[1] **Pureza**. Sea ρ la matriz densidad que representa el estado de un sistema cuántico. Se llama pureza a la cantidad $\mathrm{Tr}(\rho^2)$

(a) Mostrar que $1/d \leq \mathrm{Tr}(\rho^2) \leq 1$, donde d es la dimensión del espacio de Hilbert.

(b) Mostrar que el mínimo de la pureza se alcanza para el estado máximamente mixto

$$\rho_{\text{mix}} = \frac{1}{d}\mathbb{I}_{d\times d}$$

(c) Muestre que la pureza vale 1 si y solo si el estado es puro.

[2] Sea U es un operador unitario y ρ un operador densidad mostrar que entonces $U\rho U^\dagger$ también es un operador densidad.

[3] Sea A un operador no nulo mostrar que entonces $\rho := \frac{AA^\dagger}{\mathrm{Tr}\left(AA^\dagger\right)}$ es un operador densidad.

[4] Dada una matriz densidad ρ_{AB} sobre el espacio de Hilbert compuesto $\mathcal{H}_A \otimes \mathcal{H}_B$ definimos la matriz densidad del subsistema A a través de la traza parcial sobre B como

$$\rho_A = \sum_j \langle \beta_j | \rho_{AB} | \beta_j \rangle := \mathrm{Tr}_B\left(\rho_{AB}\right).$$

(a) Mostrar que con esta definición ρ_A satisface la definición del operador densidad para A.

(b) Mostrar que la matriz reducida de un estado máximamente entrelazado corresponde a un estado máximamente mixto.

[5] Mostrar que dado un estado mixto ρ_A sobre $\mathcal{H}_A$ existe un espacio de Hilbert $\mathcal{H}_B$ y un estado puro $|\psi\rangle \in \mathcal{H}_A \otimes \mathcal{H}_B$ tal que

$$\rho_A = \mathrm{Tr}_B\left(|\psi\rangle\langle\psi|\right).$$

El estado $|\psi\rangle$ se conoce como una purificación de ρ_A.

[6] Comparar la matriz densidad del estado $|\psi\rangle = \sqrt{\frac{2}{3}}|0\rangle + \sqrt{\frac{1}{3}}|1\rangle$ con el estado mixto $\rho = \frac{2}{3}|0\rangle\langle 0| + \frac{1}{3}|1\rangle\langle 1|$. Calcule las probabilidades de medir los estado $|0\rangle$, $|1\rangle$ y $|\psi\rangle$ en ambos casos.

[7] Decida si el siguiente estado (expresado en la base $\{|0\rangle, |1\rangle\}$) es puro o mixto $\rho = \begin{pmatrix} 3/4 & \sqrt{3}/4 \\ \sqrt{3}/4 & 1/4 \end{pmatrix}$, si lo es diga de qué ket proviene.

[8] Si $\dim \mathcal{H} = d < \infty$ entonces

$$S(\rho) \leq \ln D$$

$$S(\rho) = \ln D \iff \rho \text{ es máximamente mixto.}$$

Función de Wigner

[9] Mostrar que el valor medio de un operador G se puede calcular como un promedio sobre el espacio de fases de las respectivas transformadas de Wigner

$$\mathrm{Tr}(\rho G) = \int_{-\infty}^{\infty} dx \int_{-\infty}^{\infty} dp W(x,p) g(x,p).$$

siendo W y g las transformadas de Wigner de ρ y G respectivamente.

$\boxed{10}$ Mostrar que para todo estado se satisface

$$\int\int [W(x,p)]^2 dxdp \leq \frac{1}{2\pi\hbar},$$

siendo igual para un estado puro.

$\boxed{11}$ Halle la constante de normalización para una superposición de dos estados coherentes $N(|c\rangle + |-c\rangle)/\sqrt{2}$, luego calcule y grafique la función de Wigner correspondiente. Decida si este estado exhibe un comportamiento cuántico o clásico.

Matriz densidad para un sistema de dos niveles

$\boxed{12}$ (a) Muestre que la matriz densidad para un sistema de dos niveles puede ser escrita como

$$\rho = \frac{1}{2}(\mathbb{I} + \vec{a}\cdot\vec{\sigma}),$$

donde $\vec{\sigma} = (\sigma_x, \sigma_y, \sigma_z)$ es el vector de matrices de Pauli y el vector de Bloch $\vec{a}$ viene dado por

$$\vec{a} = \mathrm{Tr}\,(\rho\vec{\sigma}) = \langle\vec{\sigma}\rangle.$$

(b) Muestre que los autovalores vienen dados por $(1 \pm |\vec{a}|)/2$ y concluya que $|\vec{a}| \leq 1$.

(c) Mostrar que todas las matrices densidad yacen sobre o dentro de la esfera de Bloch (con radio unidad $|\vec{a}| = 1$), siendo

$$\text{estado puro} \iff |\vec{a}| = 1,$$

$$\text{estado mixto} \iff |\vec{a}| < 1.$$

(d) Muestre que dado un estado

$$\rho = \begin{pmatrix} \rho_{00} & \rho_{01} \\ \rho_{10} & \rho_{11} \end{pmatrix},$$

el vector de Bloch puede ser escrito como $\vec{a} = (u, v, w)$, donde

$$\begin{aligned} u &= \rho_{10} + \rho_{01} = 2\mathrm{Re}(\rho_{01}) \\ v &= i(\rho_{01} - \rho_{10}) = 2\mathrm{Im}(\rho_{10}) \\ w &= \rho_{00} - \rho_{11} \end{aligned}$$

(e) Dado el estado puro $|\psi\rangle = \cos(\theta/2)|0\rangle + e^{i\phi}\mathrm{sen}(\theta/2)|1\rangle$, con $0 \leq \theta \leq \pi$ y $0 \leq \phi \leq 2\pi$, escriba el vector Bloch.

Termodinámica cuántica

$\boxed{13}$ Un sistema cuántico con Hamiltoniano H en equilibrio térmico a temperatura T está descripto por el estado de Gibbs ρ^β, dado por

$$\rho^\beta = \frac{e^{-\beta H}}{Z}, \quad \text{con } Z = \mathrm{Tr}(e^{-\beta H}), \quad \beta = \frac{1}{k_B T}.$$

(a) Calcule la forma explícita de la matriz densidad térmica de un oscilador armónico. Ayuda: Recuerde la serie geométrica $\sum_{n=0}^{\infty} = \frac{1}{1-r}$.

(b) Calcule la probabilidad de $P(n)$ de observar exactamente n excitaciones, y el valor medio del número de excitaciones $\langle N \rangle$, a una dada temperatura. Interprete.

(c) Calcule la entropía de von Neumann para este estado y expresela en términos del valor medio de la energía y $F := -k_B T \ln Z$. ¿A qué expresión termodinámica la recuerda? ¿A qué magnitud corresponde F?

(d) Calcule para un oscilador armónico en un estado térmico, los valores de expectación $\langle [x(t), x(0)] \rangle$ y $\langle \{x(t), x(0)\} \rangle$.

$\boxed{14}$ Consideremos un sistema cuántico inicialmente en equilibrio con un baño térmico a temperatura inversa β. El sistema es sometido a un proceso que modifica su hamiltoniano con el tiempo $H(t)$ y varía entre $H(t=0) = H_0$ y $H(t=\tau) = H_\tau$.

(a) Si durante el proceso el sistema está aislado del baño, definimos el trabajo medio realizado sobre el sistema como la diferencia de energía media entre el estado inicial y final

$$\langle W \rangle = \langle E \rangle_\tau - \langle E \rangle_0,$$

muestre que puede ser expresado cómo

$$\langle W \rangle = \frac{S(\rho_\tau || \rho_\tau^\beta)}{\beta} + \Delta F,$$

donde $\rho_\tau^\beta = e^{-\beta(H_\tau - F_\tau)}$. Concluya que se satisface la desigualdad de Clausius $\langle W \rangle \geq \Delta F$ (donde la igualdad se da para un proceso reversible), es decir que el trabajo entregado por el sistema es a lo sumo $-\Delta F$.

(b) Definimos entonces el trabajo irreversible como $\langle W_{irr} \rangle := \langle W \rangle - \Delta F$ y a partir de este la entropía irreversible $\Delta S_{irr} := \beta \langle W_{irr} \rangle$. Mostrar que estas magnitudes se pueden expresar como

$$\Delta S_{irr} = S(\rho_\tau || \rho_\tau^\beta)$$
$$\langle W_{irr} \rangle = \frac{1}{\beta}\left(S_\tau^\beta - S_0\right) - Q^{th}_{\tau \to \tau, \beta},$$

donde S_0 es la entropía del estado inicial, $S_\tau^\beta = S(\rho_\tau^\beta)$ y $Q^{th}_{\tau \to \tau, \beta}$ el calor disipado al termalizar el estado final con el baño térmico a temperatura β.

(c) Se define el trabajo de fricción como la diferencia entre el trabajo realizado en tiempo finito y el trabajo adiabático realizado al variar el hamiltoniano infinitamente lento

$$\langle W_{fric} \rangle = \langle W \rangle - \langle W_{ad} \rangle.$$

En este último caso el teorema adiabático nos dice que la evolución del sistema viene dada por

$$U_{ad}(\tau) = \sum_n |\epsilon_n(\tau)\rangle\langle\epsilon_n(0)|,$$

siendo $H(t)|\epsilon_n(t)\rangle = \epsilon_n(t)|\epsilon_n(t)\rangle$.

(d) Mostrar que si existe una constante real K tal que $K\epsilon_n(\tau) = \epsilon_n(0)$ entonces el estado adiabático

$$\rho_{ad}(\tau) := U_{ad}(\tau)\rho^\beta(0)U_{ad}^\dagger(\tau)$$

es un estado térmico $\rho_{ad}(\tau) = \rho_\tau^{\beta_A}$ y hallar β_A.

(e) Mostrar que el trabajo de fricción viene dado por

$$\langle W_{fric} \rangle = -Q^{th}_{\tau \to \tau, \beta_A} = \frac{1}{\beta_A} S(\rho_\tau || \rho_\tau^{\beta_A})$$

y concluir que el trabajo entregado por el sistema es a lo sumo $-\langle W_{ad} \rangle$.