Caos espacio-temporal

Ecuación de Kuramoto-Sivashinsky (KS)

La ecuación de KS es

$$u_t + u_{xx} + u_{xxxx} + \frac{(u_x)^2}{2} = 0 \qquad (1)$$

y es un modelo para la propagación del fuego. Derivando respecto a x y tomando $v = u_x$

$$\underbrace{v_{xx}}_{\text{inestable (reacción)}} \quad \underbrace{v_{xxxx}}_{\text{disipación/difusión}} \quad \underbrace{v v_x}_{\text{advección}}$$

$$v_t + v_{xx} + v_{xxxx} + v v_x = 0$$

Tiene soluciones muy ricas aun en 1D. Usemos los métodos que aprendimos para caracterizar su dinámica. Consideremos un dominio de largo L y cdc. periódicas:

$$u(0,t) = u(L,t)$$
$$u_x(0,t) = u_x(L,t)$$
$$\dots$$

Proyección de Galerkin

La ecuación de KS tiene simetrías (escrita como (1)):

1) Invariancia de Galileo $\quad x \to x + \alpha$
$\quad u \to u + \beta$

2) Reflexión $\quad x \to -x$

Esto y las cdc. periódicas sugieren que debemos usar Fourier como la base para una truncación de Galerkin.

Escribimos

$$u(x,t) = \sum_k a_k(t)\,\varphi_k(x) \qquad (2)$$

con

$$\varphi_k(x) = e^{i\frac{2\pi x}{L}}$$

Como u es real $\Longrightarrow$ $a_{-k}(t) = a_k^*(t)$

Y tenemos relaciones de ortogonalidad y de derivadas en el espacio Fourier

$$\int_0^L e^{i\frac{2\pi(k-\ell)x}{L}}\,dx = L\,\delta_{k\ell}$$

$$\partial_x \varphi_k = i\frac{2\pi k}{L}\varphi_k$$

$$\partial^2_{xx}\varphi_k = -\left(\frac{2\pi k}{L}\right)^2\varphi_k$$

$$\partial^4_{xxxx}\varphi_k = \left(\frac{2\pi k}{L}\right)^4\varphi_k$$

Reemplazando (2) en (1), multiplicando por $\varphi_\ell^* = \varphi_{-\ell}$ e integrando

$$\int_0^L \overbrace{\left[\sum_k\left(\dot a_k\varphi_k - \left(\frac{2\pi k}{L}\right)^2 a_k\varphi_k + \left(\frac{2\pi k}{L}\right)^4 a_k\varphi_k\right)\right]\varphi_{-\ell}}^{L\delta_{k\ell}}\,dx$$

$$+\int_0^L\left[\sum_k i\frac{2\pi k}{L}a_k\varphi_k\sum_j i\frac{2\pi j}{L}a_j\varphi_j\right]\varphi_{-\ell}\,dx = 0\,.$$

$$L\delta_{k+j,\ell}$$

$$\Rightarrow \cancel{L}\left[\dot a_\ell - \left(\frac{2\pi\ell}{L}\right)^2 a_\ell + \left(\frac{2\pi\ell}{L}\right)^4 a_\ell - \left(\frac{2\pi}{L}\right)^2\sum_j j(\ell-j)\,a_j a_{\ell-j}\right] = 0$$

Y tomando el tiempo $t' = \left(\frac{2\pi}{L}\right)^2 t$

$$\Rightarrow \quad \boxed{\dot{a}_\ell = \ell^2\left[1-\left(\frac{2\pi\ell}{L}\right)^2\right]a_\ell + \frac{1}{2}\sum_j j(\ell-j)a_j a_{\ell-j}} \qquad (3)$$

Ahora podemos truncar al orden que nos interese. Antes conviene notar que el modo a_0 no aparece en las ecuaciones para $\ell \neq 0$ (está desacoplado, esto es consecuencia de la invarianza de Galileo del sistema). Y su evolución simplemente está forzada por la suma de los demás modos:

$$\dot{a}_0 = -\frac{1}{2}\sum_j j^2 |a_j|^2 \qquad (*)$$

Recordemos también que $a_{-\ell} = a_\ell^*$ así que podemos mirar solo $\ell \geq 1$.

(*) Por esta razón suele ser mejor integrar numéricamente la expresión $v_t + v_{xx} + v_{xxxx} + v v_x = 0$. En esta expresión $v = u_x$, los gradientes se mantienen acotados en valor medio (y cuadrático) y el modo 0 no crece monótonamente. Se puede ver explícitamente haciendo

$$\frac{d}{dt}\int_0^L v\,dx = \int_0^L v_t\,dx = \int_0^L \Big(-v_{xx} - v_{xxxx} - \underbrace{v v_x}_{\partial_x\left(\frac{v^2}{2}\right)}\Big)dx = 0$$