

Conductores

Problema general electromagnético

Ecuaciones de Maxwell:

$$\vec{\nabla} \times \vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \quad (\text{m1})$$

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{E} = -\frac{\rho_q}{\epsilon_0} \quad (\text{m2})$$

cuasiestacionario

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{B} = 0 \quad (\text{m3})$$

$$\vec{\nabla} \times \vec{B} = \mu_0 \vec{J} + \mu_0 \epsilon_0 \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} \quad (\text{m4})$$

ρ_q y \vec{J} son las densidades de **todas** las cargas y corrientes

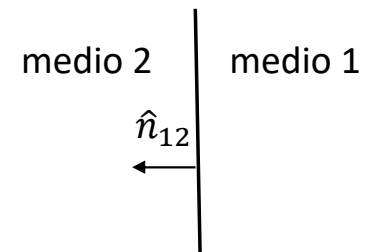
Condiciones de Contorno:

$$(\vec{E}_2 - \vec{E}_1) \times \hat{n}_{12} = 0 \quad (\text{cc1})$$

$$(\vec{E}_2 - \vec{E}_1) \cdot \hat{n}_{12} = \frac{\sigma_s}{\epsilon_0} \quad (\text{cc2})$$

$$(\vec{B}_2 - \vec{B}_1) \cdot \hat{n}_{12} = 0 \quad (\text{cc3})$$

$$(\vec{B}_2 - \vec{B}_1) \times \hat{n}_{12} = \mu_0 \vec{K}_s \quad (\text{cc4})$$



σ_s y \vec{K}_s son **todas** las densidades superficiales de cargas y corrientes

Conservación de la carga:

$$\vec{\nabla} \cdot \rho_q \vec{v} + \frac{\partial \rho_q}{\partial t} = 0$$

Ecuación constitutiva: $\vec{E}(\vec{J})$ o $\vec{E} = \rho \vec{J}$ o $\vec{J} = \sigma \vec{E}$

ρ y σ son la resistividad y conductividad, características del medio. En los conductores ρ no depende de \vec{J} y es real (Ohmicos).

Conductores

Ecuación constitutiva: $\vec{E} = \rho \vec{J}$ o $\vec{J} = \sigma \vec{E}$. ρ no depende de \vec{J} y es real.

El modelo más sencillo: **Modelo de Drude**

$$q_e = -e$$

$\vec{p}(t)$ impulso de un electrón a tiempo t

Si aplico un campo $\vec{E} \Rightarrow \vec{F} = -e\vec{E}$

\vec{p} varía por: {

- La fuerza $\vec{F} = -e\vec{E}$
- Choques con centros de scattering (τ tiempo entre colisiones)

- Probabilidad de NO chocar en dt : $1 - \frac{dt}{\tau}$
- $P(t)$ es la probabilidad de que un electrón NO haya colisionado después de un tiempo t . Entonces:

$$P(t + dt) = P(t) \left(1 - \frac{dt}{\tau} \right)$$

$$P(t + dt) - P(t) = -\frac{dt}{\tau} P(t)$$

$$\frac{dP}{P} = -\frac{dt}{\tau} \Rightarrow P(t) = e^{-\frac{t}{\tau}} \quad (P(t=0) = 1)$$

Conductores

Modelo de Drude

$\bar{p}(t)$ impulso de un electrón a tiempo t

Si aplico un campo $\bar{E} \Rightarrow \bar{F} = -e\bar{E}$

\bar{p} varía por:

- La fuerza $\bar{F} = -e\bar{E}$
- Choques con centros de scattering (τ tiempo entre colisiones)

- $P(t) = e^{-\frac{t}{\tau}}$ es la probabilidad de que un electrón (e^-) **NO** haya colisionado después de un tiempo t .
- Si el e^- no choca en dt : $\bar{p}(t + dt) = \bar{p}(t) - e\bar{E}dt$
- Si el e^- justo choca en ese dt : sale con un \bar{p}_0 aleatorio.

Entonces: Si promediamos todoéss los electrones, aquellos que justo chocaron en ese dt contribuirán al impulso medio, justo después del choque, con $\langle \bar{p}_0 \rangle = 0$.

La fracción electrones que NO chocan en dt contribuye con: $\langle \bar{p}(t + dt) \rangle = (\langle \bar{p}(t) \rangle - e\bar{E}dt) \left(1 - \frac{dt}{\tau}\right)$

Los que chocan, tienen un $dt' < dt$ para acelerar y contribuyen con: $\langle \bar{p}(t + dt) \rangle = (\langle \bar{p}_0 \rangle - e\bar{E}\langle dt' \rangle) \left(\frac{dt}{\tau}\right) = \langle \bar{p}(t + dt) \rangle < e\bar{E} \langle dt \rangle^2 / \tau \sim 0$. La contribución al impulso total e despreciable

Conductores

Modelo de Drude

$$\langle \bar{p}(t + dt) \rangle = (\langle \bar{p}(t) \rangle - e\bar{E}dt) \left(1 - \frac{dt}{\tau} \right)$$

$$\langle \bar{p}(t + dt) \rangle - \langle \bar{p}(t) \rangle = -\langle \bar{p}(t) \rangle \frac{dt}{\tau} - e\bar{E}dt - e\bar{E} \frac{dt^2}{\tau}$$

$$\frac{d\langle \bar{p} \rangle}{dt} = -\frac{\langle \bar{p} \rangle}{\tau} - e\bar{E}$$

Término viscoso

Solución estacionaria para $t \gg \tau$:

$$\langle \bar{p} \rangle_{\infty} = m\langle \bar{v} \rangle_{\infty} = -e\bar{E}\tau$$

$$\langle \bar{v} \rangle_{\infty} = -\frac{e\bar{E}}{\eta}$$

donde la viscosidad $\eta = \frac{m}{\tau}$

$\bar{J} = -ne\langle \bar{v} \rangle_{\infty}$ siendo n la densidad de portadores. Entonces: $\bar{J} = -ne \left(-\frac{e\bar{E}}{\eta} \right)$

$$\bar{J} = \frac{ne^2}{\eta} \bar{E} = \frac{ne^2\tau}{m} \bar{E} = \sigma \bar{E}$$

$$\text{con } \sigma = \frac{ne^2}{\eta} = \frac{ne^2\tau}{m}$$

Conductores

Datos experimentales

Material	Resistividad (en 20 °C-25 °C) ($\Omega \cdot m$).
<u>Grafeno</u> ³	$1,00 \times 10^{-8}$
<u>Plata</u> ³	$1,59 \times 10^{-8}$
<u>Cobre</u> ⁴	$1,71 \times 10^{-8}$
<u>Oro</u> ⁵	$2,35 \times 10^{-8}$
<u>Aluminio</u> ⁶	$2,82 \times 10^{-8}$
<u>Wolframio</u> ⁷	$5,65 \times 10^{-8}$
<u>Níquel</u> ⁸	$6,40 \times 10^{-8}$
<u>Hierro</u> ⁹	$8,90 \times 10^{-8}$
<u>Platino</u> ¹⁰	$10,60 \times 10^{-8}$
<u>Estaño</u> ¹¹	$11,50 \times 10^{-8}$
<u>Acero inoxidable 301</u> ¹²	$72,00 \times 10^{-8}$
<u>Grafito</u> ¹³	$60,00 \times 10^{-8}$

Modelo de Drude

$$\bar{j} = \sigma \bar{E} \quad \text{con}$$

$$\sigma = \frac{ne^2}{\eta} = \frac{ne^2\tau}{m}$$

$$n = 1.7 \cdot 10^{29} \frac{\text{electrones}}{m^3}$$

$$e = 1.6 \cdot 10^{-19} \text{C}$$
$$m = 9.1 \cdot 10^{-31} \text{kg}$$

$$\tau \sim 2 \cdot 10^{-14} \text{s}$$

Mientras estemos en $f \ll 10^{14}$ Hz estamos en el estacionario del modelo de Drude.

Problema electromagnético cuasiestacionario en un conductor

Ecuaciones de Maxwell:

$$\begin{aligned} \vec{\nabla} \times \vec{E} &= -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} & (m1) & & \vec{\nabla} \cdot \vec{E} &= -\frac{\rho_q}{\epsilon_0} & (m2) \\ \vec{\nabla} \cdot \vec{B} &= 0 & (m3) & & \vec{\nabla} \times \vec{B} &= \mu_0 \vec{J} & (m4) \end{aligned}$$

Ecuación constitutiva: $\vec{E} = \rho \vec{J}$ o $\vec{J} = \sigma \vec{E}$; ρ no depende de \vec{J}

por (m1) $\vec{\nabla} \times \vec{J} = \sigma \vec{\nabla} \times \vec{E} = -\sigma \frac{\partial \vec{B}}{\partial t}$ (*)

por (m4) $\vec{\nabla} \times \vec{\nabla} \times \vec{B} = \mu_0 \vec{\nabla} \times \vec{J}$

por (m3) $\vec{\nabla} \times \vec{\nabla} \times \vec{B} = \vec{\nabla} \cdot (\vec{\nabla} \cdot \vec{B}) - \vec{\nabla}^2 \vec{B}$

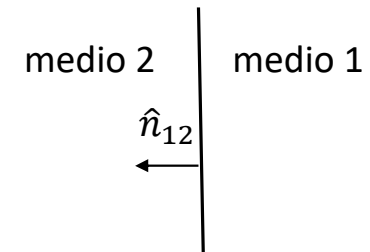
con(*) $-\vec{\nabla}^2 \vec{B} = \mu_0 \vec{\nabla} \times \vec{J} = -\mu_0 \sigma \frac{\partial \vec{B}}{\partial t}$

$$\vec{\nabla}^2 \vec{B} = \mu_0 \sigma \frac{\partial \vec{B}}{\partial t}$$

+ cc

$$(\vec{B}_2 - \vec{B}_1) \cdot \hat{n}_{12} = 0 \quad (cc3)$$

$$(\vec{B}_2 - \vec{B}_1) \times \hat{n}_{12} = \mu_0 \vec{K}_s \quad (cc4)$$



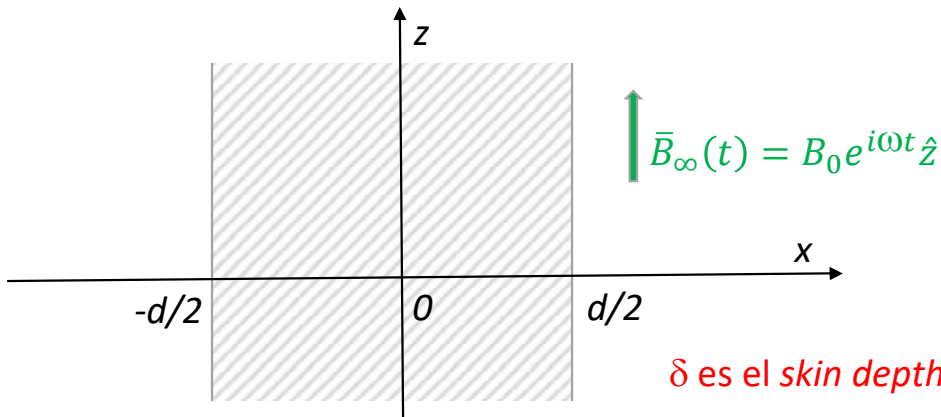
Problema electromagnético cuasiestacionario en un conductor

Ecuación constitutiva: $\vec{E} = \rho \vec{J}$ o $\vec{J} = \sigma \vec{E}$; ρ real no depende de \vec{J}

$$\vec{\nabla}^2 \vec{B} = \mu_0 \sigma \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \quad (1) \quad + \text{cc} \quad (\vec{B}_2 - \vec{B}_1) \cdot \hat{n}_{12} = 0 \quad (\text{cc3})$$

$$(\vec{B}_2 - \vec{B}_1) \times \hat{n}_{12} = \mu_0 \vec{K}_s \quad (\text{cc4})$$

- Si el conductor está en un campo externo uniforme y continuo \vec{B}_0 , $\vec{B}(\vec{r}, t) = \vec{B}_0$ es solución.
- Si en cambio tenemos $\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \neq 0 \Rightarrow \vec{\nabla}^2 \vec{B} \neq 0$ y aparecen corrientes inducidas.
 - Debido a las cc la solución va a depender de la geometría.
 - Para un slab conductor infinito:



δ es el *skin depth* (distancia pelicular)

Por simetría: $\vec{B}(\vec{r}, t) = B(x, t) \hat{z} \Rightarrow \vec{\nabla}^2 \vec{B} = \frac{\partial^2 B}{\partial x^2} \hat{z}$

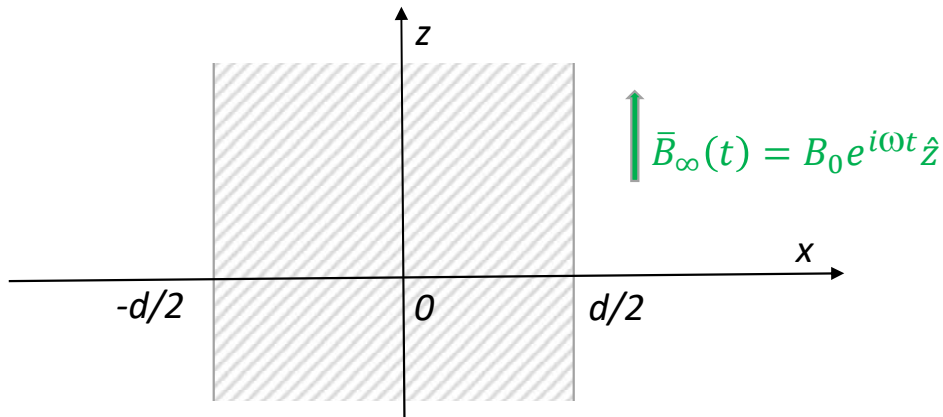
Solución del tipo: $B(x, t) = e^{-kx} e^{i\omega t}$

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial B}{\partial t} &= i\omega B \\ \frac{\partial^2 B}{\partial x^2} &= k^2 B \end{aligned} \right\} (1) \Rightarrow k^2 B = \mu_0 \sigma i\omega B \Rightarrow k^2 = \mu_0 \sigma i\omega$$

$$\Rightarrow k = \sqrt{\frac{\mu_0 \sigma i\omega}{2}} (1 \pm i) = \frac{1}{\delta} (1 \pm i)$$

Problema electromagnético cuasiestacionario en un conductor

Ecuación constitutiva: $\vec{E} = \rho \vec{J}$ o $\vec{J} = \sigma \vec{E}$; ρ real no depende de \vec{J}



$$B(x, t) = e^{-kx} e^{i\omega t}$$

$$k = \sqrt{\frac{\mu_0 \sigma \omega}{2}} (1 \pm i) = \frac{1}{\delta} (1 \pm i)$$

c.c: $B(d/2, t) = B(-d/2, t) = \vec{B}_\infty(t) = B_0 e^{i\omega t}$

Si $\delta \ll d$, la parte real de la solución es:

$$B(x, t) = B_0 e^{-\frac{(|x|-d/2)}{\delta}} \cos \left[\frac{(|x|-d/2)}{\delta} + \omega t \right]$$

El campo penetra en una long. característica δ

Desfasado del aplicado

$$\delta = \sqrt{\frac{2}{\mu_0 \sigma \omega}} = \sqrt{\frac{2\rho}{\mu_0 \omega}} = \sqrt{\frac{2\rho}{\mu_0 \pi f}}$$

En un conductor "perfecto": hay expulsión total de campo alterno?

Conductores

Datos experimentales

Material	Resistividad (en 20 °C-25 °C) ($\Omega \cdot m$).
<u>Grafeno</u> ³	$1,00 \times 10^{-8}$
<u>Plata</u> ³	$1,59 \times 10^{-8}$
<u>Cobre</u> ⁴	$1,71 \times 10^{-8}$
<u>Oro</u> ⁵	$2,35 \times 10^{-8}$
<u>Aluminio</u> ⁶	$2,82 \times 10^{-8}$
<u>Wolframio</u> ⁷	$5,65 \times 10^{-8}$
<u>Níquel</u> ⁸	$6,40 \times 10^{-8}$
<u>Hierro</u> ⁹	$8,90 \times 10^{-8}$
<u>Platino</u> ¹⁰	$10,60 \times 10^{-8}$
<u>Estaño</u> ¹¹	$11,50 \times 10^{-8}$
<u>Acero inoxidable 301</u> ¹²	$72,00 \times 10^{-8}$
<u>Grafito</u> ¹³	$60,00 \times 10^{-8}$

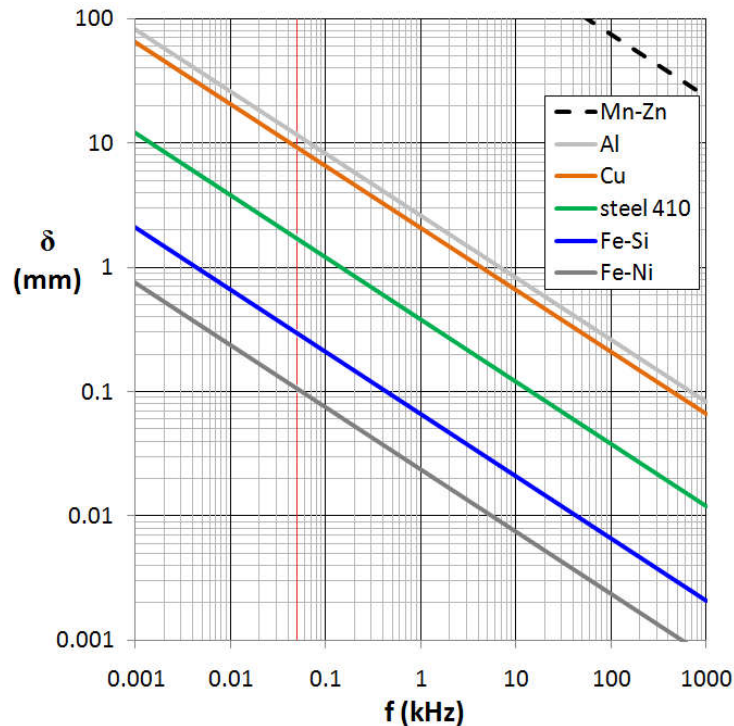
$$\text{Skin depth } \delta = \sqrt{\frac{2\rho}{\mu_0 \pi f}} \quad \mu_0 = 4\pi \cdot 10^{-7} \text{ NA}^2$$

Para $f = 1 \text{ kHz}$: $\delta \sim 2 \text{ mm}$

Conductores

Datos experimentales skin depth

A T ambiente



By Zureks - Own work, CC0,
<https://commons.wikimedia.org/w/index.php?curid=13826795>

$$\text{Skin depth } \delta = \sqrt{\frac{2\rho}{\mu_0 \pi f}} \quad \mu_0 = 4\pi \cdot 10^{-7} \text{ NA}^2$$

Para $f = 1$ kHz:

$$\delta_{Cu} (T_{amb}) \sim 2 \text{ mm}$$

$$\delta_{Cu} (80 \text{ K}) \sim 0.7 \text{ mm}$$

$$\delta(\text{YBCO}) \text{ en } T_c (92 \text{ K}) \sim 1,6 \text{ cm}$$

El skin depth δ se usa en muchos casos para medir ρ .

Cómo se mide δ ?

Conductores

Cómo se mide el skin depth $\delta = \sqrt{\frac{2\rho}{\mu_0\pi f}}$?

Algunos métodos:

- Se puede medir el campo \bar{B} localmente. (Arreglo de micropuntas Hall, experimento de magneto-optica).
- Se puede medir $\frac{\partial\langle\bar{B}\rangle}{\partial t}$ con un método inductivo.
- Se puede medir el campo $\bar{B}(\bar{m})$ generado por momento magnético \bar{m} generado por las corrientes inducidas.

Repasemos algunos conceptos: \bar{B} , \bar{H} , \bar{M} , χ , χ_{ac}

En ausencia de factor demagnetizante (FD): $\mu_0\bar{H}_0$ es el campo \bar{B}_0 generado por las corrientes externas, conocidas.

A que llamamos “ Corrientes *no conocidas* o internas ”?

- En conductores y superconductores hay \bar{J} inducidas.
- En medios magnéticos hay \bar{J} microscópicas y/o espines: $\bar{J}_{ind}(\bar{r})$

La distribución $\bar{J}_{ind}(\bar{r})$ inducida genera un momento magnético $\bar{m} = \frac{1}{2} \iiint \bar{r} \times \bar{J}_{ind}(\bar{r}) d^3r$.

La magnetización promedio $\langle\bar{M}\rangle = \frac{\bar{m}}{V}$, de forma que $\bar{V} \times \bar{M} = \bar{J}_{ind}$

Magnetización y susceptibilidad

La distribución $\vec{J}_{ind}(\vec{r})$ inducida genera un momento magnético $\vec{m} = \frac{1}{2} \iiint \vec{r} \times \vec{J}_{ind}(\vec{r}) d^3r$.

La magnetización promedio $\langle \vec{M} \rangle = \frac{\vec{m}}{V}$, de forma que $\vec{\nabla} \times \vec{M} = \vec{J}_{ind}$ (1)

$\mu_0 \vec{H}_0 = \vec{B}_0$ se puede calcular y/o calibrar (campo sin muestra).

$\vec{B}(\vec{r})$ con muestra depende de:

- \vec{H}_0
- Relaciones constitutivas del material
- Geometría (c.c)

Factor demagnetizante: En muchos casos, las c.c modifican las líneas de campo: $\vec{H} \neq \vec{H}_0$.

Volvamos a las **Ecuaciones de Maxwell:**

$\vec{\nabla} \cdot \vec{B} = 0$ (m3) $\vec{\nabla} \times \vec{B} = \mu_0 \vec{J}$ (m4) son **todas** las corrientes $\vec{J} = \vec{J}_L + \vec{J}_{ind}$

\vec{J}_L son las corrientes “conocidas”, también llamadas “libres”. Definimos un campo \vec{H} tal que $\vec{\nabla} \times \vec{H} = \vec{J}_L$ (2).

Entonces: $\vec{\nabla} \times \vec{B} = \mu_0 (\vec{J}_L + \vec{J}_{ind})$ (3) . De (1), y (3): $\vec{\nabla} \times \left(\frac{\vec{B}}{\mu_0} - \vec{M} \right) = \vec{J}_L \stackrel{(2)}{\implies} \vec{B} = \mu_0 (\vec{H} + \vec{M})$

Magnetización y susceptibilidad

La distribución $\bar{J}_{ind}(\bar{r})$ inducida genera un momento magnético $\bar{m} = \frac{1}{2} \iiint \bar{r} \times \bar{J}_{ind}(\bar{r}) d^3r$.

La magnetización promedio $\langle \bar{M} \rangle = \frac{\bar{m}}{V}$, de forma que $\bar{\nabla} \times \bar{M} = \bar{J}_{ind}$.

$$\bar{\nabla} \cdot \bar{B} = 0 \Rightarrow \begin{cases} \bar{\nabla} \times \bar{H} = \bar{J}_L \\ \bar{B} = \mu_0(\bar{H} + \bar{M}) \\ \bar{\nabla} \cdot \bar{H} = -\bar{\nabla} \cdot \bar{M} \end{cases}$$

Ademas:

$$(\bar{B}_2 - \bar{B}_1) \cdot \hat{n}_{12} = 0 \quad (\text{cc3})$$

$$(\bar{B}_2 - \bar{B}_1) \times \hat{n}_{12} = \mu_0 \bar{K}_s \quad (\text{cc4})$$

Adentro: $\bar{B}_1 = \mu_0(\bar{H} + \bar{M})$

Afuera: $\bar{B}_2 = \mu_0 \bar{H}$

$$\Rightarrow \bar{M} \times \hat{n}_{12} = \mu_0 \bar{K}_s$$

Si $\bar{\nabla} \cdot \bar{M} \neq 0 \Rightarrow$ puedo definir una especie de "carga magnética" $\rho_M = \bar{\nabla} \cdot \bar{M}$

Las fuentes de \bar{H} son las \bar{J}_L y las ρ_M .

La susceptibilidad magnética DC es un tensor que se define como: $\chi_{ij} = \frac{\partial M_i}{\partial H_j}$. Para medios isótropos y lineales: $\bar{M} = \chi \bar{H}$

La permeabilidad magnética DC es un tensor que se define como: $\mu_{ij} = \frac{\partial B_i}{\partial H_j}$. Para medios isótropos y lineales: $\bar{B} = \mu \bar{H}$

Magnetización y susceptibilidad AC

Qué pasa si se aplica un campo dependiente del tiempo? Cómo se define la susceptibilidad?

- Se aplica un campo alterno $\bar{B}_\infty(t) = B_0 e^{i\omega t} \hat{z}$ (en forma más general puede ser una combinación de frecuencias)
- La distribución $\bar{J}_{ind}(\vec{r}, t)$ inducida genera un momento magnético $\bar{m}(t) = \frac{1}{2} \iiint \vec{r} \times \bar{J}_{ind}(\vec{r}, t) d^3r$.
- La magnetización promedio $\langle \bar{M} \rangle(t) = \frac{\bar{m}(t)}{V}$. En todo punto, el campo $\bar{B}(t) = \mu_0(\bar{H}(t) + \bar{M}(t))$

1) Si la respuesta del medio es **lineal** (como los conductores no magnéticos), $\bar{B}(t)$ y $\bar{M}(t)$ sólo pueden tener componentes en la frecuencia ω , pero pueden estar desfazados. Ya lo vimos en el efecto pelicular.

$$\chi_{ac} = \chi' - i\chi'' = \frac{1}{2\pi H_0} \int_0^{2\pi} M(t) e^{i\omega t} d(\omega t)$$

2) Si la respuesta del medio es **no lineal** (como los ferromagnetos cerca de saturación o los superconductores con defectos), $\bar{B}(t)$ y $\bar{M}(t)$ siguen siendo periódicos en ω , pero pueden tener armónicos superiores.

$$\chi_{ac} = \sum_n \chi'_n - i\chi''_n = \frac{1}{2\pi H_0} \sum_n \int_0^{2\pi} M(t) e^{in\omega t} d(\omega t)$$

Preguntas para pensar/buscar para la próxima clase:

- Qué pasará cuando un conductor tiene resistividad nula? (conductor perfecto)
- Basta con reemplazar $\rho = 0$ en todas las expresiones?
- Qué hipótesis de las usadas en las deducciones de esta clase no se cumplen en ese caso?