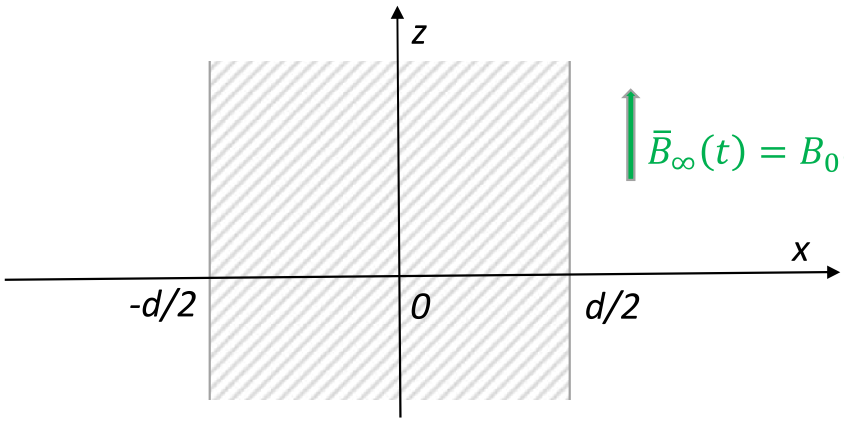
Conductores perfectos

Repasemos:

Problema electromagnético cuasiestacionario en un conductor: Apantallamiento del campo alterno

Ecuación constitutiva: $\bar{E} = \rho\bar{J}$ o $\bar{J} = \sigma\bar{E}$; ρ real no depende de $\bar{J}$



$\bar{B}_\infty(t) = B_0 e^{i\omega t}\hat{z}$

$$B(x,t) = e^{-kx}e^{i\omega t}$$

$$k = \sqrt{\frac{\mu_0\sigma i\omega}{2}}(1 \pm i) = \frac{1}{\delta}(1 \pm i)$$

c.c: $B(d/2,t) = B(-d/2,t) = \bar{B}_\infty(t) = B_0 e^{i\omega t}$

Si $\delta \ll d$, la parte real de la solución es:

$$B(x,t) = B_0 e^{-\frac{(|x|-d/2)}{\delta}} cos\left[\frac{(|x|-d/2)}{\delta} + \omega t\right]$$

El campo penetra en una long. característica δ

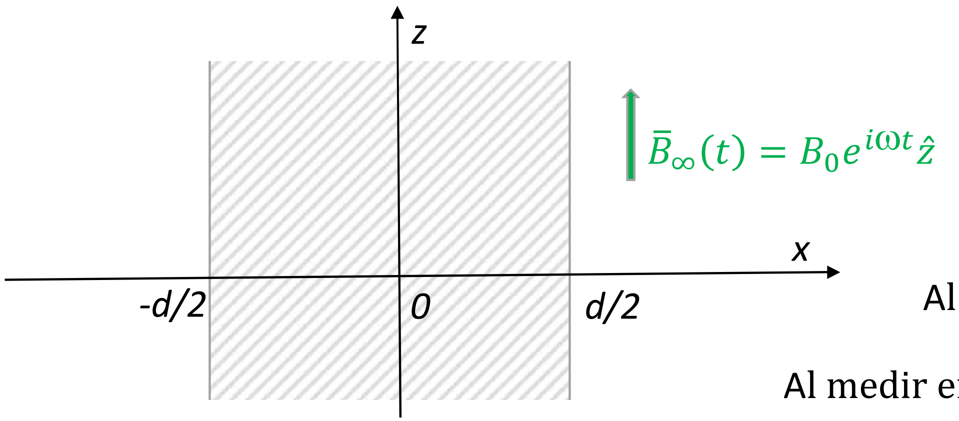
Desfasado del aplicado

$$\boxed{\delta = \sqrt{\frac{2}{\mu_0\sigma\omega}} = \sqrt{\frac{2\rho}{\mu_0\omega}} = \sqrt{\frac{2\rho}{\mu_0\pi f}}}$$

Problema electromagnético cuasiestacionario en un conductor: Apantallamiento del campo alterno

Parte real: $B(x,t) = B_0 e^{-\frac{(|x|-d/2)}{\delta}} cos\left[\frac{(|x|-d/2)}{\delta} + \omega t\right]$ $\delta = \sqrt{\frac{2\rho}{\mu_0\omega}}$

$$\langle B(t)\rangle_{muestra} = \frac{1}{d}\int_{-d/2}^{d/2} B(x,t)dx$$



Como no hay FD: $H(t) = \frac{B_\infty(t)}{\mu_0}$

$$\langle M(t)\rangle = \frac{1}{\mu_0}\langle B(t)\rangle - H(t)$$

Al medir $m(t) = \langle M(t)\rangle V$, medimos en forma indirecta δ

Al medir en forma inductiva $\partial\langle B(t)\rangle/\partial t$, medimos en forma indirecta δ

En general $B(x,t)$ está desfasado de $H(\mathrm{t}) \Rightarrow \langle B(t)\rangle$ y $\langle M(t)\rangle$ van a estar desfasados de $H\,(t)$.

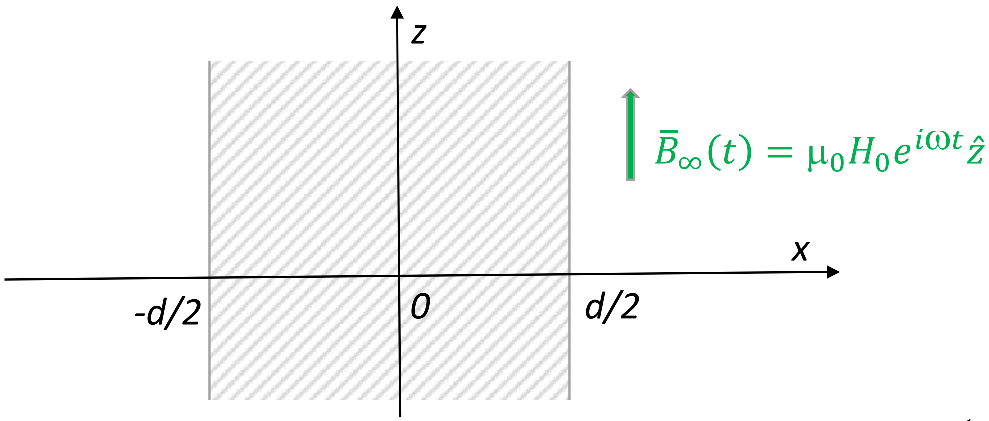
Susceptibilidad alterna χ_{ac} compleja

$$\chi_{ac} = \chi' + i\chi'' = \frac{1}{2\pi H_0}\int_0^{2\pi} M(t)e^{i\omega t}d(\omega t)$$

Apantallamiento del campo alterno en conductores
Susceptibildidad alterna

Parte real: $B(x,t) = B_0 e^{-\frac{(|x|-d/2)}{\delta}} cos\left[\frac{(|x|-d/2)}{\delta} + \omega t\right]$ $\delta = \sqrt{\frac{2\rho}{\mu_0 \omega}}$

$H(t) = H_0 cos(\omega t)$



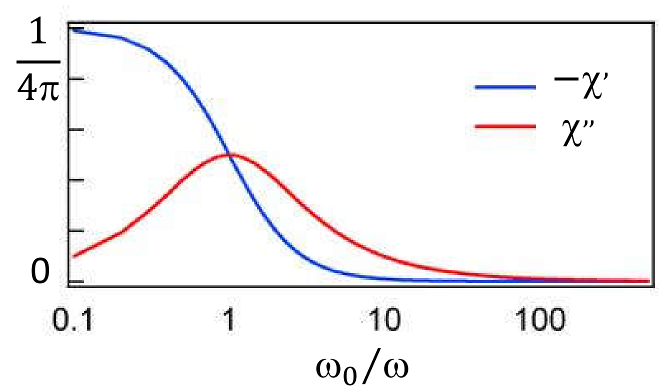
$$\chi_{ac} = \chi' - i\chi'' = \frac{1}{2\pi H_0}\int_0^{2\pi} M(t)e^{i\omega t} d(\omega t)$$

$$\chi' = \frac{1}{2\pi H_0}\int_0^{2\pi} M(t)\cos(\omega t)\, d(\omega t)$$

$$\chi'' = \frac{1}{2\pi H_0}\int_0^{2\pi} M(t)\sin(\omega t)\, d(\omega t)$$

Si $M(t)$ está en fase con $H(t)$, $\chi'' = 0$.

$$M(t) = (\chi' - i\chi'')\mathrm{H(t)} = H_0(\chi' \cos(\omega t) + \chi'' \sin(\omega t))$$



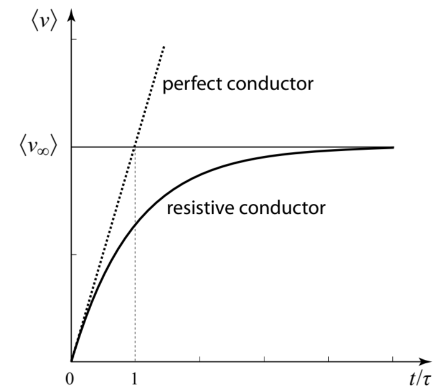
La energía disipada en un ciclo es $W = \oint_{ciclo} BdH$

$$\frac{d}{2} = \delta(\omega_0) = \sqrt{\frac{2\rho}{\mu_0 \omega_0}}$$

Ver que $W \propto \chi''$

Qué pasa en un conductor perfecto?

En un conductor $\delta = \sqrt{\dfrac{2\rho}{\mu_0 \omega}} \xrightarrow{\rho = 0} \delta = 0$? NO DEL TODO



Volvamos al Modelo de Drude: $\dfrac{d\langle \bar{p}\rangle}{dt} = -\dfrac{\langle \bar{p}\rangle}{\tau} - e\bar{E} \Longrightarrow \langle \bar{p}\rangle(t) = -e\tau\bar{E}\left(1 - e^{-\frac{t}{\tau}}\right)$

$\langle \bar{p}\rangle_\infty = -e\bar{E}\tau$ si $t \gg \tau$

$$\frac{d\langle \bar{p}\rangle}{dt} = \frac{\partial\langle \bar{p}\rangle}{\partial t} + \cancel{(\langle \bar{p}\rangle \cdot \bar{\nabla})\langle \bar{p}\rangle}$$

$\dfrac{d\langle \bar{p}\rangle}{dt} = -e\bar{E}$ si $t \ll \tau$ (conductor perfecto)

$$\bar{J} = -ne\langle \bar{v}\rangle = -\frac{ne}{m}\langle \bar{p}\rangle \quad \Rightarrow \quad \frac{\partial \bar{J}}{\partial t} = -\frac{ne}{m}\frac{\partial\langle \bar{p}\rangle}{\partial t} = -\frac{ne}{m}(-e\bar{E}) \Longrightarrow \boxed{\frac{\partial \bar{J}}{\partial t} = \frac{ne^2}{m}\bar{E}}$$

$$* \ \frac{\partial}{\partial t}(\bar{\nabla}\times\bar{J}) = \frac{ne^2}{m}\bar{\nabla}\times\bar{E} = -\frac{ne^2}{m}\frac{\partial \bar{B}}{\partial t} \quad \text{y} \quad \bar{\nabla}\times\frac{\partial \bar{B}}{\partial t} = \mu_0\frac{\partial \bar{J}}{\partial t} \Rightarrow \frac{\partial}{\partial t}(\bar{\nabla}\times\bar{B}) = \mu_0\frac{\partial \bar{J}}{\partial t}$$

tomando rotor y recordando: $\bar{\nabla}\times\bar{\nabla}\times\bar{B} = -\bar{\nabla}^2\bar{B} \Longrightarrow \dfrac{\partial}{\partial t}(-\bar{\nabla}^2\bar{B}) = \mu_0\dfrac{\partial}{\partial t}(\bar{\nabla}\times\bar{J})$ *

$$\Longrightarrow \boxed{\bar{\nabla}^2\left(\frac{\partial \bar{B}}{\partial t}\right) = \frac{ne^2}{m}\frac{\partial \bar{B}}{\partial t}}$$

La longitud $\lambda_L^2 = \dfrac{m}{\mu_0 n e^2}$ no depende de ω
y fue la longitud que inspiró a London.

$\bar{\nabla}\times\bar{E} = -\dfrac{\partial \bar{B}}{\partial t}$ (m1)
$\bar{\nabla}\times\bar{B} = \mu_0\bar{J}$ (m4)

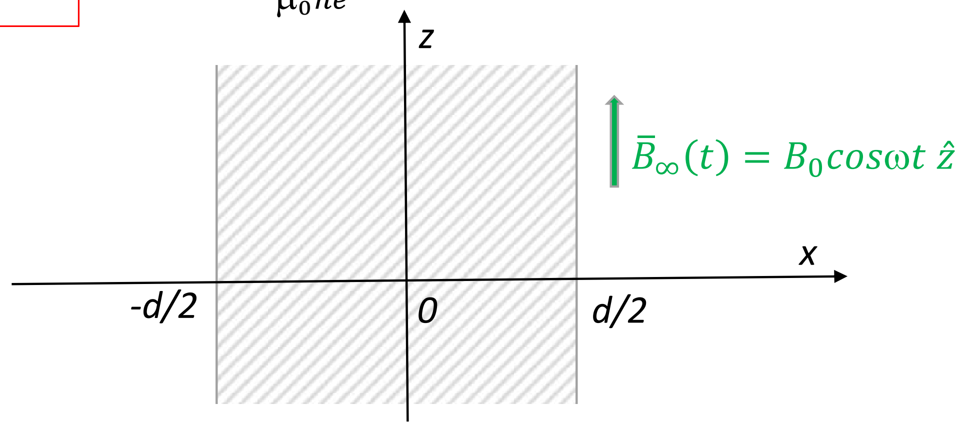
Qué pasa en un conductor perfecto?

$$\boxed{\frac{\partial \bar{J}}{\partial t} = \frac{ne^2}{m}\bar{E}}$$

$$\boxed{\bar{\nabla}^2\left(\frac{\partial \bar{B}}{\partial t}\right) = \frac{1}{\lambda_L^2}\frac{\partial \bar{B}}{\partial t}}$$

$\lambda_L^2 = \frac{m}{\mu_0 n e^2}$ real e independiente de ω

Ver que en una geometría de slab infinito, si $\lambda_L \ll d$, el campo $B(\mathrm{x},\mathrm{t})$ oscila en fase con el aplicado y decae exponencialmente desde los bordes con longitud caracterísica λ_L. Problema de la práctica.



Estimemos λ_L para un materiales como el Cu con conductividad perfecta:

$$\left.\begin{aligned} n &= 1.7\ 10^{29}\frac{electrones}{m^3} \\ e &= 1.6\ 10^{-19}\mathrm{C} \\ m &= 9.1\ \ 10^{-31}\mathrm{kg} \\ \mu_0 &= 4\pi\ 10^{-7}\mathrm{NA^2} \end{aligned}\right\} \quad \lambda_L \approx 13\ \mathrm{nm}$$

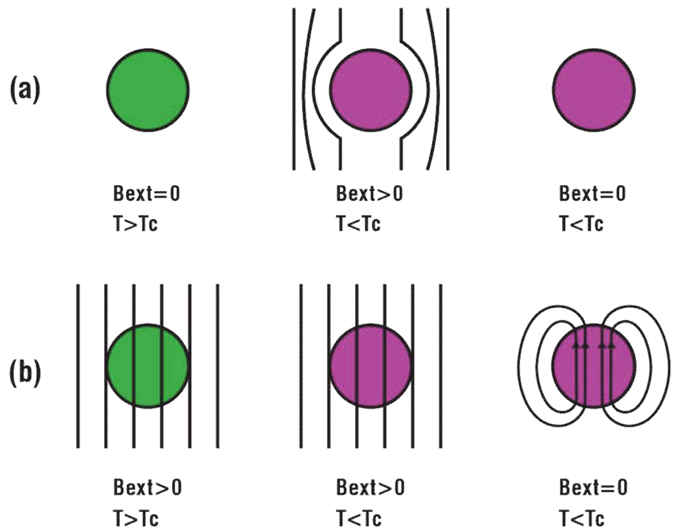
Conductor perfecto vs superconductor

$$\boxed{\bar{\nabla}^2\left(\frac{\partial \bar{B}}{\partial t}\right) = \frac{ne^2}{m}\frac{\partial \bar{B}}{\partial t}}$$

Un conductor perfecto apantalla $\frac{\partial \bar{B}}{\partial t}$.
No permite variación temporal de $\bar{B}$ en su interior.

Un superconductor en estado Meissner expulsa $\bar{B}$ de su interior.

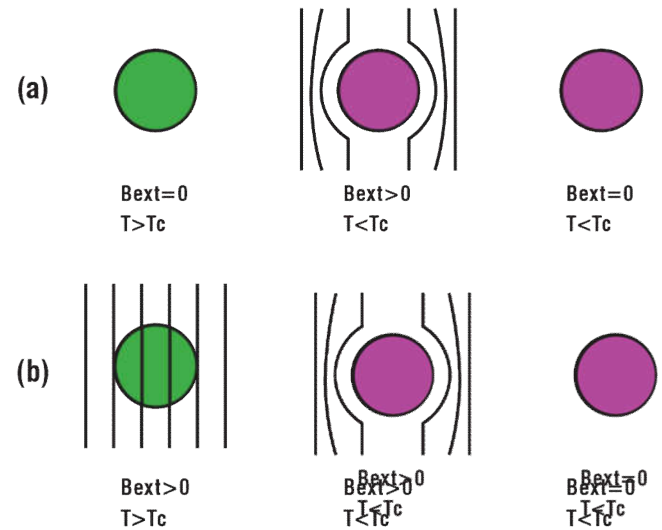
Si imaginamos un material que se vuelve conductor perfecto a $T < T_c$:



$B = 0$ siempre

$B \neq 0$ siempre

En un material que se vuelve superconductor a $T < T_c$:



$B = 0$ para $T < T_c$

$B = 0$ para $T < T_c$

Vamos a ver la clase próxima que λ_L es también la longitud que caracteriza la expulsion de campo en los superconductores.

Estado Meissner en un Superconductor

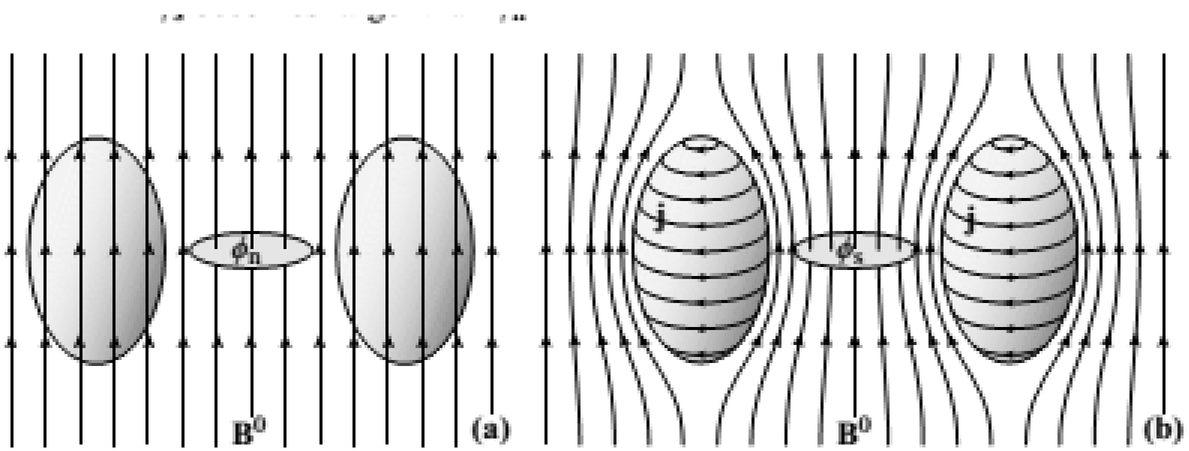


Figure 2.11 - The OCHSENFELD experiment

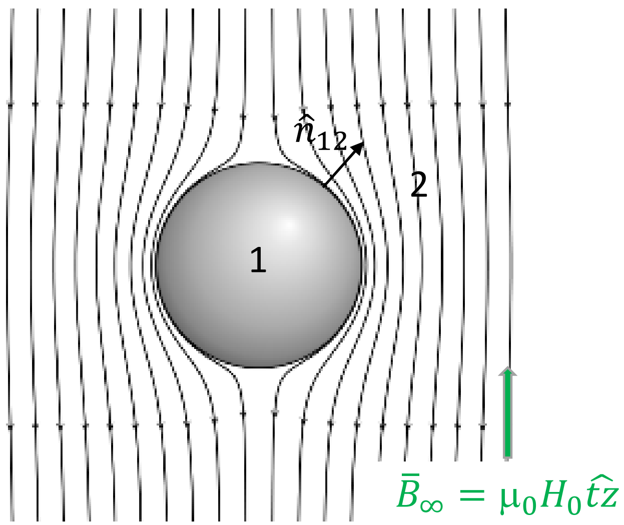
Dos superconductors en un campo B uniforme. Una espira en el medio permite medir variaciones en el flujo magnético.

Al enfriar el superconductor, los superconductores expulsan B. La bobina sensa es cambio de flujo en $T = T_c$.

En el experimento real los superconductores eran cilindros. Midio un aumento de flujo de $B = B_0$ a $B = 1.77\ B_0$.
La redistribución de las líneas de campo va a depender de la geometría y en particular del llamado **Factor Demagnetizante**.

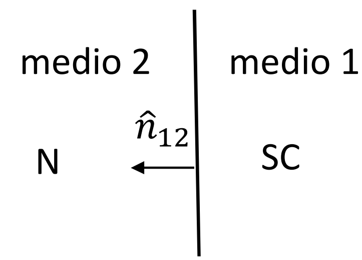
Estado Meissner con Factor Demagnetizante (FD)

Ejemplo: esfera Meissner



La redistribución de las líneas de campo va a depender de la geometría y en particular del FD

Problema general



$(\bar{B}_2 - \bar{B}_1).\hat{n}_{12} = 0$ (cc3)

$(\bar{B}_2 - \bar{B}_1) \times \hat{n}_{12} = \mu_0 \bar{K}_s$ (cc4)

$(\bar{H}_2 - \bar{H}_1).\hat{n}_{12} = \bar{M}.\hat{n}_{12}$

$(\bar{H}_2 - \bar{H}_1) \times \hat{n}_{12} = \mu_0 \bar{K}_L$

$\bar{M} \times \hat{n}_{12} = \mu_0 \bar{K}_{ind}$

Afuera: $\bar{B}_2 = \mu_0 \bar{H}$

Adentro: $\bar{B}_1 = \mu_0 (\bar{H} + \bar{M})$

Superconductor macroscópico en Meissner

Como λ_L es mucho menor que la típica dimensión macro, suponemos que las corrientes superconductoras inducidas son superficiales.
De todas formas no hay corrientes superficiales libres.

$(\bar{H}_2 - \bar{H}_1) \times \hat{n}_{12} = 0 \Rightarrow \bar{H}_{2\parallel} = \bar{H}_{1\parallel}$

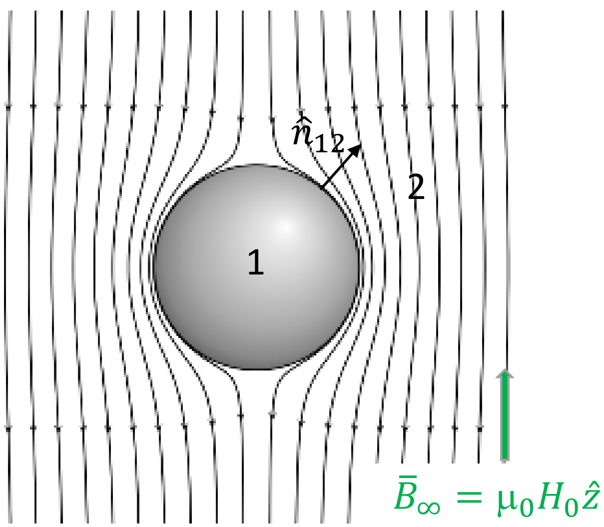
$\bar{M} \times \hat{n}_{12} = \mu_0 \bar{K}_{sup}$

$\bar{H}_{2\perp} = \bar{H}_{1\perp} + \bar{M}_{\perp}$ o $\bar{B}_{2\perp} = \bar{B}_{1\perp}$

$\bar{B}_2 = \bar{B}_{\infty} + \bar{B}_{generado\ por\ \bar{K}_{sup}}$

$\bar{B}_1 = 0$

Ejemplo: Esfera Meissner



Superconductor macroscópico en Meissner

$$(\bar{H}_2 - \bar{H}_1) \times \hat{n}_{12} = 0 \;\Rightarrow \bar{H}_{2\parallel} = \bar{H}_{1\parallel}$$

$$\bar{M} \times \hat{n}_{12} = \mu_0 \bar{K}_{sup} \qquad \bar{H}_{2\perp} = \bar{H}_{1\perp} + \bar{M}_\perp \text{ o } \bar{B}_{2\perp} = \bar{B}_{1\perp}$$

$$\bar{B}_1 = 0$$

$$\bar{B}_2 = \bar{B}_\infty + \bar{B}_{generado\ por\ \bar{K}_{sup}}$$

Esfera superconductora de radio *R*:

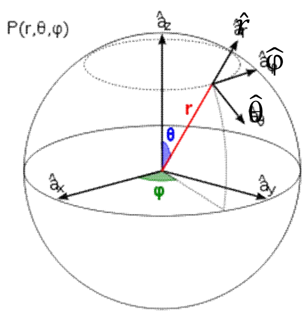
$$\bar{B}_2 = \bar{B}_\infty + \bar{B}_{esfera}$$

$$\bar{B}_{esfera}(\bar{r}) = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{3\hat{r}(\hat{r}.\bar{m}) - \bar{m}}{r^3}$$

Por simetría $\bar{B}_{esfera}$ solo puede tener componente bipolar

$\bar{m} = m\hat{z}$ momento dipolar magnético de la esfera.

Coordenadas esféricas



$$\bar{B}_{esfera}(\bar{r}) = \frac{\mu_0}{4\pi r^3}\left[2\,cos\theta\,\hat{r} + sin\theta\,\hat{\theta}\right] \;;\; \mu_0 \bar{H}_0 = \mu_0 H_0 \left(cos\theta\,\hat{r} - sin\theta\,\hat{\theta}\right)$$

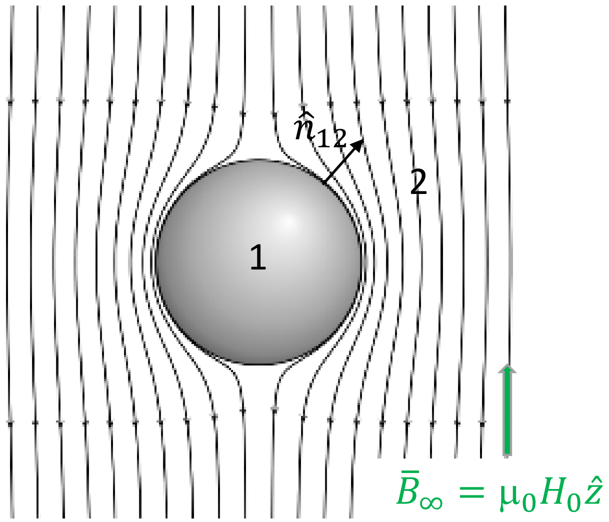
Afuera: $\bar{B}_2 = \mu_0 \bar{H}_0 + \bar{B}_{esfera}(\bar{r})$

Adentro: $\bar{B}_1 = 0$

c.c: $\bar{B}_{2\perp}(r = R) = \bar{B}_{1\perp}(r = R)$

$$\mu_0 cos\theta \left[H_0 + \frac{m}{2\pi R^3}\right] = 0 \Rightarrow \boxed{m = -2\pi R^3 H_0}$$

Ejemplo: Esfera Meissner



Afuera: $\bar{B}_2 = \mu_0 H_0 (cos\theta\,\hat{r} - sin\theta\,\hat{\theta}) + \frac{\mu_0 m}{4\pi r^3}[2\,cos\theta\,\hat{r} + sin\theta\,\hat{\theta}]$

Adentro: $\bar{B}_1 = 0$

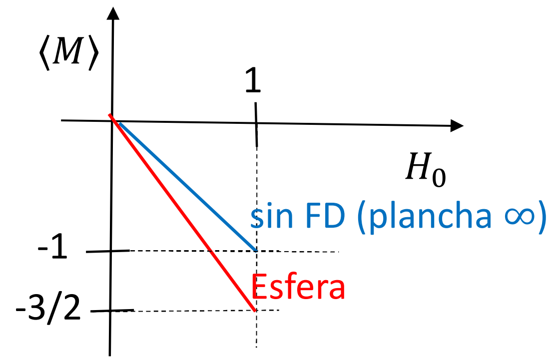
c.c: $\bar{B}_{2\perp}(r = R) = \bar{B}_{1\perp}(r = R) \Rightarrow$ $\boxed{m = -2\pi R^3 H_0}$

$$\boxed{\langle \bar{M} \rangle = \frac{\bar{m}}{V} = -\frac{3}{2} H_0 \hat{z}}$$

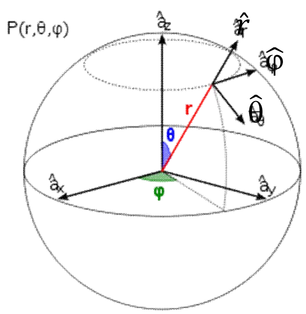
FD

$\bar{M}$ uniforme *

$$\Rightarrow \bar{H}_1 = -\bar{M} = \frac{3}{2} H_0 \hat{z} \neq H_0$$



Coordenadas esféricas



Cómo son las $\bar{K}_{sup}$ inducidas?

$\bar{M} \times \hat{n}_{12} = \mu_0 \bar{K}_{sup}$ Expresando $\bar{M}$ en esféricas, se llega a: $\mu_0 \bar{K}_{sup} = -M sin\theta\,\hat{\varphi}$

$$\boxed{\bar{K}_{sup} = -\frac{3}{2\mu_0} H_0 sin\theta\,\hat{\varphi}}$$

*Se puede ver que en elipsoides de revolución en un $\bar{H}_0$uniforme, $\bar{M}$ y $\bar{H}_1$ son uniformes. En la mayoría de las geometrías la solución no es analítica . Hay tablas y cálculos numéricos.

- Qué relación constitutiva puede justificar el apantallamiento del campo $\bar{B}$ en los SC ?

La clase próxima: Modelo de London