Momento de London

Repaso:

1) Modelo de London

- Fluido superconductor con densisdad $n_s(T)$ homogénea; $\bar{J_s} = n_s q \bar{v}_s$

$\frac{\partial \bar{J}}{\partial t} = \frac{1}{\mu_0 \lambda_L^2}\bar{E}$; $\lambda_L^2 = \frac{m}{\mu_0 n_s q^2}$ Conductor perfecto (L1) + $\mu_0 \bar{\nabla} \times \bar{J} = -\frac{1}{\lambda_L^2}\bar{B}$ (L2) Efecto Meissner

$$\boxed{\bar{\nabla}^2 \bar{B} = \frac{1}{\lambda_L^2}\bar{B}}$$

2) Impulso canónico y vorticidad

Impulso canónico asociado a los portadores superconductores: $\bar{P} = m\bar{v}_s + q\bar{A} = \bar{p}_s + q\bar{A}$

Pasando a las coordenadas locales del fluido, definimos la vorticidad: $\bar{Q} = m\bar{w} = q\bar{B} + \bar{\nabla} \times m\bar{v} = \bar{\nabla} \times \bar{P}$

Y mostramos que: $\frac{\partial \bar{w}}{dt} = \bar{\nabla} \times (\bar{v} \times \bar{w})$

Vorticidad:

Notación:
$\mathbf{v} \equiv \bar{v}$; $\mathbf{E} \equiv \bar{E}$;$\boldsymbol{\nabla} \equiv \bar{\nabla}$; etc

Cada portador, sometido a un campo electromagnético se acelera de acuerdo a:

$$m\frac{\mathrm{d}\mathbf{v}_i}{\mathrm{d}t} = q(\mathbf{E} + \mathbf{v}_i \times \mathbf{B})$$

Si los portadores no interactuan y no chocan, la misma ecuación valdrá para la velocidad media de un elemento de volumen del *fluido superconductor:*

$$m\frac{\mathrm{d}\mathbf{v}}{\mathrm{d}t} = q(\mathbf{E} + \mathbf{v} \times \mathbf{B})$$

Nos ınteresa expresar esta ecuación en términos de derivadas locales, no queremos “seguir” a un elemento de volume, sino mirar el **campo de velocidades** del *fluido superconductor*. Entonces:

$$\frac{q}{m}(\mathbf{E} + \mathbf{v} \times \mathbf{B}) = \frac{\mathrm{d}\mathbf{v}}{\mathrm{d}t} = \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} + (\mathbf{v} \cdot \nabla)\mathbf{v} = \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} + \cancel{\frac{1}{2}\nabla \mathbf{v}^2} - \mathbf{v} \times (\nabla \times \mathbf{v}).$$

London muestra que esto es muy chico.
Ver discusion en Cap.2.11 Mangin

$$\frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} - \frac{q}{m}\mathbf{E} = \mathbf{v} \times \left(\overbrace{\nabla \times \mathbf{v} + \frac{q}{m}\mathbf{B}}^{\boldsymbol{w}} \right)$$

$$\boxed{\frac{\boldsymbol{Q}}{m} = \mathbf{w} = \nabla \times \mathbf{v} + \frac{q}{m}\mathbf{B}}$$

Q vorticidad

Tomando rotor y $\nabla \times \mathbf{E} = -\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t}$:

$$\boxed{\frac{\partial \mathbf{w}}{\partial t} = \nabla \times (\mathbf{v} \times \mathbf{w})}$$

Notación:

$\mathbf{v} \equiv \bar{v}$; $\mathbf{E} \equiv \bar{E}$; $\nabla \equiv \bar{\nabla}$; etc

Momento Canónico y Vorticidad:

$$\frac{\mathbf{Q}}{m} = \mathbf{w} = \nabla \times \mathbf{v} + \frac{q}{m} \cdot \mathbf{B}$$

$$\bar{Q} = m\bar{w} = q\bar{B} + \bar{\nabla} \times m\bar{v}$$

Pero $\bar{B} = \bar{\nabla} \times \bar{A} \Longrightarrow \bar{Q} = \bar{\nabla} \times (q\bar{A} + m\bar{v})$

$$\boxed{\bar{Q} = \bar{\nabla} \times \bar{P}}$$

Encontramos una relación entre la vorticidad $\bar{Q}$ y el impulso canónico $\bar{P}$.

La propiedad superconductora apareció solamente en la suposición de que los portadores no chocan (conductor perfecto), y esto nos llevó a:

$$\frac{\partial \bar{w}}{dt} = \bar{\nabla} \times (\bar{v} \times \bar{w})$$

Esta ecuación se conoce en hidrodinámica como Ecuación de Heltmoltz. Si $\bar{\boldsymbol{w}} = \mathbf{0}$ a tiempo t, entonces vale 0 para siempre.

Esta es la solución que proponen los London:

$$\boxed{\bar{\nabla} \times \bar{P} = \bar{Q} = m\bar{w} = 0}$$ Rigidez de London

Esto lleva a:

$$\frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} - \frac{q}{m}\mathbf{E} = \mathbf{v} \times \left(\cancel{\nabla \times \mathbf{v} + \frac{q}{m} \cdot \mathbf{B}} \right)$$

$$\frac{\partial \bar{v}}{dt} = \frac{q}{m}\bar{E} \Longrightarrow \boxed{\frac{\partial \bar{J}}{\partial t} = \frac{n_s q^2}{m}\bar{E}} \quad \text{(L1)}$$

$$\bar{J} = n_s q \bar{v}$$

$$0 = q\bar{B} + \bar{\nabla} \times m\bar{v} \Longrightarrow \boxed{\bar{\nabla} \times \bar{J} = -\frac{n_s q^2}{m}\bar{B}} \quad \text{(L2)}$$

$\bar{Q} = 0$ implica ambas ecuaciones de London

Momento Canónico, Vorticidad y Efecto Meissner:

$$\bar{Q} = q\bar{B} + \bar{\nabla} \times m\bar{v} = \bar{\nabla} \times \bar{P}$$

$$\boxed{\bar{\nabla} \times \bar{P} = \bar{Q} = 0}$$ Rigidez de London

$$\bar{P} = \bar{p}_s + q\bar{A} = m\bar{v}_s + q\bar{A} = \frac{m\bar{J}_s}{n_s q} + q\bar{A} = q\mu_0\lambda_L^2\bar{J}_s + q\bar{A} = q(\mu_0\lambda_L^2\bar{J}_s + \bar{A})$$

Vemos que las Ec. de London equivalen a $\bar{Q} = 0$ en un fluido no viscoso.

Proponer $\bar{Q} = 0$ es una forma alternativa de llegar al Efecto Meissner

Tomemos una superficie del SC:

$$0 = \iint_S (\bar{\nabla} \times \bar{P}) \, . \, d\bar{S} \underset{\uparrow}{=} \oint \bar{P}.\bar{dl} = q\mu_0\lambda_L^2 \oint \bar{J}_s.\bar{dl} + q \oint \bar{A}.\bar{dl} = q\mu_0\lambda_L^2 \oint \bar{J}_s.\bar{dl} + q \iint_S \underbrace{(\bar{\nabla} \times \bar{A})}_{\bar{B}} \, . \, d\bar{S}$$

recinto simplemente conexo

$$\boxed{0 = \mu_0\lambda_L^2 \oint \bar{J}_s.\bar{dl} + \phi_{total}}$$

Si por la curva que rodea la superficie no circulan corrientes, el flujo del campo es nulo.

Gauge o medida de London:

Proponer $\bar{Q} = 0$ es una forma alternativa de llegar al Efecto Meissner: $\bar{B}$ y $\bar{J}_s$ se apantallan en una longitud $\lambda_L^2 = \frac{m}{\mu_0 n_s q^2}$

Qué pasa con $\bar{A}$? Esto depende de la medida, porque $\bar{A}$ está definida a menos de un gradiente.

El gauge de London es aquel en el que las condiciones de $\bar{A}$ coinciden con las de $\bar{J}_s$ y $\bar{A}$ también es apantallado.

$$\bar{\nabla} \times \bar{P} = \bar{Q} = 0 \qquad \bar{P} = \bar{p}_s + q\bar{A} = \mu_0 q \lambda_L^2 \bar{J}_s + q\bar{A} \qquad \bar{J}_s = \frac{1}{\mu_0 q \lambda_L^2}(\bar{P} - q\bar{A}) = \frac{\bar{P}}{\mu_0 q \lambda_L^2} - \frac{\bar{A}}{\mu_0 \lambda_L^2}$$

Definimos la función escalar ϑ, de forma que $\bar{P} = q\mu_0 \bar{\nabla}\vartheta$ y por lo tanto $\bar{\nabla} \times \bar{P} = 0$

medible $\longrightarrow$ $\bar{J}_s = \bar{\nabla}\vartheta - \frac{\bar{A}}{\mu_0 \lambda_L^2}$ $\qquad$ $\bar{\nabla}\vartheta$ ($\bar{P}$) y $\bar{A}$ dependen del gauge

En el Gauge de London (GL) las condiciones de $\bar{A}$ coinciden con las de $\bar{J}_s$

1) En el estacionario: $\bar{\nabla}.\bar{J} + \frac{\partial \rho_q}{\partial t} = \bar{\nabla}.\bar{J} = 0 \overset{GL}{\Rightarrow} \bar{\nabla}.\bar{A} = 0 \Longrightarrow \nabla^2\vartheta = 0$

2) En el borde SC aislado $\hat{n}.\bar{J} = 0 = \hat{n}.\bar{\nabla}\vartheta$

2') En el borde conectado $\hat{n}.\bar{J} = \hat{n}.\frac{\bar{A}}{\mu_0 \lambda_L^2} \Longrightarrow \hat{n}.\bar{\nabla}\vartheta = 0$

Si se cumplen estas 2 condiciones para ϑ en un volume simplemente conexo ϑ es cte en ese volumen. $\Longrightarrow \bar{\nabla}\vartheta = 0$ en el superconductor.

$$\boxed{\Longrightarrow \bar{J}_s = -\frac{\bar{A}}{\mu_0 \lambda_L^2}}$$

$\boxed{\bar{P} = 0 \text{ en el Gauge de London, en un superconductor simplemente conexo}}$

Flujo magnético atrapado en SC

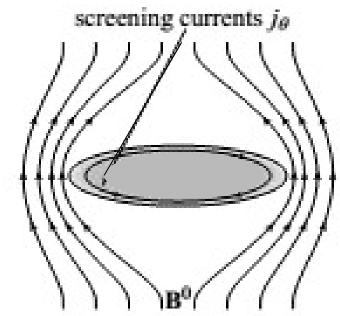
$\bar{P} = q(\mu_0\lambda_L^2\bar{J}_s + \bar{A})$

$\bar{\nabla} \times \bar{P} = \bar{Q} = 0$ siempre

En un superconductor simplemente conexo: $\oint \bar{P}.\bar{dl} = 0$

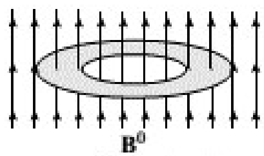
$\mu_0\lambda_L^2 \cancel{\oint} \bar{J}_s.\bar{dl} + \phi_{total} = 0$ No hay flujo atrapado

Si en el circuito no hay J

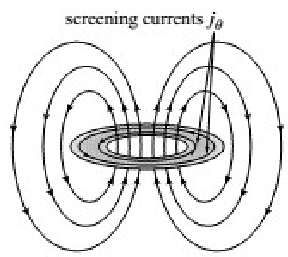


(b) $B^0 \neq 0$; $T < T_c$

Sin embargo, en un superconductor que no es simplemente conexo puede haber flujo atrapado:



(a) $B^0 \neq 0$; $T > T_c$



(c) $B^0 = 0$; $T < T_c$

$\Longrightarrow \oint \bar{P}.\bar{dl} \neq 0$

Idea de London

$\bar{P} = q(\mu_0 \lambda_L^2 \bar{J}_s + \bar{A})$

$\bar{\nabla} \times \bar{P} = \bar{Q} = 0$ siempre

Cuantización del fluxoide:

Idea de London

Piensa al superconductor descripto por una función de onda macroscópica

$$\Psi(\bar{r}, t) = |\Psi| e^{-i\varphi(\bar{r})} \text{ con } |\Psi| = \frac{n_s}{n} \sim 1 \text{ en el fluido superconductor}$$

London propone una generalización en analogía con los niveles de un sistema con el impulso cuantizado (átomo gigante).

El impulso $\langle \bar{P} \rangle = \langle \Psi | -i\hbar\bar{\nabla} | \Psi \rangle = \hbar \bar{\nabla} \varphi$

$$\oint \bar{P}.\bar{dl} = \hbar \oint \bar{\nabla}\varphi.\bar{dl} = 2\pi n\hbar = nh \implies \oint (\mu_0 \lambda_L^2 \bar{J}_s + \bar{A}).\bar{dl} = \frac{nh}{q} = n\left(\frac{h}{q}\right) = n\phi_0$$

$$\oint \bar{A}.\bar{dl} = \phi_{total}$$

$$\boxed{\phi' = \mu_0 \lambda_L^2 \oint \bar{J}_s.\bar{dl} + \phi_{total} = n\phi_0}$$

$\oint \bar{P}.\bar{dl} \neq 0$ en recintos no simplemente conexos pero está cuantizado!

ϕ' se conoce como Fluxoide

$$\phi_0 = \frac{h}{q} = \frac{h}{2e}$$ Se supo despues

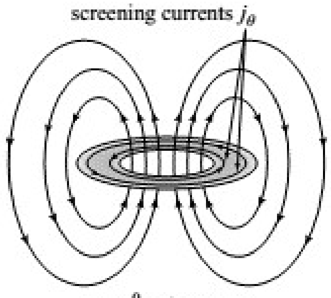
Propiedades del fluxoide:

- ϕ' está cuantizado. $\phi' = \mu_0 \lambda_L^2 \oint \bar{J}_s . \bar{dl} + \phi = n\phi_0$ con $\phi_0 = \frac{h}{q}$; ϕ esel flujo total de $\bar{B}$ a través del circuito
- ϕ' no cambia con el tiempo.

$$\frac{\partial \phi'}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial t}\left[\mu_0 \lambda_L^2 \oint \bar{J}_s . \bar{dl} + \phi\right]$$

$$\frac{\partial \bar{J}}{\partial t} = \frac{1}{\mu_0 \lambda_L^2} \bar{E} \quad \text{(L1)}$$

$$\frac{\partial}{\partial t}\left[\mu_0 \lambda_L^2 \oint \bar{J}_s . \bar{dl}\right] = \mu_0 \lambda_L^2 \oint \frac{\partial \bar{J}_s}{\partial t} . \bar{dl} = \oint \bar{E} . \bar{dl} = -\frac{\partial \phi}{\partial t} \implies \frac{\partial \phi'}{\partial t} = 0$$



(c) $B^0 = 0$; $T < T_c$

El fluxoide se conserva siempre.
Si el ancho del superconductor es $\gg \lambda_L$ se puede rodear con un circuito sin corrientes. $\implies$ se conserva el flujo atrapado.