Sistema de dos niveles

1 Una partícula de spin 1/2 tiene un momento angular intrínseco $\mathbf{S}$. Si la partícula está cargada eléctricamente, asociado a este momento angular la partícula tiene también un momento magnético intrínseco μ dado por

$$\mu = \gamma \mathbf{S}, \quad \gamma = g\frac{q}{2m},$$

con m la masa y q la carga de la partícula, respectivamente, y g es una constante adimensional denominada $factor - g$, que depende de la partícula. Para el caso de un electrón, $q = -|e|$ y $g \approx 2$. En presencia de un campo magnético externo, se tiene una energía de interacción entre el campo y el momento magnético de la partícula

$$H = -\mu \cdot \mathbf{B} = -\gamma \mathbf{S} \cdot \mathbf{B}.$$

Si el campo magnético externo es uniforme y en la dirección $\hat{z}$, $\mathbf{B} = B\hat{z}$ (con B constante), entonces

$$H = -\gamma B S_z = -\left(\frac{gqB}{2m}\right) S_z = \left(\frac{|e|B}{m}\right) S_z,$$

donde en la última igualdad usamos los valores de q y g para el electrón. Finalmente, notando que $\omega = |e|B/m$ tiene unidades de frecuencia, podemos reescribir el Hamiltoniano de interacción magnética con el spin del electrón como

$$H = \left(\frac{|e|B}{m}\right) S_z = \omega S_z.$$

Recuerde que los operadores de momento angular intrínseco se pueden expresar como $S_i = \frac{\hbar}{2}\sigma_i$, donde las matrices de Pauli vienen dadas por

$$\sigma_x = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad \sigma_y = \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix}, \quad \sigma_x = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

(a) Suponga que inicialmente, a $t = 0$, el sistema se encuentra en el estado $|\psi(t = 0)\rangle = |+, \mathbf{x}\rangle$. Calcule el estado $|\psi(t)\rangle$ en un instante t posterior.

(b) Calcule la probabilidad de medir S_x y obtener los resultados $+\hbar/2$ y $-\hbar/2$ en función del tiempo.

(c) Usando los resultados anteriores, calcule los valores de expectación $\langle S_x\rangle$, $\langle S_y\rangle$ y $\langle S_z\rangle$ en función del tiempo y grafique.

(d) Escriba las ecuaciones de movimiento de Heisenberg para los operadores dependientes del tiempo $S_x(t)$, $S_y(t)$ y $S_z(t)$. Resuélvalas para obtener y calcule los valores medios de estos operadores para un estado general cualquiera. En particular, compare el valor medio $\langle S_x(t)\rangle$ para el estado $|+, \mathbf{x}\rangle$ con el obtenido en el item anterior.

Oscilador Armónico cuántico

2 **Evolución temporal**. Considere el siguiente estado inicial para un oscilador armónico cuántico

$$|\psi(t = 0)\rangle = \cos(\theta/2)|0\rangle + \mathrm{sen}(\theta/2)|1\rangle \tag{1}$$

(a) Encuentre el estado del sistema para $t > 0$ en la representación de Schrödinger. Usando este resultado, calcule los valores medios $\langle x_S \rangle(t)$, $\langle a_S \rangle(t)$ y $\langle n_S \rangle(t)$ (el subíndice S denota explícitamente la representación de Schrödinger de los operadores).

(b) Pasando a la representación de Heisenberg, encuentre la ecuación de evolución que satisfacen los operadores $X_H(t)$, $a_H(t)$ y $n_H(t)$ y sus soluciones (el subíndice S denota explícitamente la representación de Heisenberg de los operadores). Usando estos resultados, recupere los resultados de (i) para los valores medios de los operadores.

(c) Exprese la evolución temporal de $[X_H(t), X_H(0)]$ y $X_H(t), X_H(0)$ en términos de los operadores x y p y a y $a^\dagger$ iniciales.

(d) Encuentre la varianza $\mathrm{Var}(X) = \langle X^2 \rangle - \langle X \rangle^2$.

$\boxed{3}$ **Estados coherentes**. Se definen los estados coherentes de un oscilador armónico en una dimensión como los autoestados del operador de aniquilación a,

$$a|\alpha\rangle = \alpha|\alpha\rangle,$$

donde $\alpha \in \mathbb{C}$. Para estos este estado calcule

(a) Calcule $\langle\alpha|a|\alpha\rangle$, $\langle\alpha|a^2|\alpha\rangle$, $\langle\alpha|a^\dagger|\alpha\rangle$ y $\langle\alpha|(a^\dagger)^2|\alpha\rangle$.

(b) Calcule el valor medio y la varianza de los operadores número N, hamiltoniano H, posición x y momento p.

(c) Usando la representación de Heisenberg calcule los valores medios de posición y momento en función del tiempo, $\langle x \rangle(t)$ y $\langle p \rangle(t)$, para un estado coherente $|\alpha\rangle$. ¿Cómo puede interpretar estos resultados?

(d) Muestre que la descomposición de un estado coherente $|\alpha\rangle$ en la base $|n\rangle$ es

$$|\alpha\rangle = e^{-\frac{|\alpha|^2}{2}} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\alpha^n}{\sqrt{n!}} |n\rangle.$$

(e) Muestre que el producto interno $\langle\beta|\alpha\rangle$ entre dos estados coherentes, $|\alpha\rangle$ y $|\beta\rangle$, es

$$\langle\beta|\alpha\rangle = \exp -\frac{1}{2}(|\alpha|^2 + |\beta|^2 - 2\alpha\beta^*).$$

¿son los estados coherentes ortogonales?¿Por qué?

(f) Muestre que los estados coherentes forman una base, es decir que satisfacen la relación de completitud

$$\frac{1}{\pi}\int d^2\alpha |\alpha\rangle\langle\alpha| = \mathbb{I}, \quad \text{donde } d^2\alpha = d(\mathrm{Re}\alpha)d(\mathrm{Im}\alpha)$$

(Sugerencia: use la expansión de los estados coherentes en la base de autoestados del operador número y luego escriba la integral en coordenadas polares usando que $\alpha = |\alpha|e^{i\phi} = re^{i\phi}$. Finalmente use que $\int_0^{2\pi} d\phi e^{i(m-n)\phi} = 2\pi\delta_{nm}$ y $\int dte^{-t}t^n = n!$, con $n, m \in \mathbb{N}_0$.)

(g) Muestre que la evolución temporal de un estado coherente $|\alpha\rangle$ en la representación de Schrödinger es un nuevo estado coherente $|\alpha(t)\rangle$. Encuentre la expresión $\alpha(t)$ y dibuje en el plano complejo la evolución de $\alpha(t)$.¿Cómo varían en función del tiempo $\langle H \rangle$, $\langle x \rangle$ y $\langle p \rangle$?

$\boxed{4}$ **Operador desplazamiento en el espacio de fases.** Se define el operador de desplazamiento en el espacio de fases como

$$D(\alpha) = \exp \alpha a^\dagger - \alpha^* a,$$

donde $\alpha \in \mathbb{C}$.

(a) Muestre que $D(\alpha)$ es unitario y además $D^{-1}(\alpha) = D(-\alpha)$.

(b) Muestre que $D(\alpha+\beta) = D(\alpha)D(\beta)e^{-i\mathrm{Im}(\alpha\beta^*)}$

(c) Muestre que

$$D^\dagger(\alpha)aD(\alpha) = a+\alpha, \qquad D^\dagger(\alpha)a^\dagger D(\alpha) = a+\alpha^*$$
$$D^\dagger(\alpha)xD(\alpha) = x+\sqrt{\frac{\hbar}{2m\omega}}2\mathrm{Re}\alpha, \qquad D^\dagger(\alpha)pD(\alpha) = p+\sqrt{\frac{\hbar}{2m\omega}}2\mathrm{Im}\alpha$$

(d) Use el item anterior para mostrar que si $|x\rangle$ es un autoestado de posición entonces $D(\alpha)|x\rangle$ también lo es, ¿con qué autovalor?.

(e) Muestre que el estado $|\alpha\rangle = D(\alpha)|0\rangle$ es un autoestado del operador aniquilación ¿Cuál es el autovalor correspondiente?

(f) Muestre que la acción de $D(\alpha)$ sobre el autoestado $|0\rangle$ satisface

$$D(\alpha)|0\rangle = e^{-|\alpha|^2/2}e^{\alpha a^\dagger}$$

Luego, expanda $e^{\alpha a^\dagger}$ en serie de potencias y encuentre la expansión del estado $|\alpha\rangle$ en la base número.

(g) Utilizando cómo transforman x y p ante la acción de $D(\alpha)$, calcule el valor medio y la varianza de posición y momento en los estados coherentes.