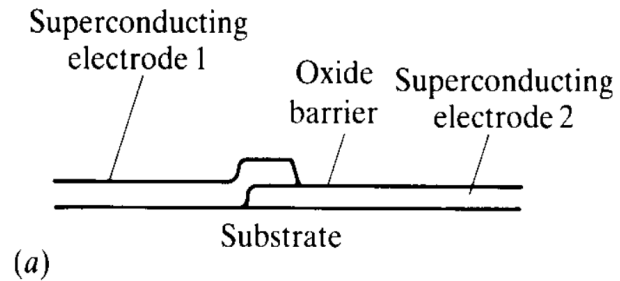


Junturas Josephson II

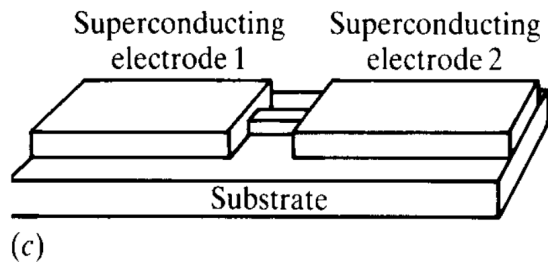
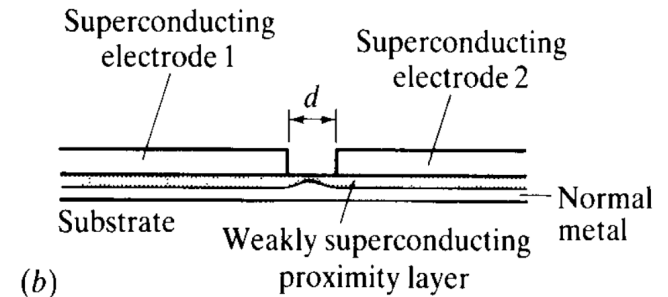
Repaso

Tunelamiento de pares de Cooper a través de una barrera no superconductora entre dos S de ancho $d < \lambda$.



(a) SIS:
I Insulator (aislante)
($d \sim 1$ nm):

(b) SNS:
N metal normal (conductor)
($d \sim 10/100$ nm):



(c) SCS:
C: constricción del superconductor

- Distintos mecanismos microscópicos
- Misma fenomenología

Repaso

Modelo dos niveles juntura SIS: $J = -\frac{4edK}{\hbar} n \sin\Theta$

$$J = J_c \sin\Theta$$

$$I = I_c \sin\Theta$$

Efecto Josephson DC

En general:

$$\frac{d\Theta}{dt} = \frac{2eV}{\hbar}$$

$$J = J_c \sin(\Theta_0 + \omega t)$$

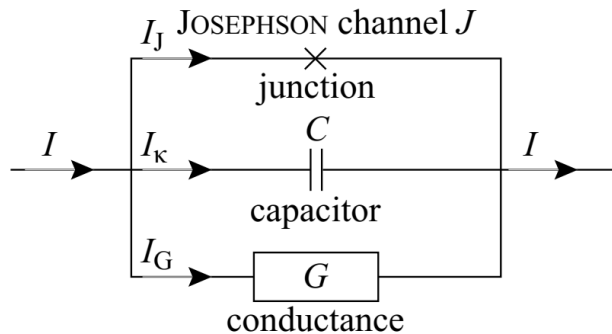
$$\omega = \frac{2eV}{\hbar}$$

Efecto Josephson AC

$$f_j = \frac{2e}{h} \sim 483 \text{ MHz}/\mu\text{V}$$

$$\omega_j = \frac{2e}{\hbar} \sim 3.04 \cdot 10^9 \text{ Hz}/\mu\text{V}$$

Modelo RCSJ:



$$\frac{I}{I_c} = \frac{d^2\Theta}{d\tau^2} + \frac{1}{Q} \frac{d\Theta}{d\tau} + \sin\Theta$$

$$Q^2 = \beta = \frac{2eCR^2}{\hbar} I_c$$

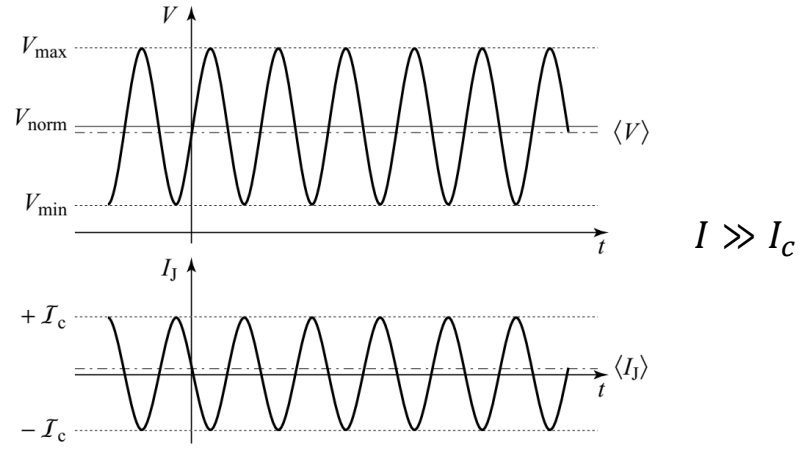
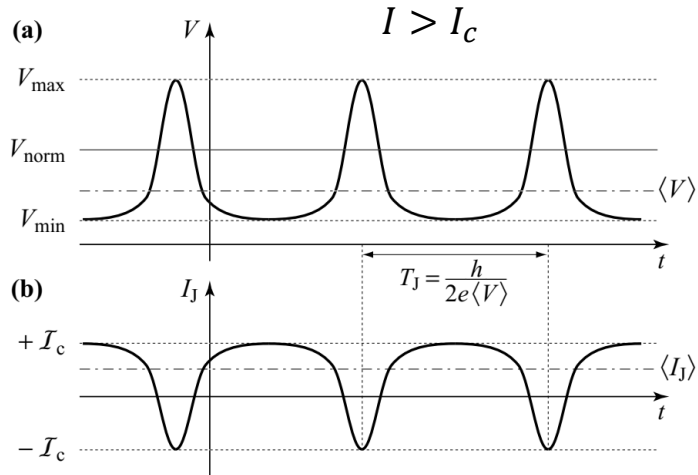
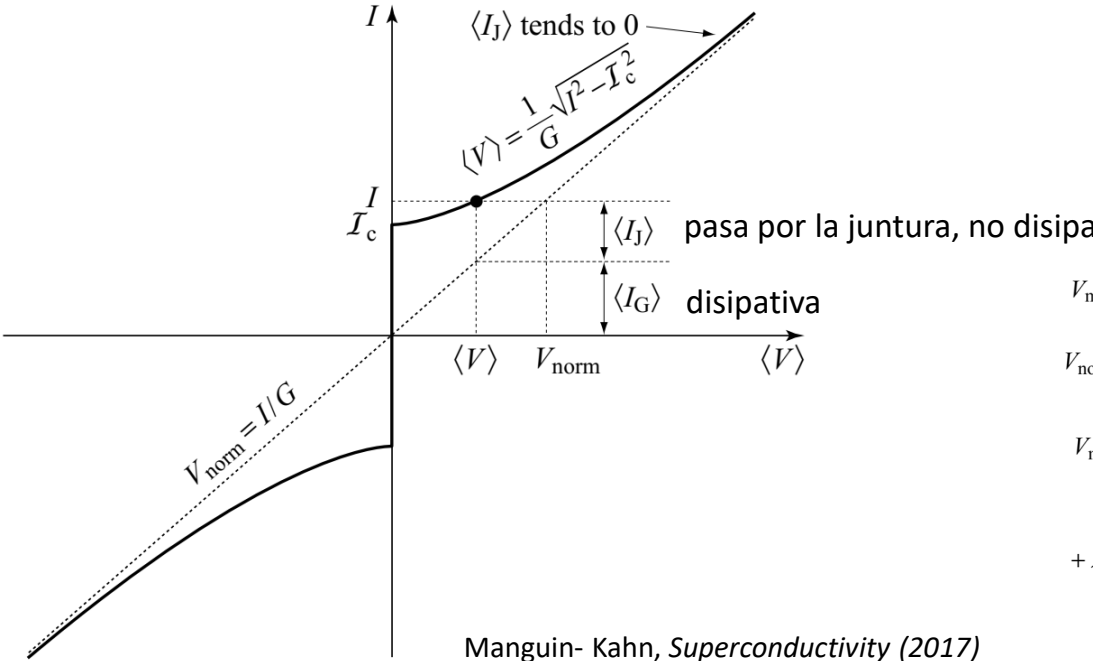
$$V = \frac{\hbar}{2e} \frac{d\Theta(t)}{dt} = \frac{I_c}{C\omega_p^2} \frac{d\Theta}{d\tau}$$

$$\tau = \omega_p t$$

$$\omega_p = \sqrt{\frac{2eI_c}{\hbar C}}$$

Repaso: Junturas Josephson sobreamortiguadas ($Q \ll 1$)

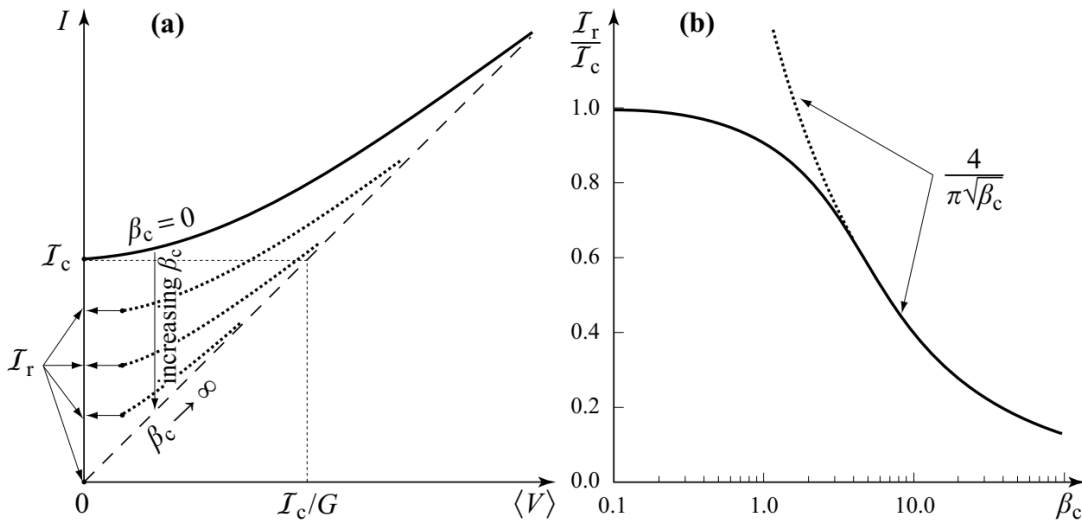
$$\frac{I}{I_c} = \frac{d^2\Theta}{d\tau^2} + \frac{1}{Q} \frac{d\Theta}{d\tau} + \sin\Theta \quad \frac{d\Theta}{d\tau} = \left(\frac{I}{I_c} - \sin\Theta \right) \frac{2eI_c R}{\hbar}$$



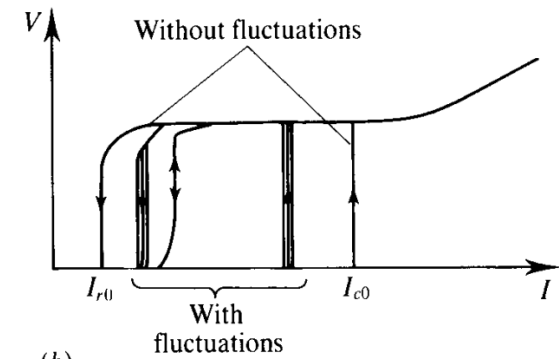
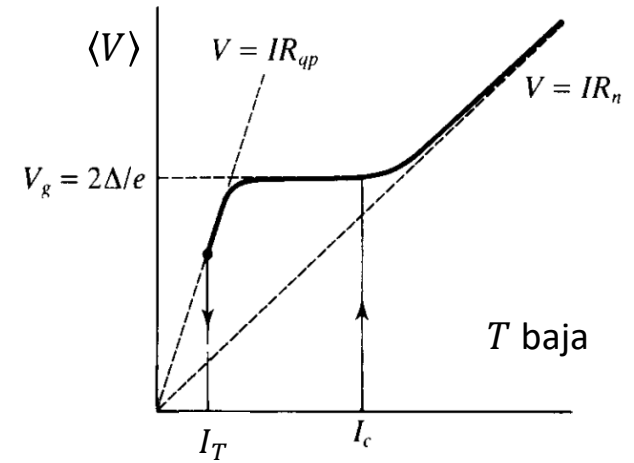
Repaso: Junturas Josephson subamortiguadas ($Q \neq 0$)

Las soluciones son numericas. Hay histeresis.

Tinkham, *introduction to superconductivity*



Manguin- Kahn, *Superconductivity (2017)*



Curvas con corriente descendente: sigue habiendo disipacion hasta $I_T < I_c$

**Que pasa si conectamos una tension
alterna a una Juntura Josephson?**

Salto de Shapiro

Junturas Josephson sometidas a una diferencia de potencial $V(t)$

$$\frac{d\Theta}{dt} = \frac{2eV(t)}{\hbar}$$

Si las frecuencias son bajas comparadas con las frecuencias características de la juntura, la JJ se comporta a cada instante como si la tensión instantánea $V(t)$ fuera continua.

Si se la somete a frecuencias altas (Por ejemplo irradiamos una JJ conectada a una tensión continua V con una onda electromagnética):

$$V(t) = V + v \cos(\omega_0 t + \varphi)$$

$$\frac{d\Theta}{dt} = \frac{2e}{\hbar} V + \frac{2e}{\hbar} v \cos(\omega_0 t + \varphi) \quad \Rightarrow \quad \Theta(t) = \frac{2e}{\hbar} V t + \frac{2e}{\hbar \omega_0} v \sin(\omega_0 t + \varphi) + \Theta(0).$$

$$I = I_c \sin \Theta(t) = I_c \sin \left[\frac{2e}{\hbar} V t + \frac{2e}{\omega_0 \hbar} v \sin(\omega_0 t + \varphi) + \Theta(0) \right]$$

Se puede ver que:

$$I = I_c \sum_{n=0}^{n=\infty} (-1)^n \mathcal{J}_n \left(\frac{2e}{\hbar \omega_0} v \right) \sin \left[\left(\frac{2e}{\hbar} V \pm n \omega_0 \right) t + \delta_n \right] \quad \mathcal{J}_n \text{ son las funciones enteras de Bessel}$$

Suma de ondas de alta frecuencia con valor de continua nulo? NO SIEMPRE

Junturas Josephson sometidas a una onda de alta frecuencia

$$V(t) = V + v \cos(\omega_0 t + \varphi)$$

$$I = I_c \sum_{n=0}^{n=\infty} (-1)^n \mathcal{J}_n \left(\frac{2e}{\hbar \omega_0} v \right) \sin \left[\left(\frac{2e}{\hbar} V \pm n \omega_0 \right) t + \delta_n \right] \quad \mathcal{J}_n \text{ son las funciones enteras de Bessel}$$

Si $\frac{2e}{\hbar} V \pm n \omega_0 = 0$ aparece una componente continua de la corriente

Entonces, si la tensión continua aplicada al sistema toma los valores $V_n = n \frac{\hbar \omega_0}{2e}$ (por ej, si $\omega_0 = 10$ GHz, $V_1 = 3 \mu\text{V}$)

Va a haber un efecto Josephson DC asociado. El efecto Josephson DC a $V = 0$ es un caso particular con $n = 0$

Si además les sumamos la componente de la corriente normal: $I_n = \frac{V_n}{R}$

$$V_n R - I_c \mathcal{J}_n \left(\frac{2e}{\hbar \omega_0} v \right) \leq I \leq V_n R + I_c \mathcal{J}_n \left(\frac{2e}{\hbar \omega_0} v \right) \quad \Delta I = \pm I_c \mathcal{J}_n \left(\frac{2e}{\hbar \omega_0} v \right) \text{ dependiendo del valor de } \delta_n$$

Saltos de Shapiro

$$V(t) = V + v \cos(\omega_0 t + \varphi)$$

$$V_n R - I_c \mathcal{J}_n\left(\frac{2e}{\hbar\omega_0} v\right) \leq I \leq V_n R + I_c \mathcal{J}_n\left(\frac{2e}{\hbar\omega_0} v\right)$$

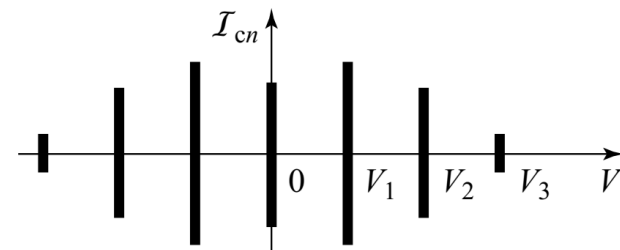
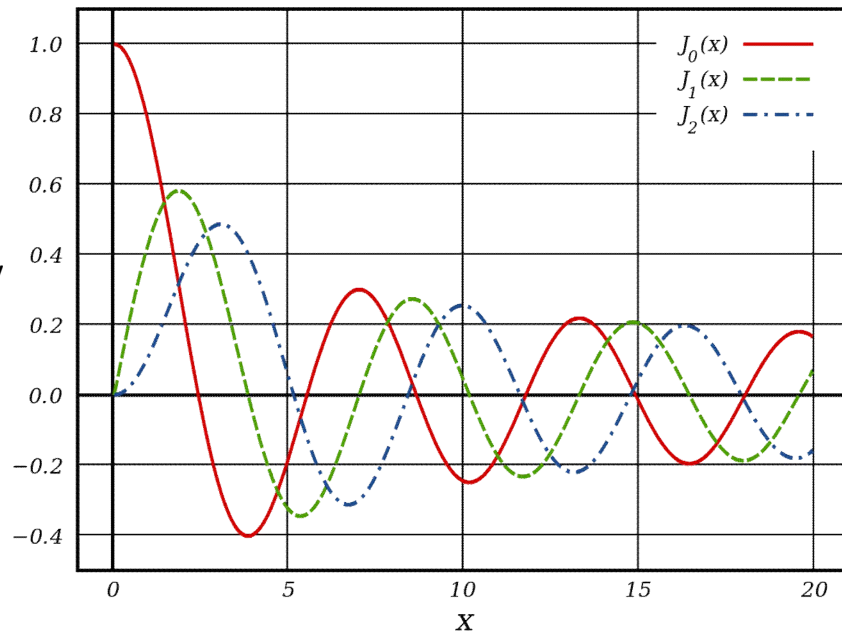
$$\Delta I = \pm I_c \mathcal{J}_n\left(\frac{2e}{\hbar\omega_0} v\right)$$

$$x = \frac{2e}{\hbar\omega_0} v$$

Hay una I continua adicional en la juntura cuando $V = V_n$

El peso de cada componente depende de v .

Si v es muy chico solo pesa \mathcal{J}_0



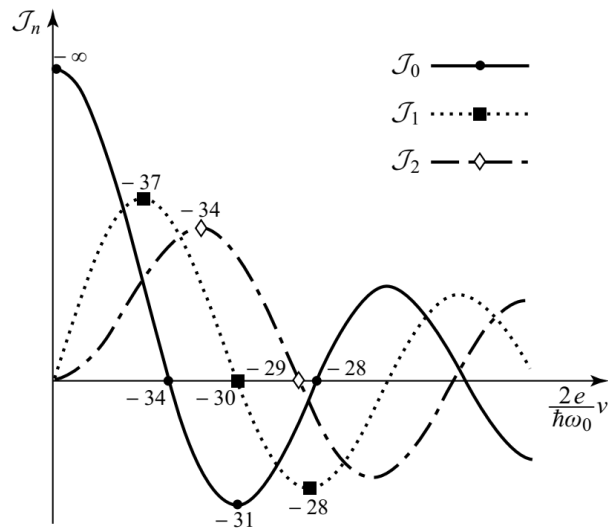
Saltos de Shapiro

$$V(t) = V + v \cos(\omega_0 t + \varphi)$$

$$\Delta I = \pm I_c \mathcal{J}_n \left(\frac{2e}{\hbar \omega_0} v \right) \quad V_n = n \frac{\hbar \omega_0}{2e}$$

Las frecuencias tienen que ser altas para que los voltajes asociados sean medibles

En los experimentos, por ejemplo, se irradia una juntura o se la pone en una guía de onda en la que se inyecta una onda electromagnética de GHz (o más). v se controla atenuando más o menos esa onda.

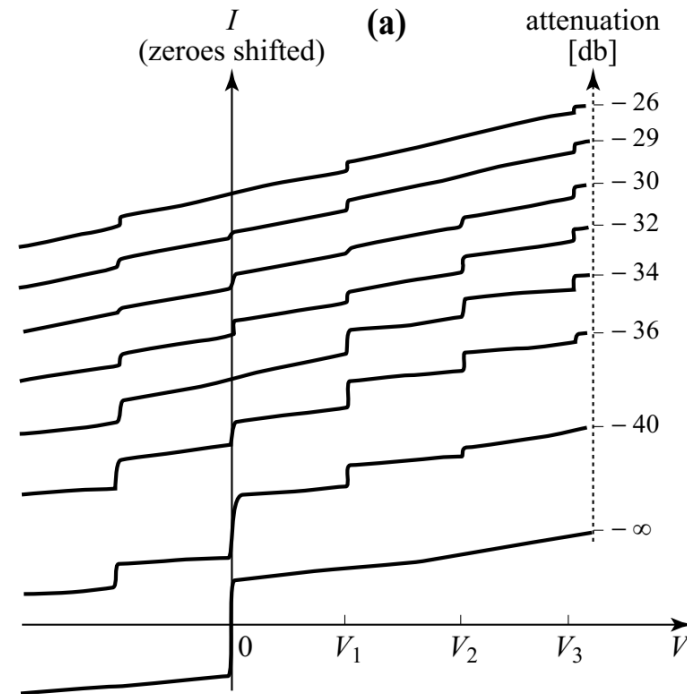
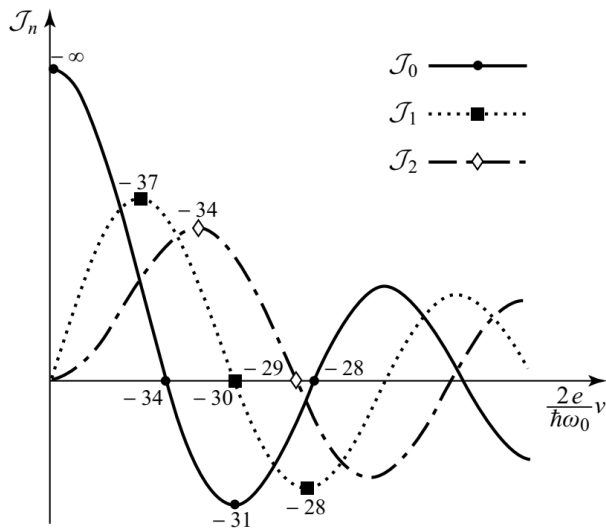


v va a estar determinada por la atenuación del filtro.
Los db del filtro van a determinar el peso de las distintas componentes

Saltos de Shapiro

$$V(t) = V + v \cos(\omega_0 t + \varphi)$$

$$\Delta I = \pm I_c \mathcal{J}_n \left(\frac{2e}{\hbar \omega_0} v \right) \quad V_n = n \frac{\hbar \omega_0}{2e}$$



Adaptado por Manguin del experimento original por Grimes & Shapiro (1969)

**Juntura Josephson en presencia de
campo magnético**

**SQUID: Superconducting Quantum
Interference Device**

Junturas Josephson en presencia de campo magnetico

Hasta ahora abordamos el Efecto Josephson, en terminos de la diferencia de fase entre los dos superconductores que forman la juntura. Si llamamos A y B a los superconductores:

$$\Theta = \varphi_B - \varphi_A$$

$$I = I_c \sin \Theta$$

Sin embargo, la fase no es una invariante de Gauge. En presencia de campo, se puede hacer un tratamiento analogo, y se llega a las mismas expresiones para el efecto Josephson reemplazando $\Theta = \varphi_B - \varphi_A$ por:

$$\gamma = \varphi_B - \varphi_A - \frac{2\pi}{\Phi_0} \int_A^B \vec{A} \cdot d\vec{l} \quad I = I_c \sin \gamma$$

γ es invariante de Gauge

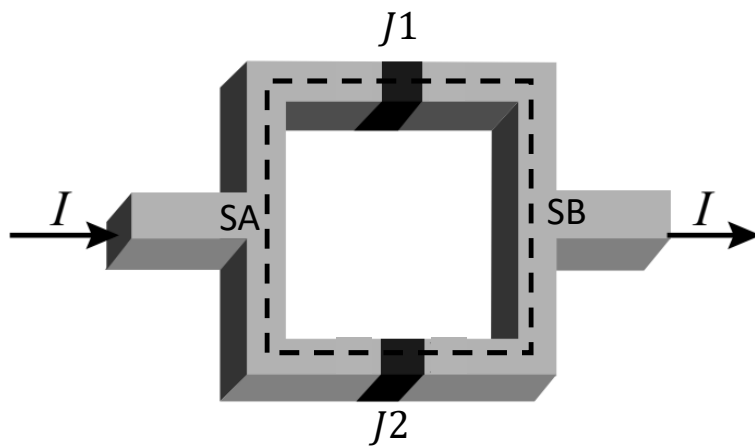
SQUID

Un SQUID es un lazo formado por un material superconductor con una o mas Junturas Josephson.

Rf-SQUID: El SQUID esta aislado, acoplado al entorno solo de manera inductiva.

DC-SQUID: El SQUID forma parte de un circuito que le suministra una corriente.

DC SQUID



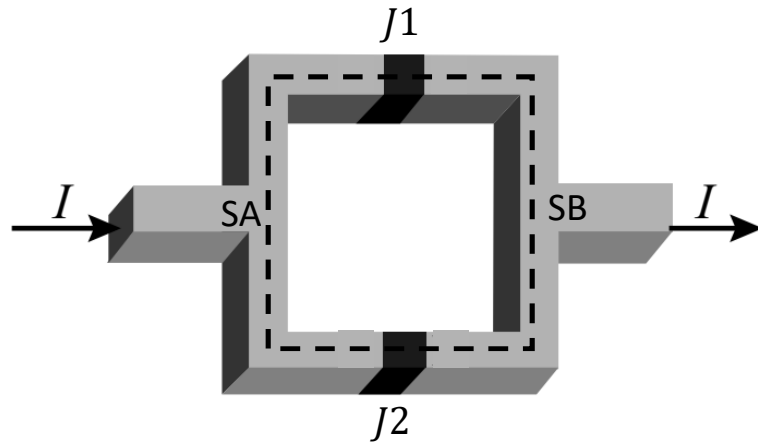
Si el espesor del superconductor es $> \lambda$, seguro puedo encontrar un camino tal que $J = 0$ en las regiones bulk

Recordemos:
$$\bar{J} = \frac{ne\hbar}{m} \left(\bar{\nabla}\varphi - \frac{2e}{\hbar} \bar{A} \right) \quad \Phi_0 = \frac{h}{2e}$$

En las regiones bulk:
$$\bar{A} = \frac{\Phi_0}{2\pi} \bar{\nabla}\varphi$$

En cada juntura:
$$I = I_c \sin\gamma \quad \gamma = \varphi_B - \varphi_A - \frac{2\pi}{\Phi_0} \int_A^B \bar{A} \cdot d\bar{l}$$

DC SQUID



En cada juntura: $\gamma = \varphi_B - \varphi_A - \frac{2\pi}{\Phi_0} \int_A^B \bar{A} \cdot \bar{dl}$

$$\gamma_1 = \varphi_{1B} - \varphi_{1A} - \frac{2\pi}{\Phi_0} \int_{J1} \bar{A} \cdot \bar{dl} \quad \gamma_2 = \varphi_{2B} - \varphi_{2A} - \frac{2\pi}{\Phi_0} \int_{J2} \bar{A} \cdot \bar{dl}$$

$$I = I_{c1} \sin \gamma_1 + I_{c2} \sin \gamma_2$$

Si las junturas son iguales: $I = I_c (\sin \gamma_1 + \sin \gamma_2) = 2I_c \cos \left(\frac{\gamma_1 - \gamma_2}{2} \right) \sin \left(\frac{\gamma_1 + \gamma_2}{2} \right)$

En las regiones bulk: $\bar{A} = \frac{\Phi_0}{2\pi} \bar{\nabla} \varphi$

$$\phi = \oint \bar{A} \cdot \bar{dl} = \frac{\Phi_0}{2\pi} \int_{SA,SB} \bar{\nabla} \varphi \cdot \bar{dl} + \int_{JJ} \bar{A} \cdot \bar{dl}$$

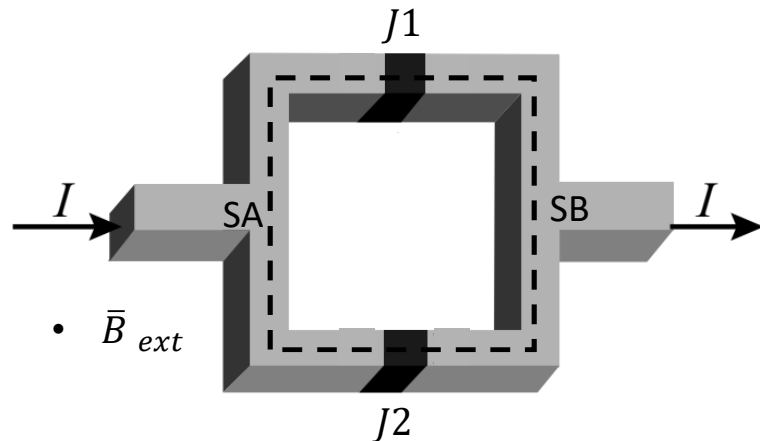
Ademas: $\oint \bar{\nabla} \varphi \cdot \bar{dl} = 2\pi n = \int_{SA,SB} \bar{\nabla} \varphi \cdot \bar{dl} + \int_{JJ} \bar{\nabla} \varphi \cdot \bar{dl}$

$$\Rightarrow 2\pi n = \int_{JJ} \bar{\nabla} \varphi \cdot \bar{dl} + 2\pi \frac{\phi}{\Phi_0} - \frac{2\pi}{\Phi_0} \int_{JJ} \bar{A} \cdot \bar{dl}$$

$$\Rightarrow 2\pi \left(n - \frac{\phi}{\Phi_0} \right) = \int_{JJ} \left(\bar{\nabla} \varphi - \frac{2\pi}{\Phi_0} \bar{A} \right) \cdot \bar{dl}$$

$$\Delta\gamma = \gamma_1 - \gamma_2 = 2\pi \left(n - \frac{\phi}{\Phi_0} \right)$$

DC SQUID



$$\Delta\gamma = \gamma_1 - \gamma_2 = 2\pi \left(n - \frac{\Phi}{\Phi_0} \right)$$

$$I = I_{c1} \sin\gamma_1 + I_{c2} \sin\gamma_2$$

Si las junturas son iguales:

$$I = I_c (\sin\gamma_1 + \sin\gamma_2) = 2I_c \cos\left(\frac{\gamma_1 - \gamma_2}{2}\right) \sin\left(\frac{\gamma_1 + \gamma_2}{2}\right)$$

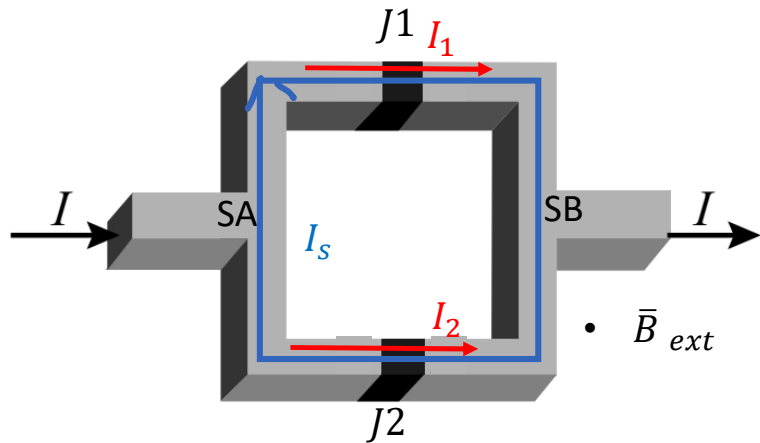
En ausencia de campo magnetico, $A = 0$, $\Delta\gamma = 0$, $\gamma_1 = \gamma_2 = \gamma = \Phi_B - \Phi_A \Rightarrow I = 2I_c \sin\gamma$

En presencia de campo: $\cos\left(\frac{\gamma_1 - \gamma_2}{2}\right) = \cos\left(n\pi - \frac{\Phi}{\Phi_0}\pi\right) \Rightarrow \left|\cos\left(\frac{\gamma_1 - \gamma_2}{2}\right)\right| = \left|\cos\left(\frac{\Phi}{\Phi_0}\pi\right)\right|$

$$\sin\left(\frac{\gamma_1 + \gamma_2}{2}\right) = \sin\left[\frac{\gamma_1 - \gamma_2}{2} + \gamma_2\right] = \sin\left(n\pi - \frac{\Phi}{\Phi_0}\pi + \gamma_2\right) \Rightarrow \left|\sin\left(\frac{\gamma_1 + \gamma_2}{2}\right)\right| = \left|\sin\left(\frac{\Phi}{\Phi_0}\pi\right) + \gamma_2\right| \leq 1$$

\Rightarrow la maxima I que puede circular es: $I_{max} = 2I_c \left|\cos\left(\frac{\Phi}{\Phi_0}\pi\right)\right| = \begin{cases} 2I_c & \text{si } \Phi = n\Phi_0 \\ < 2I_c & \text{si } \Phi \neq n\Phi_0 \end{cases}$

DC SQUID



Si las junturas son iguales:

la máxima I que puede circular es:

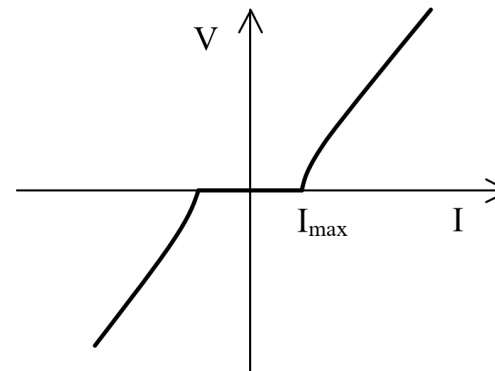
$$I_{max} = 2I_c \left| \cos \left(\frac{\Phi}{\Phi_0} \pi \right) \right| = \begin{cases} 2I_c & \text{si } \Phi = n\Phi_0 \\ < 2I_c & \text{si } \Phi \neq n\Phi_0 \end{cases}$$

Φ es el flujo del B total: $\Phi = \Phi_{ext} + LI_s$

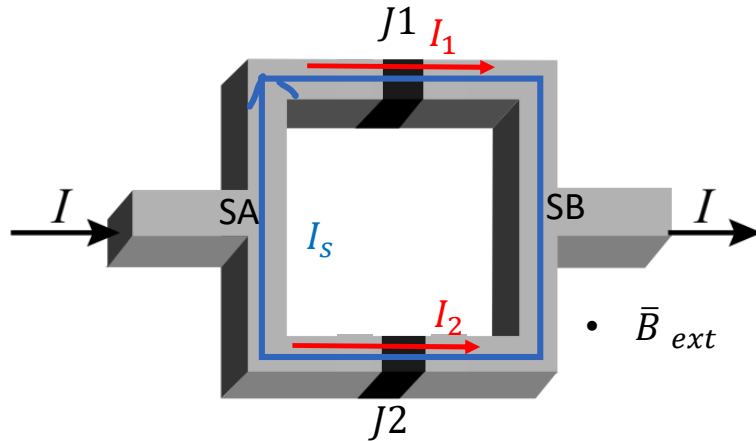
$$I_1 = I/2 + I_s \quad I_2 = I/2 - I_s$$

L autoinductancia del SQUID, I_s corriente inducida circulante

- Si $B = 0, I_s = 0$ $I_1 = I_2 = I/2$ Se comportan como dos junturas iguales en paralelo con $I_{max} = 2I_c$



DC SQUID



Si las junturas son iguales:

la máxima I que puede circular es:

$$I_{max} = 2I_c \left| \cos \left(\frac{\Phi}{\Phi_0} \pi \right) \right| = \begin{cases} 2I_c & \text{si } \Phi = n\Phi_0 \\ < 2I_c & \text{si } \Phi \neq n\Phi_0 \end{cases}$$

Φ es el flujo del B total: $\Phi = \Phi_{ext} + LI_s$

$$I_1 = I/2 + I_s \quad I_2 = I/2 - I_s$$

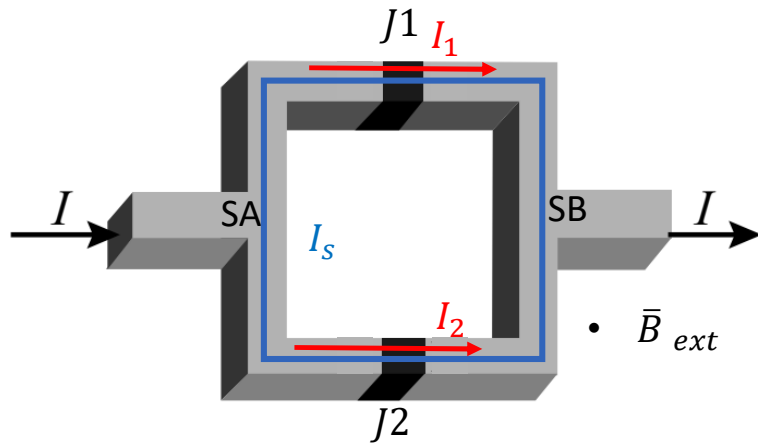
L autoinductancia del SQUID, I_s corriente inducida circulante

- Si aplicamos $B \neq 0$ muy chico tal que generaría un $\Phi_{ext} < \Phi_0/2$: $\gamma_1 \neq \gamma_2 \Rightarrow I_1 \neq I_2 \Rightarrow I_s \neq 0, I_{max} < 2I_c$

A medida que aumenta Φ aumenta I_s y disminuye I_{max} .

- Cuando $\Phi = \Phi_0/2$: $I_{max} = 0 \Rightarrow$ si $I = 0$ $I_s = I_c$ $I_1 = I_c$ $I_2 = -I_c$
- Cuando $\Phi \gtrsim \Phi_0/2$ al sistema le conviene energéticamente generar corrientes hacia el otro lado:

DC SQUID



Si las junturas son iguales:

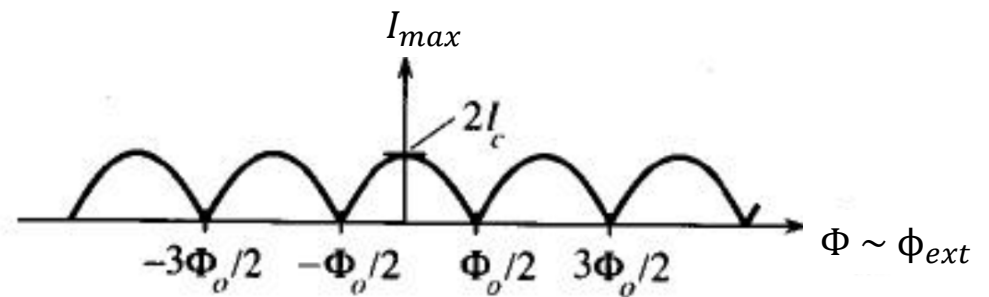
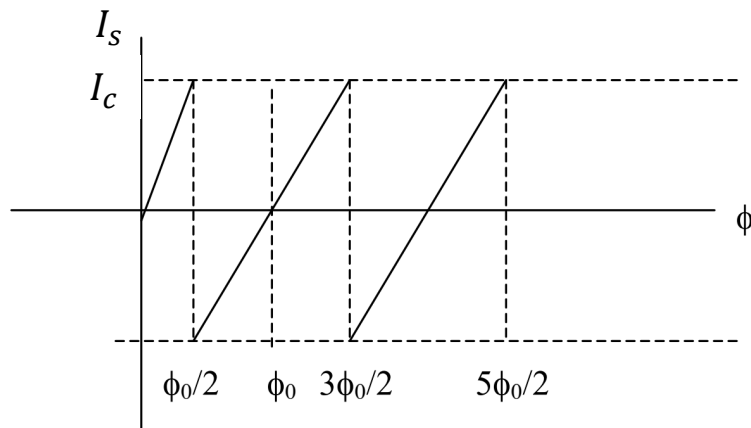
$$I_{max} = 2I_c \left| \cos \left(\frac{\Phi}{\Phi_0} \pi \right) \right| = \begin{cases} 2I_c & \text{si } \Phi = n\Phi_0 \\ < 2I_c & \text{si } \Phi \neq n\Phi_0 \end{cases}$$

Φ es el flujo del B total: $\Phi = \Phi_{ext} + LI_s$

L autoinductancia del SQUID, I_s corriente inducida circulante

En muchos casos L es muy chica y $\Phi \sim \Phi_{ext}$

$$I_1 = I/2 + I_s \quad I_2 = I/2 - I_s$$



DC SQUID

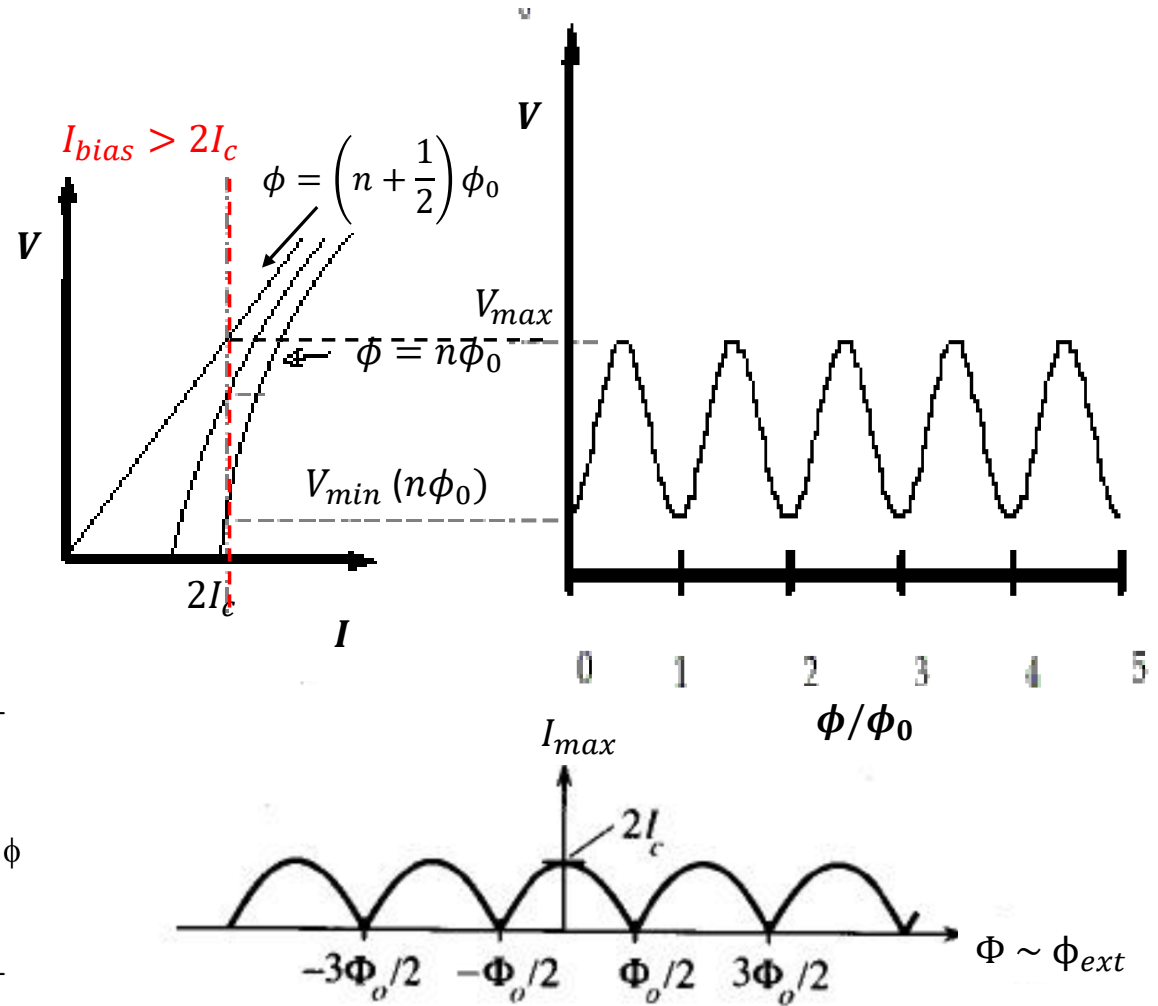
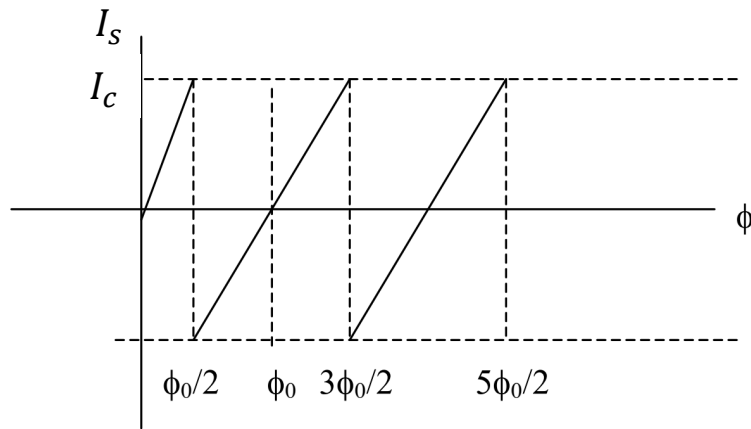
Si las junturas son iguales:

$$I_{max} = 2I_c \left| \cos \left(\frac{\Phi}{\Phi_0} \pi \right) \right| = \begin{cases} 2I_c & \text{si } \Phi = n\Phi_0 \\ < 2I_c & \text{si } \Phi \neq n\Phi_0 \end{cases}$$

Φ es el flujo del B total: $\Phi = \Phi_{ext} + LI_s$

En muchos casos L es muy chica y $\Phi \sim \Phi_{ext}$

$$I_1 = I/2 + I_s \quad I_2 = I/2 - I_s$$



DC SQUID

SQUID reales:

- Para que funcionen sin histéresis: junturas sobreamortiguadas. $Q^2 = \beta = \frac{2eCR^2}{\hbar} I_c \ll 1$

Recordemos que para una JJ sobreamortiguada: $\langle V \rangle = R(I^2 - I_c^2)^{\frac{1}{2}}$

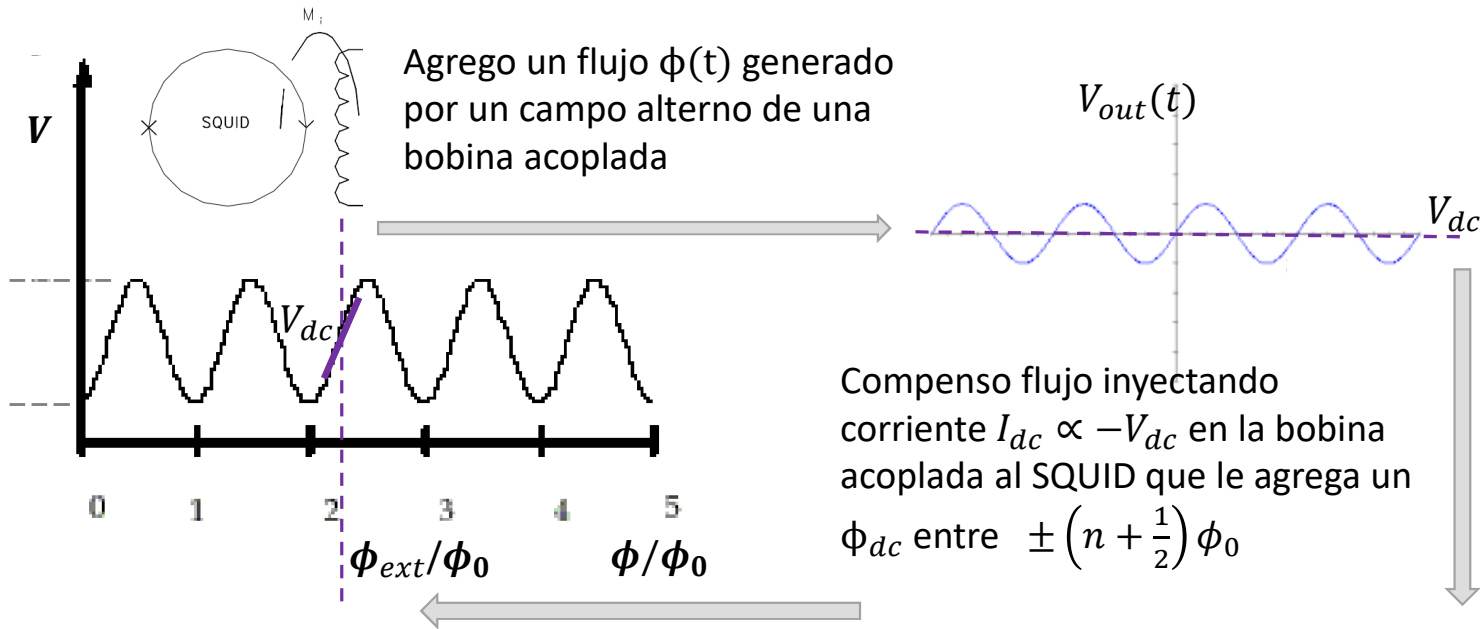
Para un SQUID formado por esas JJ: $\langle V \rangle = R \left\{ I^2 - \left[2I_c \left(\cos \left(\frac{\Phi}{\Phi_0} \pi \right) \right) \right]^2 \right\}^{\frac{1}{2}}$

Se logra:

- Reduciendo mucho las dimensiones ($C \sim 0$)
 - Poniendo en paralelo una $R \ll R_n$ (esto disminuye la señal : $\Delta V \sim \mu\text{V/mV}$)
-
- Para que funcionen en forma óptima hay que minimizar las fluctuaciones térmicas.

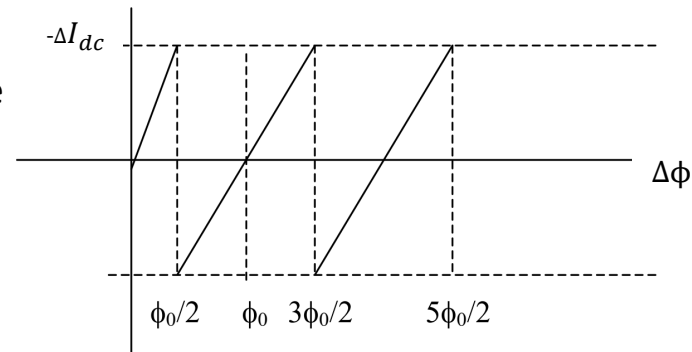
DC SQUID

SQUID reales: Lazo de realimentacion Flux-locked loop



- Puede medir $\Delta\phi \ll \phi_0$
- Se pueden “contar” varios ϕ_0 (con un contador)
- Limpia ruido

El lazo de realimentacion logra que el flujo extra compense el del campo externo de manera que $\phi = \left(n + \frac{1}{2}\right) \phi_0$ y $V_{out}(t) = cte$. Si varia el campo externo el lazo aumenta $-I_{dc}$ y lo vuelve a cancelar $\Rightarrow -\Delta I_{dc} \propto \Delta\phi$



DC SQUID

SQUID reales: Como se mide en la practica

