Estas integrales son cero salvo cuando

$$l = \begin{cases} k-m \\ k+m \\ -k-m \\ -k+m \end{cases}$$ y en esos casos dan $\pm 1/4$

$$\Rightarrow \boxed{\dot{a}_k = \underbrace{-k^2\pi^2 V a_k}_{\text{disipación}} - \frac{\pi}{\sqrt{2}} \sum_m m a_m \underbrace{\left(a_{k-m} + a_{k+m} - a_{-k-m} - a_{-k+m}\right)}_{\text{acoplamiento}}}$$

Es un sistema de ODEs acopladas no linealmente.

Truncuemos a 3 modos ($k=1,2,3$)

$$\begin{cases} \dot{a}_1 = -\pi^2 V a_1 + \frac{\pi}{\sqrt{2}}\left(a_1 a_2 + a_2 a_3\right) \\ \dot{a}_2 = -4\pi^2 V a_2 - \frac{\pi}{\sqrt{2}}\left(a_1^2 - 2a_1 a_3\right) \\ \dot{a}_3 = -9\pi^2 V a_3 - \frac{\pi}{\sqrt{2}} 3 a_1 a_2 \end{cases}$$

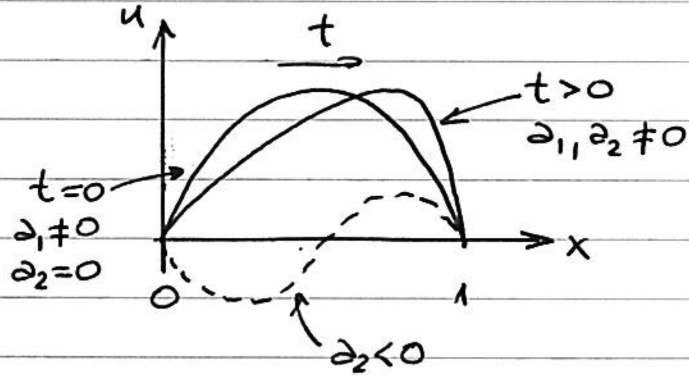
Ec. ordinarias autónomas

orden más grande, más disipación

Este sistema se parece al de Lorenz, y no es casual (Lorenz consideró PDEs con no linealidades parecidas).

Si a $t=0$ $u = A \operatorname{sen}(\pi x)$, empezamos solo con $a_1 \neq 0$. Pero inmediatamente después

$$a_2 \approx -\frac{\pi}{\sqrt{2}} a_1^2 \Delta t$$



En este caso si V no es grande, nada nos asegura que no se exciten más modos. Hay casos en las que V, las cdc. o las simetrías hacen que existan unos pocos modos dominantes en la dinámica. Pero este método no nos dice como "elegir" a esos modos.

Descomposición ortogonal empírica

La POD ("proper orthogonal decomposition") es un método para resolver este problema usando datos empíricos, que pueden venir de simulaciones o experimentos. Tiene diferentes nombres (POD, descomposición de Karhunen-Loève, análisis de componentes principales) y en espacios vectoriales discretos es equivalente a SVD. Fue introducida en simultáneo en diferentes problemas por Lumley, Loève, Karhunen y Pougachev.

La idea es construir una base φ_j ortogonal en base a datos que sea óptima (ya veremos en qué sentido), de forma tal que esos modos capturen las estructuras dominantes en la solución. La POD puede usarse para análisis de datos o para luego hacer una proyección de Galerkin truncando a unos pocos modos y conociendo el error asociado a lo que se tira.

Supongamos que tenemos una medición (o una solución) $u(\underline{x},t)$ (esto puede generalizarse para un conjunto de mediciones $\{u^k\}$).

Queremos una descomposición truncada a N modos

$$u_N(\underline{x},t) = \sum_{j=1}^{N} a_j(t)\,\varphi_j(\underline{x})$$

que sea <u>mejor</u> que cualquier otra descomposición usando otra base.

Para simplificar consideremos el caso 1D, $\overset{\text{escalar}}{u} = u(x,t)$
Trabajemos en el dominio $[0,1]$ y pensemos que tenemos un producto interno (f,ρ).
Por ejemplo

$$(f,\rho) = \int_0^1 f(x)\,\rho^*(x)\,dx$$

f y ρ viven en Hilbert, así que si son vectores $(f,\rho) = f\cdot\rho^*$

<u>Prop</u>: $(f,\rho) = (\rho,f)^*$

Tenemos norma

$$\|f\| = (f,f)^{1/2}$$

La POD es óptima en el sentido de que las φ son tales que el error cuadrático medio entre u y su proyección en las φ es <u>mínimo</u>:

$$\delta \left\| u - \frac{(u,\varphi)}{\|\varphi\|^2}\varphi \right\|^2 = 0$$

Como variamos las φ,
esto es equivalente a maximizar la proyección sobre φ

$$\delta \frac{|(u,\varphi)|^2}{\|\varphi\|^2} = 0$$

Esto tiene ∞ soluciones, cada una es un elemento de la base empírica.