Ecuación de Kardar - Parisi - Zhang (KPZ)

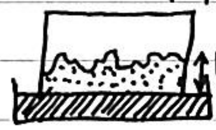
Tomando $\underline{u} = \underline{\nabla}\varphi$ (en 1D $u = \partial_x \varphi$, pero podemos generalizarlo a 2D) y reemplazando en Burgers

$$\partial_t \nabla\varphi = -\overbrace{\nabla\varphi\cdot\nabla(\nabla\varphi)}^{\frac{1}{2}\nabla(\nabla\varphi)^2} + \nu\nabla^2(\nabla\varphi)$$

$$\Rightarrow \partial_t\varphi = -\frac{1}{2}(\nabla\varphi)^2 + \nu\nabla^2\varphi$$

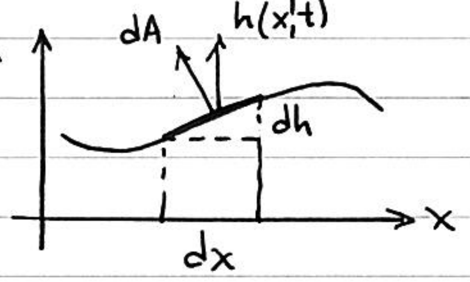
O en 1D: $$\boxed{\varphi_t = -\frac{1}{2}(\varphi_x)^2 + \nu\varphi_{xx}}$$ Ec. de Burgers en forma potencial

Este tipo de ecuaciones aparecen en el estudio de crecimiento de superfices y de erosión. Tenemos difusión, una posible aleatoriedad, y crecimiento por deposición.




El crecimiento es proporcional a la tasa de deposición $d\lambda$ x u. de área. Pero la superficie crece en la dirección normal a la sup., no en la dirección de la altura.

Tomando $\varphi = h$




$$dA = \sqrt{dx^2 + dh^2} = dx\sqrt{1+(\nabla h)^2}$$

$\Rightarrow$ h crece como el flujo

$$\frac{d\lambda}{dA} \approx \underbrace{\frac{d\lambda}{dx}}_{\lambda}\left(1 - \frac{(\nabla h)^2}{2}\right)$$

puede ser $<0$ ó $>0$

La constante puede removerse con un cambio de variables en $h$, y, agregando difusión y ruido al azar, $h(\underline{x},t)$ evoluciona con

$$\partial_t h = -\frac{\lambda^2}{2}(\nabla h)^2 + \nu\nabla^2 h + \eta \qquad \text{KPZ}$$

ruido Gaussiano

## Solución con la sustitución de Hopf

Tomemos $$\varphi_t = -\frac{1}{2}(\varphi_x)^2 + \nu\varphi_{xx}$$

Tenemos $u = \partial_x \varphi$ y tomemos $\varphi = -2\nu \ln \psi$ (1)

$$\Rightarrow \boxed{u = -2\nu \partial_x (\ln \psi) = -2\nu \frac{\psi_x}{\psi}}$$

donde $\psi$ es sol. de la ec. del calor

$$\psi_t = \nu \psi_{xx} \quad (2)$$

De (1):

$$\psi = e^{-\varphi/2\nu} \Rightarrow \begin{cases} \psi_t = -\frac{\varphi_t}{2\nu} e^{-\varphi/2\nu} \\ \psi_{xx} = \frac{(\varphi_x)^2}{(2\nu)^2} e^{-\varphi/2\nu} - \frac{\varphi_{xx}}{2\nu} e^{-\varphi/2\nu} \end{cases}$$

Reemplazando en (2)

$$-\frac{\varphi_t}{\cancel{2\nu}} \cancel{e^{-\varphi/2\nu}} = \cancel{\nu} \frac{(\varphi_x)^2}{(2\cancel{\nu})^{\cancel{2}}} \cancel{e^{-\varphi/2\nu}} - \nu \frac{\varphi_{xx}}{\cancel{2\nu}} \cancel{e^{-\varphi/2\nu}}$$

$$\Rightarrow \varphi_t = -\frac{1}{2}(\varphi_x)^2 + \nu \varphi_{xx}$$

Es decir que la transformación (1) convierte a Burgers y a KPZ en un problema lineal. Como es la ec del calor, tiene solución

$$\begin{cases} \psi(x',0) = e^{-\frac{1}{2\nu}\int_{-\infty}^{x} u(x'',0)\,dx''} \\ \psi(x,t) = \frac{1}{\sqrt{4\pi\nu t}} \int_{-\infty}^{\infty} \psi(x',0)\, e^{-\frac{(x-x')^2}{4\pi\nu t}}\, dx' \\ u(x,t) = -2\nu\, \partial_x (\ln \psi(x,t)) \end{cases}$$

## Solución de ondas viajeras

También podemos buscar soluciones no lineales de ondas viajeras usando las características. Planteando

$$u(x - wt) = u(\xi)$$

y reemplazando en Burgers

$$-wu' + uu' - \nu u'' = 0 \qquad (u' = u_\xi)$$

Podemos integrar usando $\int uu' \, d\xi = \frac{u^2}{2}$

$$\Rightarrow \underbrace{-wu + \frac{u^2}{2}}_{\frac{u}{2}(u-2w)} = \nu u' + \cancel{c}$$

← pedimos $u \to 0$ para $x \to \infty$ ó $x \to -\infty$

$$\Rightarrow \frac{1}{2\nu}\int d\xi = \int \frac{du}{u(u-2w)}$$

Para $u, w > 0$

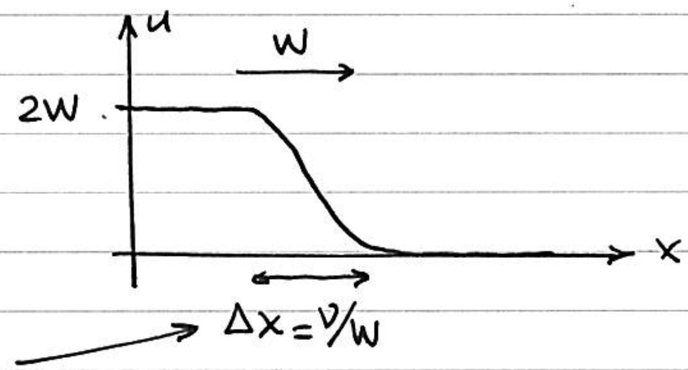
$$\frac{\xi}{2\nu} = \frac{\ln(1 - 2w/u)}{2w} + C$$

$$\frac{w}{\nu}(x - wt) - C = \ln\left(1 - \frac{2w}{u}\right)$$

$$-Ae^{\frac{w}{\nu}(x-wt)} = 1 - \frac{2w}{u}$$

$$\Rightarrow \boxed{u = \frac{2w}{1 + Ae^{\frac{w}{\nu}(x-wt)}}}$$

elegimos este signo para tener $u$ finita




la no linealidad está balanceado por la viscosidad

Este frente viaja con velocidad $w$ <u>sin deformarse</u> (y conserva el momento pues el fluido que se mueve con 2W "choca" con fluido en reposo, y el frente se propaga con la mitad de velocidad).

Esta solución muestra tambien el riesgo de pensar que terminos son chicos en sist. no lineales sin hacer análisis multi-escala. Podriamos pensar que si $V \to 0$ la disipación es despreciable, pero $V$ es una <u>perturbación singular</u>.