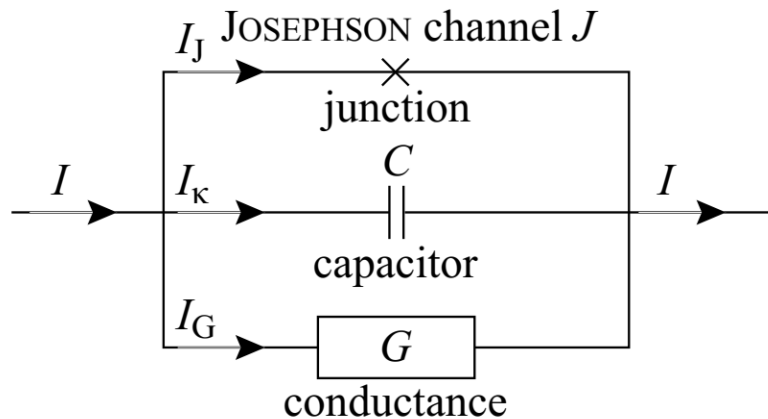
$$I_K = C \frac{dV(t)}{dt}$$

$$V = \frac{\hbar}{2e} \frac{d\Theta(t)}{dt}$$

Analogo a un pendulo al que se le aplica un torque externo

$$I(t) = \frac{\hbar C}{2e} \frac{d^2\Theta(t)}{dt^2} + \frac{\hbar G}{2e} \frac{d\Theta(t)}{dt} + \mathcal{I}_c \sin \Theta(t)$$

Junturas Josephson: modelo *RCSJ*: frecuencia de plasma



$$I = I_J + I_G + I_c$$

$$I(t) = \frac{\hbar C}{2e} \frac{d^2\Theta(t)}{dt^2} + \frac{\hbar G}{2e} \frac{d\Theta(t)}{dt} + I_c \sin\Theta(t)$$

1) $I \sim 0$ y G chica (T baja): $0 = \frac{\hbar C}{2e} \frac{d^2\Theta(t)}{dt^2} + I_c \Theta(t)$ La fase relativa oscila con: $\omega_p = \sqrt{\frac{2e I_c}{\hbar C}}$. $\langle V \rangle = 0$

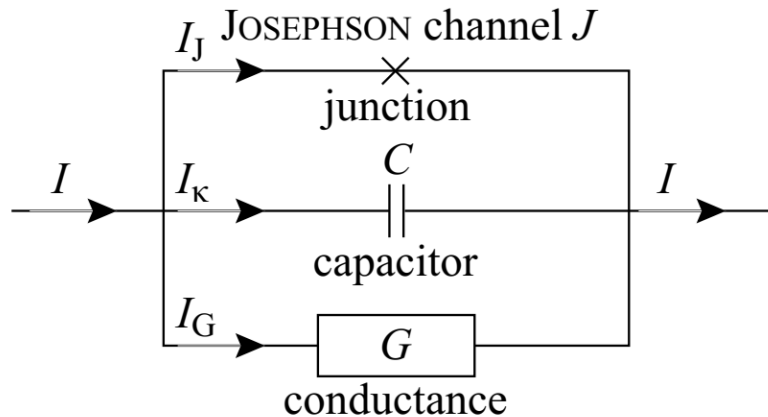
2) $I \neq 0$: Defino un tiempo adimensional en unidades de ω_p : $\tau = \omega_p t$, con lo que queda:

$$\frac{I}{I_c} = \frac{d^2\Theta}{d\tau^2} + \frac{1}{Q} \frac{d\Theta}{d\tau} + \sin\Theta$$

Con $Q^2 = \beta = \frac{2eCR^2}{\hbar} I_c$

Parametro de Stewart-McCumber

Junturas Josephson: modelo $RCSJ$: regimenes superconductor/normal



$$\frac{I}{I_c} = \frac{d^2\Theta}{d\tau^2} + \frac{1}{Q} \frac{d\Theta}{d\tau} + \sin\Theta$$

$$V = \frac{\hbar}{2e} \frac{d\Theta(t)}{dt} = \frac{I_c}{C\omega_p^2} \frac{d\Theta}{d\tau}$$

$$Q^2 = \beta = \frac{2eCR^2}{\hbar} I_c$$

$$\tau = \omega_p t$$

$$\omega_p = \sqrt{\frac{2eI_c}{\hbar C}}$$

- $I < I_c$:

Existe una solución estacionaria:

$$I = I_c \sin\Theta$$

$$V = 0$$

Toda la corriente pasa por la juntura y no hay disipación.

No es la única solución, el comportamiento puede depender de las condiciones iniciales.

- $I \gg I_c$:

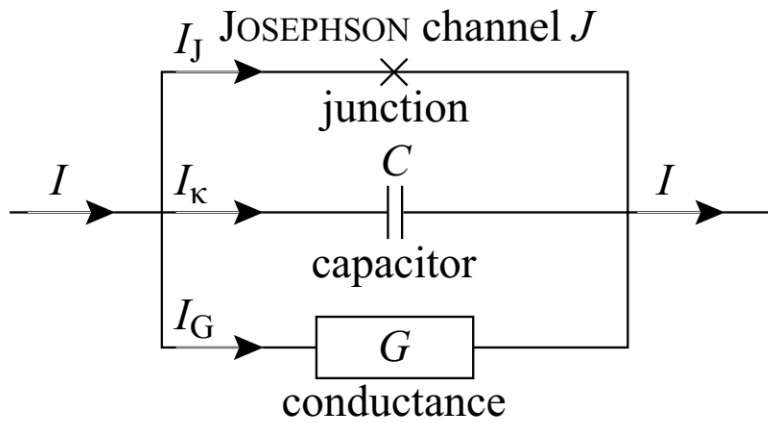
Desprecia $\sin\Theta$

Queda un circuito RC paralelo

En el estacionario con corriente continua:

$$I = \frac{V}{R}$$

Junturas Josephson: modelo $RCSJ$: regimen sobreamortiguado



$$\frac{I}{I_c} = \frac{d^2\Theta}{d\tau^2} + \frac{1}{Q} \frac{d\Theta}{d\tau} + \sin\Theta$$

$$V = \frac{\hbar}{2e} \frac{d\Theta(t)}{dt} = \frac{I_c}{C\omega_p^2} \frac{d\Theta}{d\tau}$$

$$Q^2 = \beta = \frac{2eCR^2}{\hbar} I_c$$

$$\tau = \omega_p t$$

$$\omega_p = \sqrt{\frac{2eI_c}{\hbar C}}$$

- $Q \ll 1$: Regimen sobreamortiguado (C muy chico)

$$\frac{I}{I_c} = \frac{1}{Q} \frac{d\Theta}{d\tau} + \sin\Theta \Rightarrow \frac{d\Theta}{d\tau} = \left(\frac{I}{I_c} - \sin\Theta \right) \frac{2eI_c R}{\hbar}$$

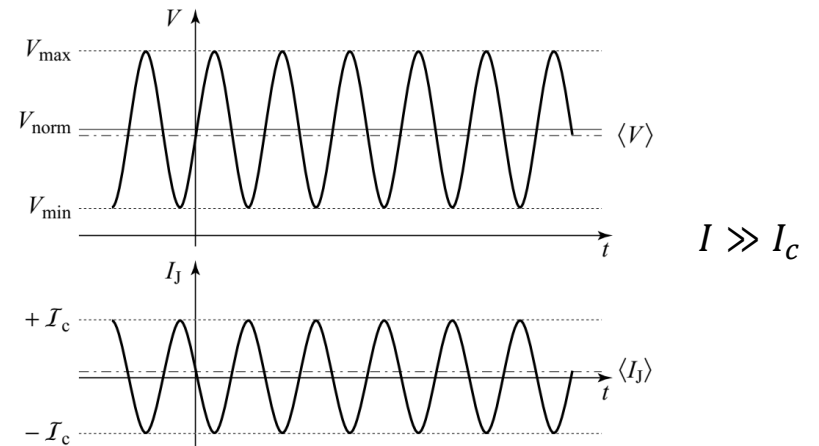
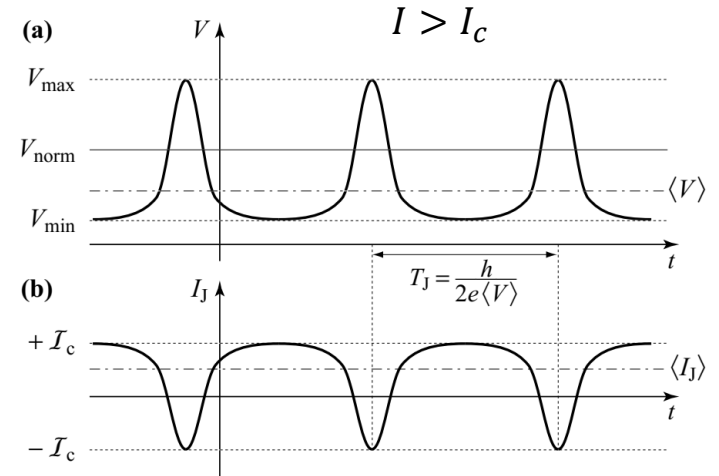
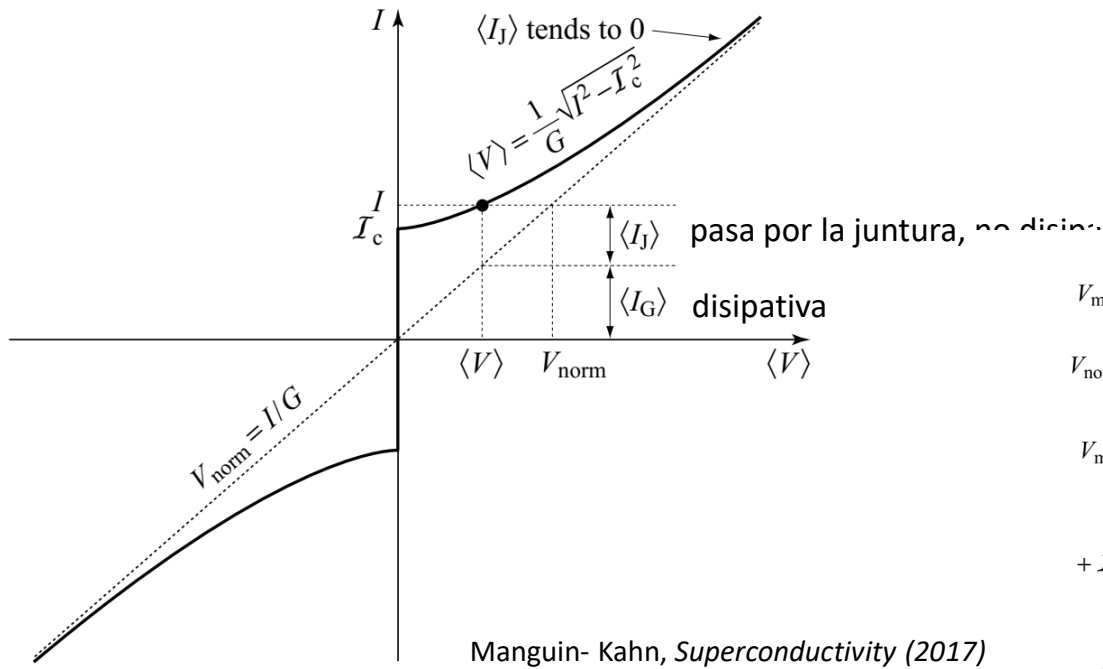
$$I > I_c \Rightarrow \frac{d\Theta}{d\tau} > 0 \Rightarrow V > 0 \quad \text{y ademas oscila con } \omega = \frac{2e}{\hbar} \langle V \rangle$$

Se puede ver que:

$$\langle V \rangle = R(I^2 - I_c^2)^{\frac{1}{2}}$$

Junturas Josephson sobreamortiguadas ($Q \ll 1$)

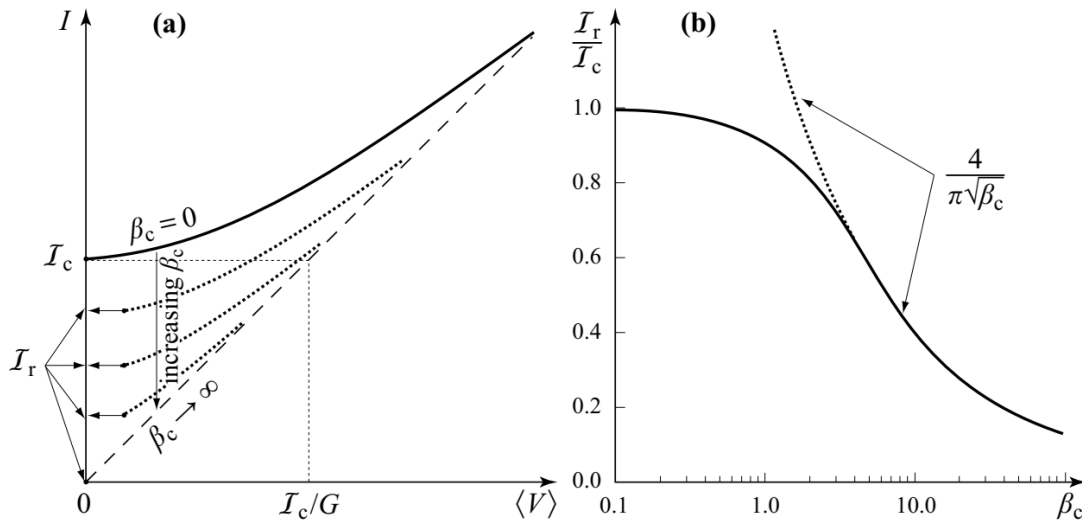
$$\frac{d\Theta}{d\tau} = \left(\frac{I}{I_c} - \sin \Theta \right) \frac{2eI_c R}{\hbar}$$



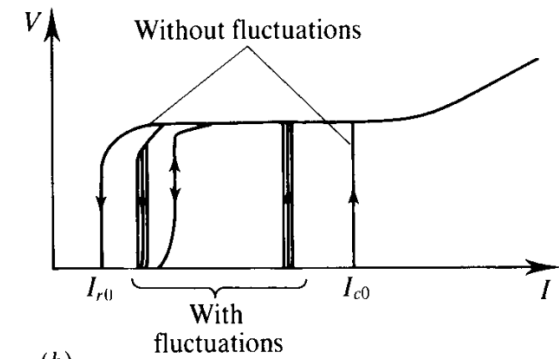
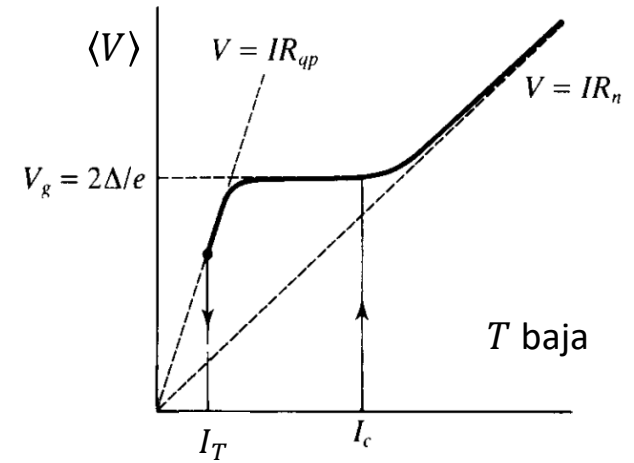
Juntas Josephson subamortiguadas ($Q \neq 0$)

Las soluciones son numericas. Hay histeresis.

Tinkham, *introduction to uperconductivity*



Manguin- Kahn, *Superconductivity (2017)*



Curvas con corriente descendente: sigue habiendo disipacion hasta $I_T < I_c$

Figure 10.12 presents schematically a typical JOSEPHSON junction used as a voltage standard.¹⁰

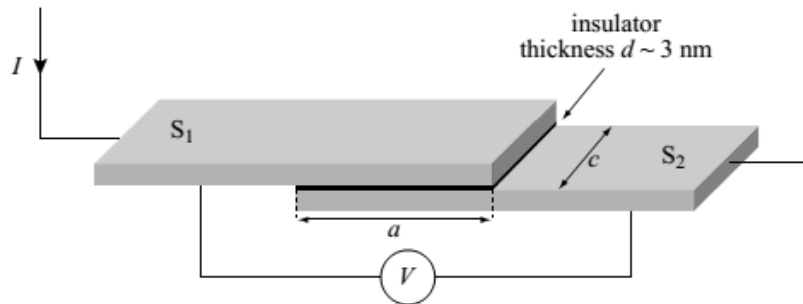


Figure 10.12 - Schematic image of a typical SIS junction

It is formed by two superconducting films of width *c*, that are superimposed for a length *a* over which they are separated by an insulator of thickness *d* ~ 3 nm.

Junturas Josephson reales

Tipicas JJ usadas para metrologia

- » Nb/Al₂O₃/Nb¹⁰ (niobium gap: $\Delta = 1.5$ meV) $c = 30$ μm and $a = 18$ μm
This junction displays a critical intensity $I_c \approx 110$ μA , or a critical current density $f_c = I_c/ca \approx 20$ A cm^{-2} and a resistance \mathcal{R}_n of order 20 Ω ;
- » Al/Al₂O₃/Al¹¹ (aluminum gap: $\Delta = 0.175$ meV) $d \sim 2$ nm
For a cross-section ≈ 2 μm^2 , $\mathcal{R}_n \approx 100$ Ω and $I_c \approx 2$ μA .
For a cross-section ≈ 0.02 μm^2 , $\mathcal{R}_n \approx 10$ $\text{k}\Omega$ and $I_c \approx 20$ nA.
So for this type of junction a critical current density $f_c \approx 200$ A cm^{-2} ;
- » Nb/AlO_x/Nb
These junctions can attain critical current densities of the order of $f_c \approx 1$ to 10 kA cm^{-2} for cross-sections of a few μm^2 .

Junturas Josephson reales: SNS

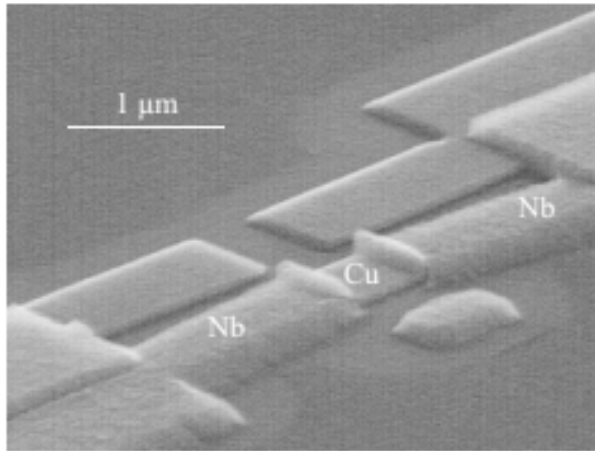


Figure 10.18

Nb/Cu/Nb junction

Junction obtained by deposition at different incident angles with a suspended mask. The technique inherently produces some replicas as well as the Nb/Cu/Nb junction, but being disconnected from the sample they are of no consequence. [From DUBOS *et al.*, 2001, © The American Physical Society, with permission]²⁵

To ensure the contact between metals, the niobium covered the copper at each of its extremities over a distance of 150 nm. Typically, when the distance between the niobium electrodes was 500 nm, a resistance $\mathcal{R}_n \approx 0.20 \Omega$ and a critical current $I_c \approx 1.2 \text{ mA}$ were found.²⁵

**Que pasa si conectamos una tension
alterna a una Juntura Josephson?**

**Que pasa si conectamos
dos JJ en paralelo?**

Continuará