Teoría fenomenológica de Ginzburg- Landau (GL)

Propuesta de GL

- El modelo de London propone una densidad de portadores superconductores n_s homogenea.
- En el modelo de London se introduce una función de onda macroscópica:.

$$\Psi(\bar{r}) = |\Psi| e^{-i\varphi(\bar{r})} \text{ con } |\Psi|^2 = \frac{n_s}{n} \sim 1 \text{ en el fluido superconductor}$$

- Sin embargo vimos que para describir las regiones del estado inermedio tuvimos que introducir “ ad hoc” una energía de pared N_S, γ. La formación de regiones es favorable solo si $\gamma > 0$.
- Vimos además que en los superconductores de tipo I $\lambda > \lambda_L$, y eso se puede explicar introduciendo una longitud de coherencia ξ_0 superconductora.

Para describir las inhomogeneidades, las regiones finitas en el estado intermedio en los ST1 y el estado mixto en los ST2 hace falta introducir **una escala espacial característica de variación de “la superconductividad”** $\boldsymbol{\xi_0}$**.**

Propuesta: $\Psi(\bar{r}) = |\Psi(\bar{r})| e^{-i\varphi(\bar{r})}$ con $|\Psi(\bar{r})|^2 = n_s(\bar{r})$

parámetro de orden superconductor

$n_s = 0$ en el normal y n_s maxima en $T = 0$

Formalismo de GL

Propuesta fenomenológica contemporánea a Pippard (1950-53). En 1959 Gorkov la deriva formalmente desde BCS

Parámetro de orden superconductor: $\Psi(\bar{r}) = |\Psi(\bar{r})| e^{-i\varphi(\bar{r})}$

Proponen un desarrollo de la funcional de densidad de energía libre en potencias de Ψ (en principio válida para $\Psi \ll 1$) :

En ausencia de campos y corrientes y sin considerar contornos (gradientes): $$f(T,0) = f_n(T,0) + \alpha(T)|\Psi|^2 + \frac{\beta(T)}{2}|\Psi|^4$$

En presencia de campos y corrientes y considerando gradientes:

$$f(T,\bar{A},\bar{B}) = f_n(T,0) + \alpha(T)|\Psi|^2 + \frac{\beta(T)}{2}|\Psi|^4 + \overbrace{\frac{1}{2m}|(-i\hbar\bar{\nabla} - q\bar{A})\Psi|^2}^{\frac{p^2}{2m}} + \frac{B^2}{2\mu_0}$$

Energia cinetica

$\bar{P} = -i\hbar\bar{\nabla}\Psi = \bar{p} + q\bar{A}$

Densidad de energia magnetica

Se puede ver que f es invariante ante transformaciones de Gauge

Formalismo de GL

Parámetro de orden superconductor: $\Psi(\bar{r}) = |\Psi(\bar{r})| e^{-i\varphi(\bar{r})}$

En ausencia de campos y corrientes y sin considerar contornos (gradientes): $\Delta f = f(T,0) - f_n(T,0) = \alpha(T)|\Psi|^2 + \frac{\beta(T)}{2}|\Psi|^4$

Al igual que en el modelo de Ising, esto describe una transición de fase de segundo orden.

El estado de equilibrio estará en un mínimo de ΔF . Al ser una solución homogenea alcanza con minimizar Δf:

$$\frac{\partial \Delta f}{\partial |\Psi|} = 2\alpha(T)|\Psi| + 2\beta(T)|\Psi|^3 = 2|\Psi|(\alpha(T) + \beta(T)|\Psi|^2) = 0 \begin{cases} |\Psi|_\infty = 0 & \text{Estable si } \alpha > 0 \; y \; \beta < 0 \\ |\Psi|_\infty^2 = -\dfrac{\alpha}{\beta} & \begin{cases} \alpha > 0, \beta < 0 & \text{Inestable} \\ \alpha < 0, \beta > 0 & \text{Estable} \end{cases} \end{cases}$$

$|\Psi|_\infty$ es la solución homogenea en ausencia de campos, y lejos de cualquier frontera

Formalismo de GL

Parámetro de orden superconductor: $\Psi(\bar{r}) = |\Psi(\bar{r})| e^{-i\varphi(\bar{r})}$

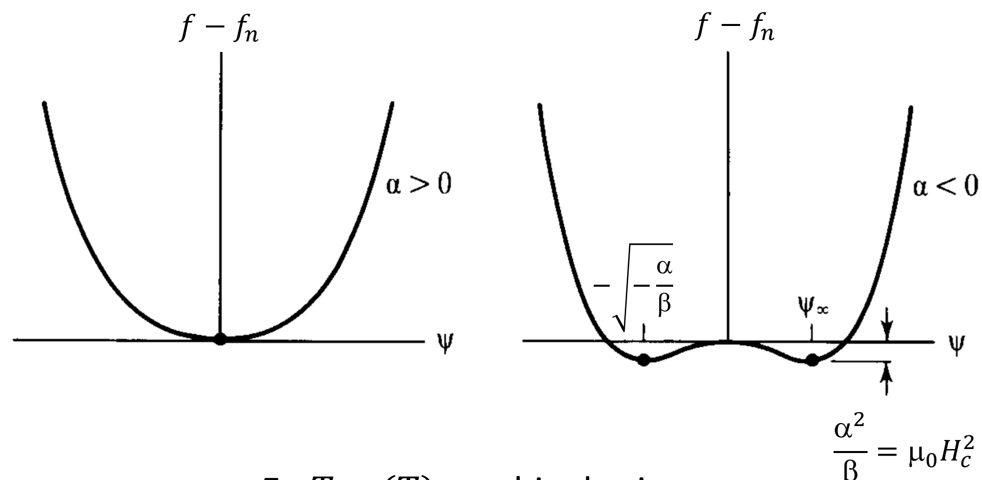
En ausencia de campos y corrientes, la solucion homogénea es:

$$|\Psi|_\infty = \begin{cases} 0 & \text{Estable si } \alpha > 0 \\ -\sqrt{-\dfrac{\alpha}{\beta}} & \begin{cases} \alpha > 0, \beta < 0 & \text{Inestable} \\ \alpha < 0, \beta > 0 & \text{Estable} \end{cases} \end{cases}$$

$$\Delta f = \alpha(T)|\Psi|^2 + \frac{\beta(T)}{2}|\Psi|^4$$

$$\Rightarrow \Delta f_{estable} = \begin{cases} 0 & \text{si } \alpha > 0 \\ -\dfrac{\alpha^2}{2\beta} & \text{si } \alpha < 0, \beta > 0 \end{cases}$$

Pero además: $\Delta f_{estable} = -\dfrac{\mu_0}{2} H_c^2 \quad \Rightarrow \boxed{\dfrac{\alpha^2}{\beta} = \mu_0 H_c^2}$

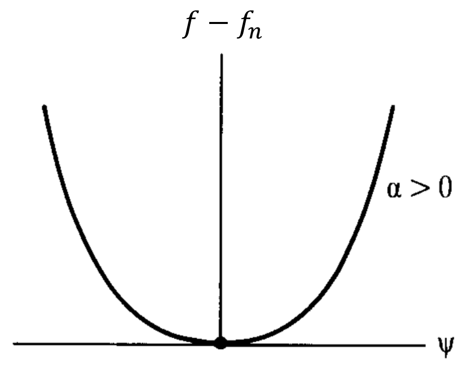


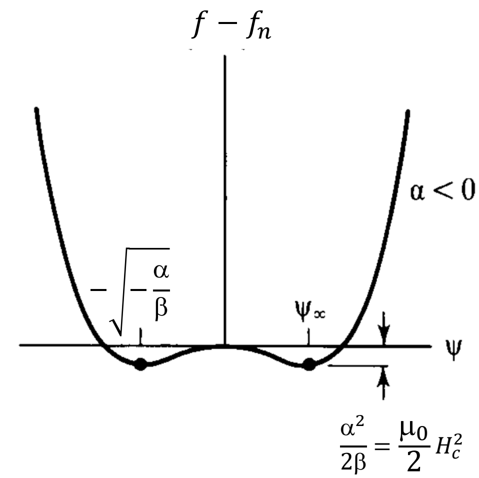
En T_c $\alpha(T)$ cambia de signo

Formalismo de GL

Parámetro de orden superconductor: $\Psi(\bar{r}) = |\Psi(\bar{r})| e^{-i\varphi(\bar{r})}$

$$\Delta f_{estable} = \begin{cases} 0 & \text{si } \alpha > 0 \\ -\dfrac{\alpha^2}{2\beta} & \text{si } \alpha < 0, \beta > 0 \end{cases}$$





En T_c $\alpha(T)$ cambia de signo

$$f_{estable} = \begin{cases} f_n & \text{si } \alpha > 0 \\ f_s = f_n - \dfrac{\alpha^2}{2\beta} = f_n - \dfrac{\mu_0}{2} H_c^2 & \text{si } \alpha < 0, \beta > 0 \end{cases}$$

Veamos que en este límite se recupera la solución de London cerca de T_c.

Formalismo de GL y modelo de London

Caso general: $$f(T,\bar{A},\bar{B}) = f_n(T,0) + \alpha(T)|\Psi|^2 + \frac{\beta(T)}{2}|\Psi|^4 + \overbrace{\frac{1}{2m}|(i\hbar\bar{\nabla} + q\bar{A})\Psi|^2}^{\frac{p^2}{2m}\ \text{Energia cinetica}} + \frac{B^2}{2\mu_0}$$

con $\Psi(\bar{r}) = |\Psi(\bar{r})|e^{-i\varphi(\bar{r})}$

Veamos con un poco más en detalle en el término de energía cinética:

Con unos pasos algebraicos se puede ver que:

$$\frac{1}{2m}|(i\hbar\bar{\nabla} + q\bar{A})\Psi|^2 = \frac{1}{2m}[\underbrace{(\hbar\bar{\nabla}\varphi - q\bar{A})^2|\Psi|^2}_{\text{Energia cinetica asociada a las } J\text{. Puede estar aunque } |\Psi|^2 \text{ sea uniforme}} + \underbrace{\hbar^2(\bar{\nabla}|\Psi|)^2}_{\text{Energia adicional asociada a la variacion espacial de } |\Psi|^2}]$$

Recordemos que en el modelo de London: $\bar{P}_s = \hbar\bar{\nabla}\varphi = m\bar{v}_s + q\bar{A}$

En el gauge de London, en un SC simplemente conexo: $\bar{P}_s = 0$ y $\bar{\nabla}\varphi = 0$, de modo que $\bar{J} = -\frac{\bar{A}}{\mu_0\lambda_L^2}$

$\Longrightarrow$ en la medida de London, el termino de energía cinética en un SC simplemente conexo con $|\Psi|^2$ homogéneo queda:

$$\frac{1}{2m}q^2A^2|\Psi|^2 = n_s\frac{p_s^2}{2m_s} \Longrightarrow \qquad |\Psi|_\infty^2 = n_s = \frac{m_s}{\mu_0 q^2\lambda_L^2}$$

Formalismo de GL y modelo de London

$$|\Psi|^2_\infty = n_s = \frac{m_s}{\mu_0 q^2 \lambda_L^2}$$

Vemos que $|\Psi|^2$ tiene unidades de densidad.

Se supo luego:
$q = 2e$, e carga del electrón, negativa
$n_s = n_e/2$, n_e densidad de electrones apareados. Depende de T y del compuesto, el valor no es obvio.
$m_s \sim 2m_e$, m_e masa del electron. No siempre, ya que las interacciones pueden dar lugar a una masa efectiva.

Convención:
$q = 2e$, e carga del electrón, negativa
$m_s \sim 2m_e$, m_e masa del electron. No siempre, ya que las interacciones pueden dar lugar a una masa efectiva.
$n_s = n_e/2$, lo que tenga que valer para obtener λ experimental tal que:

$$\lambda^2 = \frac{m_s}{\mu_0 q^2 n_s} = \frac{2m_e}{\mu_0 (2e)^2 \frac{n_e}{2}} = \frac{m_e}{\mu_0 e^2 n_e}$$

No cambia considerando electrones o pares de electrones.

Notacion a partir de ahora: $\lambda^2 = \dfrac{m}{\mu_0 q^2 n}$ $\quad q = 2e \quad m = 2m_e, \quad n = n_e/2$

Formalismo de GL y modelo de London

$$|\Psi|^2_\infty = n = \frac{m}{\mu_0 q^2 \lambda^2}$$

$$\Delta f(T,0) = \alpha(T)|\Psi|^2 + \frac{\beta(T)}{2}|\Psi|^4$$

$$|\Psi|^2_\infty = -\frac{\alpha}{\beta}$$

$$\Delta f_{estable}(T,0) = -\frac{\alpha^2}{2\beta} \Rightarrow \frac{\alpha^2}{\beta} = \mu_0 H_c^2$$

$$\Rightarrow \alpha = \mu_0 H_c^2\left(\frac{\beta}{\alpha}\right) = -\frac{\mu_0 H_c^2}{|\Psi|^2_\infty} \Rightarrow \boxed{\alpha(T) = -\frac{\mu_0^2 e^2 H_c^2(T)\lambda^2(T)}{m}}$$

Y se puede ver que: $\boxed{\beta(T) = \frac{\mu_0^3 e^4 H_c^2(T)\lambda^4(T)}{m^2}}$

Usando las relaciones empíricas: $H_c(T) = H_c(0)\left[1-\left(\frac{T}{T_c}\right)^2\right]$ $\lambda(T) = \lambda(0)\left[1-\left(\frac{T}{T_c}\right)^4\right]^{-1/2}$

$t = \frac{T}{T_c}$ Resulta: $\alpha(T) \propto \frac{t^2-1}{1+t^2}$ Cambia de signo en $T = T_c$ $\beta(T) \propto \frac{1}{1+t^2}$ Aprox cte en $T = T_c$

Formalismo de GL: caso general

$$\Delta f(\bar{r}, T, \bar{A}, \bar{B}) = \alpha(T)|\Psi(\bar{r})|^2 + \frac{\beta(T)}{2}|\Psi(\bar{r})|^4 + \frac{1}{2m}\left|\left(i\hbar\bar{\nabla} + q\bar{A}(\bar{r})\right)\Psi(\bar{r})\right|^2 + \frac{B^2(\bar{r})}{2\mu_0}$$

$$\Delta F(T, \bar{A}, \bar{B}) = \iiint \Delta f(\bar{r}, T, \bar{A}, \bar{B}) d^3\bar{r}$$

Hay que minimizar ΔF o ΔG respecto de $\Psi(\bar{r})$ y $\bar{A}(\bar{r})$

Es un problema complicado, ya que hay que minimizar una Funcional, que es la integral de una funcional local

Teorema de Euler-Lagrange:

Dada una funcional $\mathcal{F}\left(g(\bar{r})\right) = \iiint f\left(x_i, g, \frac{\partial g}{\partial x_i}\right) d^3\bar{r}$; $\bar{r} = (x_1, x_2, x_3)$, y llamo $\dot{g}_i = \frac{\partial g}{\partial x_i}$

Si $\mathcal{F}$ es un extremo $\Longrightarrow$ $\dfrac{\partial f}{\partial g} = \dfrac{\partial}{\partial x_i}\dfrac{\partial f}{\partial \dot{g}_i}$

En el caso de GL: ΔF es la integral de Δf A T fija $\Delta f(\bar{r})$ es función de $\Psi(\bar{r})$, $\bar{\nabla}\Psi$, $\bar{A}(\bar{r})$ y $\bar{\nabla} \times \bar{A}$

Entonces en el mínimo de ΔF: $\dfrac{\partial f}{\partial \Psi} = \dfrac{\partial}{\partial x_i}\dfrac{\partial f}{\partial \dot{\Psi}_i}$ Y lo mismo aplica para las componentes de $\bar{A}$

Ecuaciones de Ginzburg Landau

$$\Delta f(\bar{r},T,\bar{A},\bar{B}) = \alpha(T)|\Psi(\bar{r})|^2 + \frac{\beta(T)}{2}|\Psi(\bar{r})|^4 + \frac{1}{2m}\left|\left(i\hbar\bar{\nabla} + q\bar{A}(\bar{r})\right)\Psi(\bar{r})\right|^2 + \frac{B^2(\bar{r})}{2\mu_0}$$

$$\Delta F(T,\bar{A},\bar{B}) = \iiint \Delta f(\bar{r},T,\bar{A},\bar{B})d^3\bar{r}$$

Hay que minimizar ΔF o ΔG respecto de $\Psi(\bar{r})$ y $\bar{A}(\bar{r})$

En el mínimo de ΔF: $\dfrac{\partial f}{\partial \Psi} = \dfrac{\partial}{\partial x_i}\dfrac{\partial f}{\partial \dot{\Psi}_i}$ Con $\Psi = |\Psi(\bar{r})|e^{-i\varphi(\bar{r})}$ Y lo mismo aplica para las componentes de $\bar{A}$

Esto lleva a las **Ecuaciones de Ginzburg Landau**, que son dos ecuaciones diferenciales no lineales acopladas:

$$\boxed{\alpha\Psi + \beta|\Psi|^2\Psi + \frac{1}{2m}(i\hbar\bar{\nabla} + q\bar{A})^2\Psi = 0}$$

1ra Ecuacion de GL

$$\bar{J} = \frac{1}{\mu_0}\bar{\nabla}\times\bar{B} = -\frac{q}{2m}i\hbar(\Psi^*\bar{\nabla}\Psi - \Psi\bar{\nabla}\Psi^*) - \frac{q}{m}\Psi^*\Psi\bar{A}$$

Hay que resolver estas dos ecuaciones acopladas con c.c.

o

$$\boxed{\bar{J} = \frac{q}{m}|\Psi|^2(\hbar\bar{\nabla}\varphi - q\bar{A})}$$

2da Ecuacion de GL

Ecuaciones de Ginzburg Landau: caso unidimensional

Veamos un ejemplo de caso simple: problema unidimensional (por ejemplo, plano semi infinito SC)

$$\Delta f = \alpha|\Psi(x)|^2 + \frac{\beta}{2}|\Psi(x)|^4 + \frac{1}{2m}\left(i\hbar\frac{\partial}{\partial x} + q\bar{A}(x)\right)^2 \Psi(x)^2 + \frac{B^2(x)}{2\mu_0}$$

Con $\Psi = |\Psi(x)|e^{-i\varphi(x)}$ Se puede mostrar que en el caso unidimensional hay un gauge en el cual Ψ es real (φ=0,π)

$$\Delta f = \alpha\Psi^2 + \frac{\beta}{2}\Psi^4 + \frac{1}{2m}\left(i\hbar\frac{\partial\Psi}{\partial x} + q\bar{A}\Psi\right)^2 + \frac{B^2}{2\mu_0}$$

En ausencia de campos: $$\Delta f = \alpha\Psi^2 + \frac{\beta}{2}\Psi^4 - \frac{\hbar^2}{2m}\left(\frac{\partial\Psi}{\partial x}\right)^2$$

1) Veamos como se deduce para este caso sencillo la 1ra ecuacion de GL:

$$\Delta F(T,\bar{A},\bar{B}) = \iiint \Delta f(\bar{r},T,\bar{A},\bar{B})d^3\bar{r}$$

En el mínimo de ΔF: $$\frac{\partial f}{\partial\Psi} = \frac{\partial}{\partial x}\frac{\partial f}{\partial\dot{\Psi}}$$

$$\frac{\partial f}{\partial\Psi} = 2\alpha\Psi + 2\beta\Psi^3$$

$$\frac{\partial f}{\partial\dot{\Psi}} = -\frac{\hbar^2}{m}\dot{\Psi} \qquad \frac{\partial}{\partial x}\frac{\partial f}{\partial\dot{\Psi}} = -\frac{\hbar^2}{m}\frac{\partial^2\Psi}{\partial x^2}$$

$$\boxed{\alpha\Psi + \beta\Psi^3 + \frac{\hbar^2}{2m}\frac{\partial^2\Psi}{\partial x^2} = 0}$$

Ecuacion de GL unidimensional sin campos

Ecuaciones de Ginzburg Landau: caso unidimensional

$$\boxed{\alpha\Psi + \beta\Psi^3 + \frac{\hbar^2}{2m}\frac{\partial^2\Psi}{\partial x^2} = 0}$$

Ecuacion de GL unidimensional sin campos $\quad |\Psi|^2_\infty = -\frac{\alpha}{\beta}$

Divido por $|\Psi|_\infty$ y llamo $k = \frac{\Psi}{|\Psi|_\infty} = -\frac{\beta}{\alpha}\Psi = \frac{\beta}{|\alpha|}\Psi \Longrightarrow \quad -\alpha\left(k - k^3 + \frac{\hbar^2}{2m|\alpha|}\frac{\partial^2 k}{\partial x^2}\right) = 0$

Queda la ecuación: $\quad k - k^3 + \xi^2\frac{\partial^2 k}{\partial x^2} = 0 \quad$ con $\quad \boxed{\xi^2 = \frac{\hbar^2}{2m|\alpha|}}$

La condicion de contorno de un plano semi infinito superconductor es: $\Psi(x=0) = 0$ y $\frac{\partial\Psi}{\partial x}(x=0) = 0$

Ver que la función: $\quad k = \frac{\Psi(x)}{|\Psi|_\infty} = tanh\left(\frac{x}{\sqrt{2}\xi}\right) \quad$ cumple con la ecuacion diferencial y las cc

Longitud de coherencia

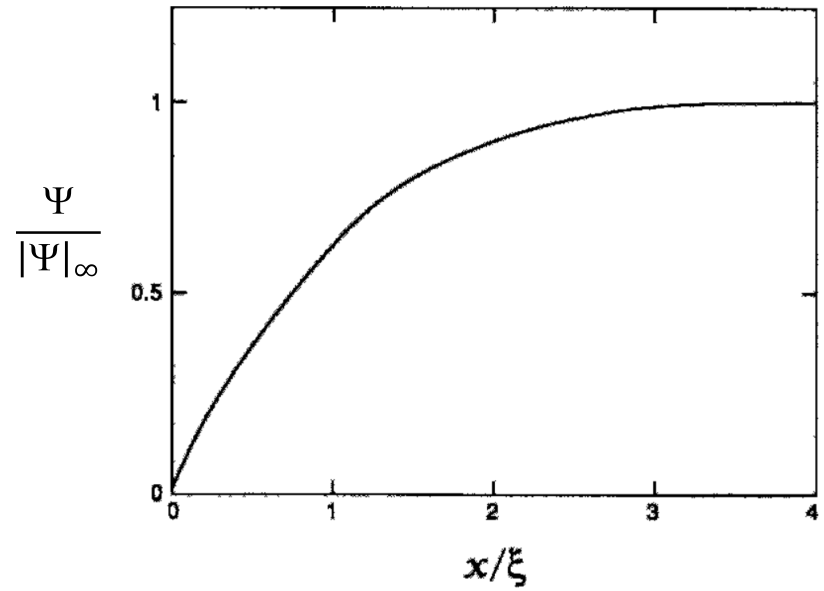
$$\boxed{\alpha\Psi + \beta\Psi^3 + \frac{\hbar^2}{2m}\frac{\partial^2\Psi}{\partial x^2} = 0}$$

Ecuacion de GL unidimensional sin campos $|\Psi|_\infty^2 = -\frac{\alpha}{\beta}$

llamo $k = \frac{\Psi}{|\Psi|_\infty}$ y obtenemos la solucion para el plano semi-infinito:

$$k = \frac{\Psi(x)}{|\Psi|_\infty} = tanh\left(\frac{x}{\sqrt{2}\xi}\right)$$

con $\boxed{\xi^2 = \frac{\hbar^2}{2m|\alpha|}}$ $\xi(\mathrm{T})$ diverge en T_c



Recordemos: $\phi_0 = \frac{h}{q}$ y $\alpha(T) = -\frac{\mu_0^2 e^2 H_c^2(T)\lambda^2(T)}{m}$

$$\boxed{\xi = \frac{\phi_0}{2\pi\mu_0 H_c \lambda}}$$