Modelos reducidos

Hagamos ahora el camino contrario, y tratemos de reducir PDEs no lineales a ODEs con pocos grados de libertad.

Proyección de Galerkin

Este método, además de ser la base de métodos numéricos (pseudoespectral), sirve para proyectar PDEs a espacios reducidos. Consideremos

$$\partial_t u = F(u)$$

donde F puede incluir operadores espaciales en un dominio S

Si tomamos

$$u(\underline{x},t) = \sum_{j=1}^{N} a_j(t)\, \varphi_j(\underline{x})$$

→ base en S que cumple cdc (y tal vez simetrías) tq

$$\int \varphi_i \varphi_j \omega \, dV = \delta_{ij}$$

peso $\omega(\underline{x})$

⇒ Reemplazando

$$\sum_j \dot{a}_j \varphi_j = F(u)$$

Luego

$$\sum_j \dot{a}_j \underbrace{\int \varphi_j \varphi_k \omega \, dV}_{\delta_{jk}} = \int F(u) \varphi_k \omega \, dV$$

$$\Rightarrow \boxed{\dot{a}_k = \int F(u) \varphi_k \omega \, dV}$$

no depende de $\underline{x}$ y depende solo de t y de los coeficientes $\{a_i, i = 1 \ldots N\}$

¡Es un conjunto de ODEs!

En general para no linealidades cuadráticas los coeficientes (las integrales) de la derecha se pueden calcular explícitamente (en forma analítica o numérica). Además en ese caso magnitudes cuadráticas conservadas por el sistema original se conservan en la truncación.

En otras palabras, si $F(u) = L(u) + N(u,u)$

$$\Rightarrow \int F(u)\, \varphi_k\, \omega \, dV = A_k a_k + \sum_{\ell m} B_{\ell m k} a_\ell a_m$$

donde A_k, $B_{\ell m k}$ se pueden calcular a priori.

<u>Lorenz</u> construyó su modelo (y varios otros) así.

<u>Ejemplo</u>: Volvamos a la ecuación de Burgers

$$u_t = -u u_x + \nu u_{xx}$$

con cdc $\quad u(0,t) = u(1,t) = 0$, ν <u>grande</u>.

Tomo $\quad u = \sum_{j=1}^{N} a_j(t) \sqrt{2}\, \text{sen}(j\pi x)$

base $\sqrt{2}\, \text{sen}\, j\pi x$ por las cdc.

$$\Rightarrow \sum_j \dot{a}_j \overbrace{2\int_0^1 \text{sen}(j\pi x)\, \text{sen}(k\pi x)\, dx}^{\delta_{jk}} =$$

$$- \sum_{\ell, m} a_\ell a_m\, m\pi\, 2\sqrt{2} \overbrace{\int_0^1 \text{sen}(\ell\pi x) \cos(m\pi x)\, \text{sen}(k\pi x)\, dx}^{B_{\ell m k}}$$

$$- \nu j^2 \pi^2 a_j^2 \underbrace{2\int_0^1 \text{sen}(j\pi x)\, \text{sen}(k\pi x)\, dx}_{\delta_{jk}}$$

$$B_{\ell m k} = \frac{1}{4}\int_0^1 \Big[\cos((\ell - k + m)\pi x) + \cos((\ell - k - m)\pi x) - \cos((\ell + k + m)\pi x) - \cos((\ell + k - m)\pi x)\Big] dx$$

Estas integrales son cero salvo cuando

$$l = \begin{cases} k-m \\ k+m \\ -k-m \\ -k+m \end{cases}$$ y en esos casos dan $\pm 1/4$

$$\Rightarrow \boxed{\dot{a}_k = \underbrace{-k^2\pi^2 \nu a_k}_{\text{disipación}} - \frac{\pi}{\sqrt{2}} \sum_m \underbrace{m a_m \left(a_{k-m} + a_{k+m} - a_{-k-m} - a_{-k+m}\right)}_{\text{acoplamiento}}}$$

Es un sistema de ODEs acopladas no linealmente.

Trunquemos a 3 modos ($k=1,2,3$)

$$\begin{cases} \dot{a}_1 = -\pi^2 \nu a_1 + \frac{\pi}{\sqrt{2}}\left(a_1 a_2 + a_2 a_3\right) \\ \dot{a}_2 = -4\pi^2 \nu a_2 - \frac{\pi}{\sqrt{2}}\left(a_1^2 - 2a_1 a_3\right) \\ \dot{a}_3 = -9\pi^2 \nu a_3 - \frac{\pi}{\sqrt{2}} 3 a_1 a_2 \end{cases}$$

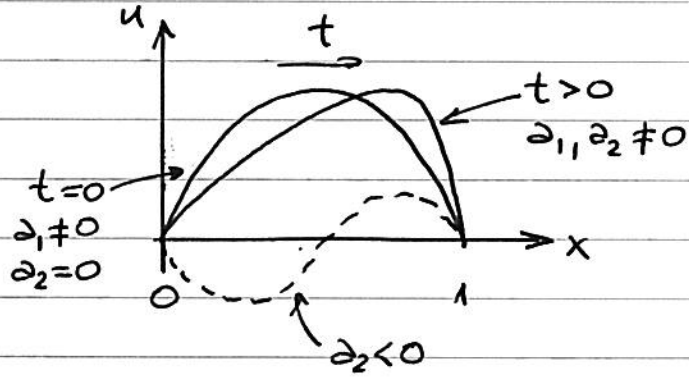
Ec. ordinarias autónomas

orden más grande, más disipación

Este sistema se parece al de Lorenz, y no es casual (Lorenz consideró PDEs con no linealidades parecidas).

Si a $t=0$ $u = A \operatorname{sen}(\pi x)$, empezamos solo con $a_1 \neq 0$. Pero inmediatamente después

$$a_2 \approx -\frac{\pi}{\sqrt{2}} a_1^2 \Delta t$$



En este caso si V no es grande, nada nos asegura que no se exciten más modos. Hay casos en los que V, las cdc. o las simetrías hacen que existan unos pocos modos dominantes en la dinámica. Pero este método no nos dice como "elegir" a esos modos.

Descomposición ortogonal empírica

La POD ("proper orthogonal decomposition") es un método para resolver este problema usando datos empíricos, que pueden venir de simulaciones o experimentos. Tiene diferentes nombres (POD, descomposición de Karhunen-Loève, análisis de componentes principales) y en espacios vectoriales discretos es equivalente a SVD. Fue introducido en simultáneo en diferentes problemas por Lumley, Loève, Karhunen y Pougachev.

La idea es construir una base φ_j ortogonal en base a datos que sea óptima (ya veremos en qué sentido), de forma tal que esos modos capturen las estructuras dominantes en la solución. La POD puede usarse para análisis de datos o para luego hacer una proyección de Galerkin truncando a unos pocos modos y conociendo el error asociado a lo que se tira.

Supongamos que tenemos una medición (o una solución) $u(\underline{x},t)$ (esto puede generalizarse para un conjunto de mediciones $\{u^k\}$).

Queremos una descomposición truncada a N modos

$$u_N(\underline{x},t) = \sum_{j=1}^{N} a_j(t)\,\varphi_j(\underline{x})$$

que sea <u>mejor</u> que cualquier otra descomposición usando otra base.