

# SUPERCONDUCTIVIDAD

## GUÍA 1: CONDUCTORES Y MEDIOS MAGNÉTICOS

---

### Modelo de Drude

- Se tiene un metal con una densidad  $n$  de portadores con carga  $e$  y masa  $m$ , en presencia de un campo eléctrico uniforme  $\mathbf{E}$ . El tiempo medio entre choques es  $\tau$ .
  - Usando el modelo de Drude, estime la probabilidad de que el tiempo entre dos choques sucesivos de un mismo electrón se encuentre en el intervalo diferencial de tiempo entre  $t$  y  $t + dt$ .
  - Calcule la energía promedio perdida como resultado de las colisiones por electrón, por unidad de tiempo. Muestre que la potencia perdida en un cable de resistencia  $R$  por el que circula una corriente  $I$  es  $I^2 R$ .
  - Escriba la relación constitutiva entre  $\mathbf{E}$  y  $\mathbf{J}$  para un conductor perfecto (sin pérdidas).
- Considere un conductor no magnético por el cual circula una densidad de corriente  $\mathbf{J} = J_x \hat{x}$ , sometido a un campo magnético externo  $\mathbf{H} = H_z \hat{z}$ . Utilizando el modelo de Drude:
  - muestre que en el régimen estacionario el campo eléctrico en el conductor posee una componente no nula en  $\hat{y}$ ;
  - exprese el coeficiente Hall  $R_H = E_y/(J_x B_z)$  en términos de la densidad y la carga de los portadores.

### Magnetización y susceptibilidad

- Un material lineal sometido a un campo alterno  $\mathbf{H}(t) = \mathbf{H}_0 e^{i\omega t}$  exhibe una magnetización dependiente del tiempo  $\mathbf{M}(t) = \chi_{ac} \mathbf{H}(t)$ , donde  $\chi_{ac} = \chi' - i\chi''$  es la *susceptibilidad alterna*. Calcule la potencia media disipada por unidad de volumen en el material.
- Para un material magnético no lineal sometido a un campo  $H(t) = H_{dc} + H_{ac} e^{i\omega t}$ , ¿bajo qué condiciones  $\chi_{ac} \simeq \left. \frac{dM}{dH} \right|_{H_{dc}}$  ?
- Se tiene una placa conductora infinita de espesor  $2d$ , resistividad  $\rho$  no magnética ( $\mu = \mu_0$ ), sometida a un campo externo uniforme  $\mathbf{H}(t) = \mathbf{H}_0 e^{i\omega t}$  paralelo a la interfase, con  $\omega \ll 1/\tau_{Drude}$ .
  - Calcule  $\mathbf{B}(\mathbf{r}, t)$  y  $\mathbf{J}(\mathbf{r}, t)$  en el interior del conductor (basta con encontrar las expresiones complejas) y muestre ambos decaen en una distancia característica  $\delta = \sqrt{2\rho/\omega\mu}$ , llamada espesor pelicular (o *skin depth*).

- b. Calcule la magnetización media  $\bar{\mathbf{M}}(t) = \frac{1}{V} \int \mathbf{M}(\mathbf{r}, t) dV$  y halle las componentes real e imaginaria de la susceptibilidad alterna  $\chi_{ac}$  tal que  $\bar{\mathbf{M}}(t) = \chi_{ac} \mathbf{H}(t)$ . *Ayuda:* no expanda el argumento complejo de las funciones hiperbólicas hasta el final, donde puede usar que

$$\tanh [(1 + i)x] = \frac{\sinh(2x) + i \sin(2x)}{\cosh(2x) + \cos(2x)}.$$

- c. Muestre que en el límite  $d \ll \delta$  vale  $\chi_{ac} \rightarrow 0$  y en el límite  $d \gg \delta$ ,  $\chi_{ac} \rightarrow -1$ . Para un dado conductor, ¿a qué límite de frecuencia corresponde cada caso?
- d. Grafique cualitativamente las componentes de la susceptibilidad alterna real e imaginaria  $\chi'$  y  $\chi''$  en función de  $\delta/d$ . ¿Para qué valores de  $\delta/d$  resulta máxima  $\chi''$ ? Discuta su significado.

## Medición de propiedades magnéticas

6. Sobre el eje de una espira de radio  $a$  se sitúa una muestra de magnético  $\mathbf{m}$  y dimensiones características  $d \ll a$ , a una distancia  $z$  del plano de la espira.

- a. Calcule el flujo magnético  $\Phi(z)$  que atraviesa la espira. *Ayuda:* puede ahorrarse integrales complicadas si modela la muestra como una pequeña espira y explota la simetría de las inductancias mutuas.
- b. Muestre que si la espira forma parte de un circuito puramente inductivo y la muestra se desplaza a lo largo del eje, la corriente instantánea en el circuito resulta lineal con  $\Phi[z(t)]$

7. Un transformador diferencial (fig. 1) consta de un solenoide (primario) de longitud  $l$ . Este encierra dos bobinas planas (secundarios) idénticas, de radio  $a$ , coaxiales y simétricamente dispuestas respecto del solenoide a una distancia  $b \ll l$  entre sí. Ambos secundarios se conectan en serie, pero en sentidos opuestos. Se coloca una muestra de dimensiones  $d \ll a, b$  en el centro de uno de los secundarios y se alimenta el primario con una corriente alterna.

- a. Exprese la señal medida a la salida de los secundarios en función de  $\chi_{ac}$  y demás parámetros que crea relevantes. Considere  $l \gg a, b$ . Si la respuesta es lineal, encuentre las componentes de la señal en fase y en contrafase con la corriente del primario.
- b. ¿Es posible realizar esta medición con un único secundario? Discuta las ventajas de utilizar ambos.

8. Un gradiómetro axial de derivada segunda está formado por cuatro espiras planas dispuestas como se muestra en la fig. 2. Dichas espiras se conectan a un circuito puramente inductivo a través del cual se registra la corriente inducida mientras una muestra de susceptibilidad magnética  $\chi$  y volumen  $V \ll a^3$  se desplaza a lo largo del eje del sistema. Todo el conjunto se encuentra inmerso en un campo externo  $\mathbf{H}$  uniforme y paralelo al eje.

- a. Usando los resultados del problema 6, halle la corriente total inducida para cada posición  $z$  de la muestra. Proponga como medir el momento magnético de la muestra con este sistema.
- b. Muestre que el flujo magnético neto en el conjunto de espiras del gradiómetro solo es sensible a  $\frac{d^2 B_z}{dz^2}$ , o derivadas de orden mayor.
- c. Analice el efecto que generaría sobre la corriente instantánea en el circuito una pequeña deriva temporal del campo aplicado, con  $\Delta H \ll H$ . Compare esta situación con la misma medición realizada utilizando una sola bobina.

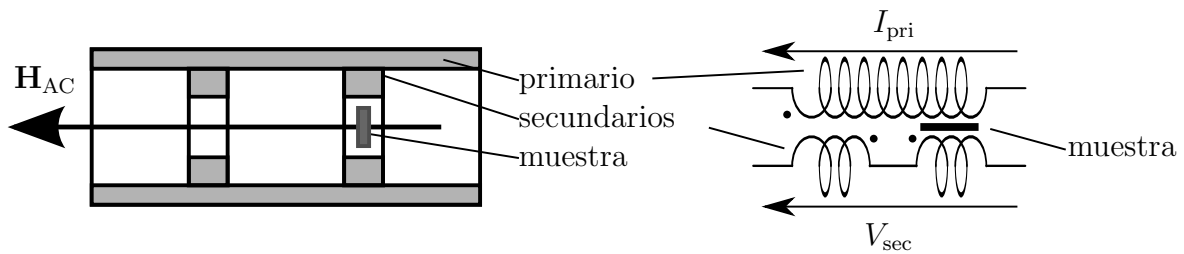


Figura 1: Vista en corte y esquema eléctrico de un transformador diferencial.

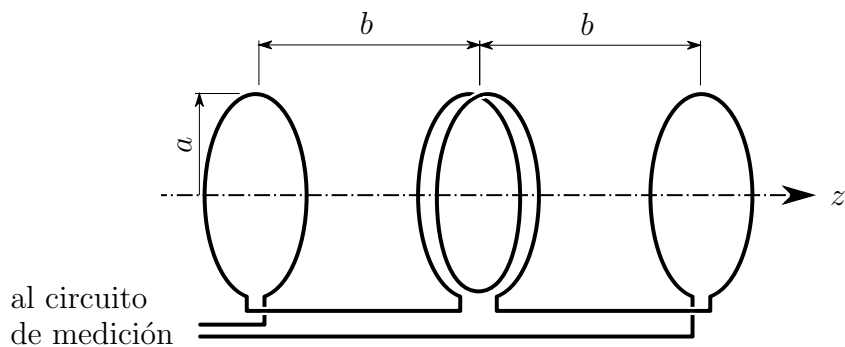


Figura 2: Esquema de un gradiómetro.