Electrodinámica no local

Repasemos:

Notación:
$\mathbf{j} \equiv \bar{J}; \mathbf{E} \equiv \bar{E}$; etc

Problema electromagnético cuasiestacionario en un conductor:

Ecuación constitutiva: $\bar{E}(\bar{r}) = \rho\bar{J}(\bar{r})$o $\bar{J}(\bar{r}) = \sigma\bar{E}(\bar{r})$; ρ real no depende de $\bar{J}$

Da como resultado el apantallamiento de campos alternos en la longitud: $\delta = \sqrt{\frac{2}{\mu_0\sigma\omega}} = \sqrt{\frac{2\rho}{\mu_0\omega}}$

En el Modelo de Drude, la ecuación constitutiva surge de suponer $t \gg \tau$ y $\bar{E}$ uniforme localmente ($\bar{E}(\bar{r})$no cambia en el intervalo τ entre choques, ni en el espacio de integración $\delta\bar{r}$ usado para obtener $\langle\bar{p}\rangle_\infty = -e\bar{E}\tau$.

Límite Limpio:

En conductores muy limpios estas condiciónes pueden no cumplirse ⟹ se observa un apantallamiento anómalo.

El apantallamiento anómalo se logró modelizar, proponieno para ese límite una electrodinámica no local, de lo que resulta:

$$\mathbf{j}(\mathbf{r}) = \frac{3\sigma}{4\pi\ell}\iiint \frac{\left[(\mathbf{r}-\mathbf{r}')\cdot\mathbf{E}(\mathbf{r}')\right]}{|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|^4}(\mathbf{r}-\mathbf{r}')\,\mathrm{e}^{-\frac{|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|}{\ell}}\,\mathrm{d}^3r'$$

donde ℓ es el libre camino medio entre colisiones de los portadores

En esta integral sólo pesan los puntos en $\boldsymbol{r}'$ tal que $|\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}'| \lesssim \ell$. Por lo tanto, el resultado va a ser igual al local si $\boldsymbol{E}$ es uniforme en distancias del orden de ℓ**.**

Modelo de Pippard:

Notación:
$\mathbf{j} \equiv \bar{J}; \mathbf{E} \equiv \bar{E}$; etc

1950: Ya existía desde hacía tiempo el modelo de London. Hacía poco se había desarrollado la electrodinámica no local en conductores. No se habia formulado BCS ni GL y no existía aun la nocion de par de cooper.

Pippard observa que en muchos superconductores λ experimental depende del nivel de impurezas y que el valor incluso en muestras limpias no coincide con λ_L. Se inspira en la explicación del "apantallamiento anomalo" en los conductores limpios.

Propone reemplazar la expresión local del modelo del London (en el Gauge de London) :

$$\bar{J} = -\frac{\bar{A}}{\mu_0 \lambda_L^2} = -\frac{n_s q^2}{m}\bar{A}$$

Por:

$$\mathbf{j}(\mathbf{r}) = -\frac{n_s e^2}{m} K \iiint \frac{\left[(\mathbf{r}-\mathbf{r}')\cdot\mathbf{A}(\mathbf{r}')\right]}{|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|^4}(\mathbf{r}-\mathbf{r}')\, e^{-\frac{|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|}{\xi_p}}\, d^3r$$

En esta integral sólo pesan los puntos en $\boldsymbol{r}'$ tal que $|\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}'| \lesssim \xi_p$, que es la "longitud característica de Pippard".
Por lo tanto, el resultado va a ser igual al local si $\boldsymbol{A}$ es uniforme en distancias del orden de ξ_p.

Cuándo sucede eso? Tiene algo que ver con las impurezas? SI Y NO.

Longitud de Coherencia y no localidad

Notación:
$\mathbf{j} \equiv \bar{J}; \mathbf{E} \equiv \bar{E}$; etc

Hay una longitud caracteritica ξ que Pippard propuso “análoga” al libre camino medio ℓ en los conductores.

Hoy sabemos que, más allá de las impurezas, hay una longitud característica ξ_0 asociada al tamaño característico del par de Cooper en la teoría BCS y a la longitud de coherencia del parametro de orden superconductor en el formalismo de GL.

La escala típica de variación del potencial vector $\mathbf{A}$ es λ. $\Longrightarrow \mathbf{A}(\mathbf{r})$ puede depender de $\mathbf{r}$ en un volumen $\sim {\xi_0}^3$ si $\lambda_L < \xi_0$

Esto pasa en todos los superconcutores de tipo I!

Por lo tanto, en los superconductores limpios de tipo I, las ecuaciones de London son no locales, y valdrá:

$$\mathbf{j}(\mathbf{r}) = -\frac{n_s e^2}{m} K \iiint \frac{\left[(\mathbf{r}-\mathbf{r}')\cdot \mathbf{A}(\mathbf{r}')\right]}{|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|^4} (\mathbf{r}-\mathbf{r}')\, e^{-\frac{|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|}{\xi_0}} \, d^3 r \quad = -\frac{1}{\mu_0 \lambda_L^2} \langle \mathbf{A} \rangle_{\xi_0}(\mathbf{r})$$

donde se eligió $K = \frac{3}{4\pi\xi_0}$ para obtener el resultado de London en el limite local.

Las ecuaciones de London siguen siendo válidas, pero $\mathbf{J}(\mathbf{r})$está determinada por el valor medio de $\mathbf{A}$ en un entorno de $\mathbf{r}$.

Notación:
$\mathbf{j} \equiv \bar{J}; \mathbf{E} \equiv \bar{E}$; etc

Longitud de Coherencia y no localidad

$$\mathbf{J}(\mathbf{r}) = -\frac{1}{\mu_0 \lambda_L^2} \langle \mathbf{A} \rangle_{\xi_0}(\mathbf{r})$$

- En el límite $\xi_0 \ll \lambda_L$ (veremos que estos son los tipo II extremos): $\langle \mathbf{A} \rangle_{\xi_0}(\mathbf{r}) = \mathbf{A}(\mathbf{r})$

$$\Longrightarrow \mathbf{J}(\mathbf{r}) = -\frac{1}{\mu_0 \lambda_L^2} \mathbf{A}(\mathbf{r}) \qquad \boxed{\lambda = \lambda_L}$$

- En el limite $\xi_0 \gg \lambda_L$, (veremos que son muchos tipo I) se puede ver que: $\langle \mathbf{A} \rangle_{\xi_0}(\mathbf{r}) \sim \frac{\lambda}{\xi_0} \mathbf{A}(\mathbf{r})$

$$\Longrightarrow \mathbf{J}(\mathbf{r}) = -\frac{1}{\mu_0 \lambda_L^2} \frac{\lambda}{\xi_0} \mathbf{A}(\mathbf{r}) = -\frac{1}{\mu_0 \lambda^2} \mathbf{A}(\mathbf{r}) \qquad \boxed{\lambda = \left(\lambda_L{}^2 \xi_0\right)^{1/3} > \lambda_L}$$

ξ_0/λ_L	3	4	5	6
λ/λ_L	1.442	1.587	1.710	1.817

Limite sucio

Notación:
$\mathbf{j} \equiv \bar{J}; \mathbf{E} \equiv \bar{E}$; etc

Qué ocurre si el libre camino medio electronico ℓ es menor que ξ_0?

En el limite limpio ($\ell \gg \xi_0$) teniamos:

$$\mathbf{j}(\mathbf{r}) = -\frac{n_s e^2}{m} K \iiint \frac{[(\mathbf{r}-\mathbf{r'})\cdot\mathbf{A}(\mathbf{r'})]}{|\mathbf{r}-\mathbf{r'}|^4}(\mathbf{r}-\mathbf{r'})\,\mathrm{e}^{-\frac{|\mathbf{r}-\mathbf{r'}|}{\xi_0}}\,\mathrm{d}^3 r$$

$$\mathbf{j}(\mathbf{r}) = -\frac{n_s e^2}{m}\left\{\frac{3}{4\pi\xi_0}\iiint\left[\frac{(\mathbf{r}-\mathbf{r'})\cdot\mathbf{A}(\mathbf{r'})}{|\mathbf{r}-\mathbf{r'}|}\,\frac{(\mathbf{r}-\mathbf{r'})}{|\mathbf{r}-\mathbf{r'}|}\right]\left[\frac{1}{|\mathbf{r}-\mathbf{r'}|^2}\,\mathrm{e}^{-\frac{|\mathbf{r}-\mathbf{r'}|}{\xi_0}}\right]\mathrm{d}^3 r'\right\}$$

En la propuesta de Pippard:

$$\mathbf{j}(\mathbf{r}) = -\frac{n_s e^2}{m}\left\{\frac{3}{4\pi\xi_0}\iiint\left[\frac{(\mathbf{r}-\mathbf{r'})\cdot\mathbf{A}(\mathbf{r'})}{|\mathbf{r}-\mathbf{r'}|}\,\frac{(\mathbf{r}-\mathbf{r'})}{|\mathbf{r}-\mathbf{r'}|}\right]\left[\frac{1}{|\mathbf{r}-\mathbf{r'}|^2}\,\mathrm{e}^{-\frac{|\mathbf{r}-\mathbf{r'}|}{\xi_p}}\right]\mathrm{d}^3 r'\right\}$$

Con ξ_p la "longitud de Pippard", menor a medida que aumenta el nivel de impurezas.

$$\frac{1}{\xi_p} = \frac{1}{\xi_0} + \frac{1}{\ell}$$

En el limite $\ell \ll \xi_0$ y $\ell \ll \lambda_L$ la respuesta vuelve a ser local, pero $\lambda = \lambda_L\sqrt{\frac{\xi_0}{\ell}}$

Limite limpio y límite sucio

Pure superconductor		Dirty Superconductor
Type II	**Type I**	**Always Type II**
$\xi_0 < \lambda_L$	$\xi_0 > \lambda_L$	$\ell \ll \lambda_L \quad \ell \ll \xi_0$
$\ell \gg \xi_0$	$\ell \gg \lambda_L$	
$\xi_P \approx \xi_0 < \lambda_L$	$\xi_P \approx \xi_0 > \lambda_L$	$\xi_P \approx \ell$
$\lambda \approx \lambda_L$	$\lambda \approx (\lambda_L^2 \xi_0)^{1/3}$	$\lambda \approx \lambda_L \sqrt{\xi_0/\ell}$

Manguin- Kahn, *Superconductivity (2017)*