$\boxed{1}$ Las siguientes condiciones son equivalentes para un mapa $\mathcal{E}$ sobre operadores del espacio de Hilbert $\mathcal{H}_S$:

(a) El mapa $\mathcal{E}$ es lineal, preserva la traza y es completamente positivo.

(b) El mapa $\mathcal{E}$ tiene una “representación unitaria”; esto es, existe un espacio de Hilbert $\mathcal{H}_E$, un estado inicial $|0\rangle \in \mathcal{H}_E$ y una evolución unitaria conjunta $U$ sobre $\mathcal{H}_S \otimes \mathcal{H}_E$ tal que

$$\mathcal{E}(\rho) = \mathrm{Tr}_E \left[ U \left( \rho \otimes |0\rangle\langle 0| \right) U^\dagger \right].$$

(c) $\mathcal{E}$ tiene una representación de Kraus; esto es, existen operadores $A_k$ tales que

$$\mathcal{E}(\rho) = \sum_k A_k \rho A_k^\dagger$$

con la condición de normalización $\sum_k A_k A_k^\dagger = \mathbb{I}$.

$\boxed{2}$ Mostrar que la ecuación maestra de Lindblad para el operador densidad

$$\frac{d}{dt}\rho(t) = -i\left[H, \rho\right] + \sum_k \gamma_k \left( L_k \rho L_k^\dagger - \frac{1}{2}\left\{ L_k^\dagger L_k, \rho \right\} \right)$$

satisface las siguientes propiedades:

- La ecuación de Lindblad es invariante ante transformaciones unitarias de los operadores de salto
$$\sqrt{\gamma_k} L_k \to \sqrt{\gamma_k'} L_k' = \sum_j v_{kj} \sqrt{\gamma_j} L_j.$$
- La ecuación de Lindblad es invariante ante transformaciones de la forma
$$\begin{aligned} L_k &\to L_k' = L_k + a_k \\ H &\to H' = H + \frac{1}{2i} \sum_j \gamma_j (a_j^* A_j - a_j A_j^\dagger) + b. \end{aligned}$$
- La ecuación de Lindblad preserva la traza $\frac{d}{dt}(\mathrm{Tr}\rho) = 0$.
- Si todos los operadores de salto son hermíticos, la pureza del sistema no aumenta con el tiempo $\frac{d}{dt}(\mathrm{Tr}\rho^2) = 0$.

$\boxed{3}$ Si se tiene un sistema en contacto con un entorno con sendos Hamiltonianos $H_S$ y $H_B$, entonces (asumiendo un acoplamiento débil, un estado inicial separable y la aproximación markoviana) se tiene que el operador densidad del sistema en la representación de interacción satisface la ecuación de Lindblad

$$\frac{d}{dt}\rho_S = -i\left[H_{LS}, \rho_S\right] + \mathcal{D}\rho_S$$

con el Hamiltoniano de interacción dado por

$$H_{LS} = \sum_\omega \sum_{j,k} S_{jk}(\omega) A_j^\dagger(\omega) A_k(\omega),$$

el superoperador disipador definido como

$$\mathcal{D}\rho_S = \sum_\omega \sum_{j,k} \gamma_{jk}(\omega) \left( A_k(\omega) \rho_S A_j^\dagger(\omega) - \frac{1}{2}\left\{ A_j^\dagger(\omega) A_k(\omega), \rho_S \right\} \right),$$

siendo $A_j(\omega)$ auto-operadores de $H_S$ con frecuencia $\omega$ . Finalmente las constantes de acoplamiento vienen dadas por las funciones de correlación de dos puntos

$$\gamma_{jk}(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} ds e^{i\omega s} \langle B_j^\dagger(s) B_k(0) \rangle$$

$$\Gamma_{jk}(\omega) = \int_{0}^{\infty} ds e^{i\omega s} \langle B_j^\dagger(t) B_k(t-s) \rangle$$

$$S_{jk}(\omega) = \frac{1}{2i}\left(\Gamma_{jk}(\omega) - \Gamma_{kj}^*(\omega)\right)$$

siendo $B_k(t) = e^{iH_B t} B_k e^{-iH_B t}$ operadores hermíticos del entorno con funciones de correlación markoviana $\langle B_j^\dagger(t) B_k(t-s) \rangle = \langle B_j^\dagger(s) B_k(0) \rangle$ para todo $s$ y $t$.

(a) Mostrar que si los operadores $A_j(\omega)$ se definen como

$$A_j(\omega) := \sum_{\epsilon' - \epsilon = \omega} \Pi(\epsilon) A_j \Pi(\epsilon')$$

siendo $A_j$ un operador hermítico de $H_S$ y $\Pi(\epsilon)$ el proyector sobre asociado a la autoenergía $\epsilon$, entonces se satisfacen las siguientes relaciones

$$[H_S, A_j(\omega)] = -\omega A_j(\omega)$$

$$[H_S, A_j^\dagger(\omega)] = \omega A_j^\dagger(\omega)$$

$$A_j^\dagger(\omega) = A_j(-\omega).$$

(b) Mostrar que se verifica la condición de KMS

$$\langle B_j^\dagger(t) B_k(0) \rangle = \langle B_k(0) B_j^\dagger(t + i\beta) \rangle,$$

si el entorno se encuentra en un estado térmico a temperatura inversa $\beta$.

(c) Mostrar que esto implica

$$\gamma_{jk}(-\omega) = e^{-\beta\omega} \gamma_{kj}(\omega).$$

(d) Mostrar que si el sistema se encuentra en un estado térmico se tienen

$$\rho_\beta A_j(\omega) = e^{\beta\omega} A_j(\omega) \rho_\beta$$

$$\rho_\beta A_j^\dagger(\omega) = e^{-\beta\omega} A_j^\dagger(\omega) \rho_\beta.$$

(e) Mostrar que $[H_S, H_{LS}] = 0$ y concluir que el Hamitloniano $H_{LS}$ solo genera una renormalización de las energías de $H_S$.

(f) Usando los ítems anteriores, mostrar que un estado térmico del sistema a temperatura inversa $\beta$ es invariante ante la evolución temporal bajo esta ecuación maestra.

$\boxed{4}$ Usando el modelo anterior muestre que si el sistema corresponde a un qubit con frecuencia $\omega_q$ y el entorno consiste en osciladores armónicos cuánticos con frecuencias $\omega_j$ (entorno bosónico) en un estado térmico a temperatura inversa $\beta$ y operadores de interacción $B_j = g_j a_j + g_j^* a_j^\dagger$, entonces el disipador de la ecuación maestra se puede escribir como

$$\mathcal{D}\rho_S = \frac{\gamma}{2} n_{\omega_q} \left(\sigma_+ \rho_S \sigma_- - \frac{1}{2}\{\sigma_-\sigma_+, \rho_S\}\right) + \frac{\gamma}{2}(n_{\omega_q} + 1)\left(\sigma_- \rho_S \sigma_+ - \frac{1}{2}\{\sigma_+\sigma_-, \rho_S\}\right),$$

siendo $n_{\omega_q} = 1/(e^{\beta\omega_q} - 1)$.

# Qubit en un entorno a temperatura finita

$\boxed{5}$ Resolvemos la dinámica de un sistema de dos niveles acoplado a un entorno bosónico a temperatura $T \geq 0$. La ecuación maestra que describe la evolución del qubit (en unidades de $\hbar = 1$) es

$$\dot{\rho}(t) = -i\,[H, \rho] + (n_\omega + 1)\frac{\gamma}{2}(2\sigma_-\rho\sigma_+ - \{\sigma_+\sigma_-, \rho\}) + n_\omega \frac{\gamma}{2}(2\sigma_+\rho\sigma_- - \{\sigma_-\sigma_+, \rho\}),$$

con el hamiltoniano libre del qubit $H = \omega\sigma_z/2$ y $n_\omega = 1/(e^{\omega/(K_B T)} - 1)$ el número de ocupación bosónico.

(a) Muestre que el valor medio de un observable que actúa sobre el qubit evoluciona según

$$\frac{d}{dt}\langle A\rangle = -i\,\langle [A, H]\rangle + (n_\omega + 1)\frac{\gamma}{2}\,\langle \sigma_+\,[A, \sigma_-] + [\sigma_+, A]\,\sigma_-\rangle$$

$$+ n_\omega \frac{\gamma}{2}\,\langle \sigma_-\,[A, \sigma_+] + [\sigma_-, A]\,\sigma_+\rangle$$

(b) Derive las ecuaciones de Bloch $\langle\sigma_z\rangle$ y $\langle\sigma_\pm\rangle$, y resuelva.

(c) Usando los valores obtenidos en b) reconstruya el vector de Bloch. Calcule su norma y muestre que la misma se contrae hacie el interior de la esfera.

(d) Usando el vector de Bloch pruebe que la matriz densidad evoluciona según

$$\rho(t) = \begin{pmatrix} P_1 + e^{-t/T_1}\,(\rho_{11} - P_1) & e^{-t/(2T_1)}\rho_{01}e^{-i\omega t} \\ e^{-t/(2T_1)}\rho_{10}e^{i\omega t} & 1 - P_1 - e^{-t/T_1}\,(\rho_{11} - P_1) \end{pmatrix},$$

con $P_1 = n_\omega/(1 + 2n_\omega) = \lim_{t\to\infty} \rho_{11}(t)$ es la probabilidad de excitación asintótica y $T_1 = (1 - 2P_1)/\gamma$ da la escala en la que $\rho(t)$ converge a la solución asintótica. Relacione esta solución con el límite de temperatura nula.

(e) Calcula la pureza y grafiquela en función del tiempo para temperaturas muy bajas, medias y muy altas.