$\boxed{1}$ Utilizando la aproximación de Markov muestre que la ecuación maestra del operador densidad de una partícula cuántica sometida a un potencial en un entorno bosónico viene dada por

$$\frac{d}{dt}\rho_S(t) = -\frac{i}{\hbar}[H_S,\rho_S] - \frac{i\gamma}{\hbar}[x,\{p,\rho_S\}] - D[x,[x,\rho_S]]$$

siendo $H_S = p^2/2m + V(x)$ y $D = \frac{2m\gamma k_B T}{\hbar^2}$ para altas temperaturas.

$\boxed{2}$ Partiendo de la ecuación maestra del operador densidad de una partícula cuántica sometida a un potencial en un entorno bosónico

$$\frac{d}{dt}\rho_S(t) = -\frac{i}{\hbar}[H_S,\rho_S] - \frac{i\gamma}{\hbar}[x,\{p,\rho_S\}] - D[x,[x,\rho_S]]$$

siendo $H_S = p^2/2m + V(x)$ y $D = \frac{2m\gamma k_B T}{\hbar^2}$ para altas temperaturas, mostrar que los valores medios evolucionan de acuerdo a las siguientes ecuaciones

$$\begin{aligned}
\frac{d}{dt}\langle x\rangle &= \frac{1}{m}\langle p\rangle\\
\frac{d}{dt}\langle p\rangle &= -\langle V'(x)\rangle - 2\gamma\langle p\rangle\\
\frac{d}{dt}\langle x^2\rangle &= \frac{1}{m}\langle px+xp\rangle\\
\frac{d}{dt}\langle px+xp\rangle &= \frac{2}{m}\langle p^2\rangle - 2\langle xV'(x)\rangle - 2\gamma\langle px+xp\rangle\\
\frac{d}{dt}\langle p^2\rangle &= -\langle pV'(x)+V'(x)p\rangle - 4\gamma\langle p^2\rangle + 4m\gamma k_B T
\end{aligned} \tag{1}$$

(a) Resolver el sistema de ecuaciones para una partícula libre ($V(x) = 0$) y obtener los siguientes valores medios $\langle x(t)\rangle$, $\langle p(t)\rangle$,

$$\begin{aligned}
\langle\sigma_x^2(t)\rangle &= \langle x^2(t)\rangle - \langle x(t)\rangle^2\\
\langle\sigma_x^2(t)\rangle &= \langle p^2(t)\rangle - \langle p(t)\rangle^2\\
\langle\sigma_{px}(t)\rangle &= \langle\{p(t),x(t)\}\rangle - 2\langle x(t)\rangle\langle p(t)\rangle
\end{aligned} \tag{2}$$

(b) Repetir para el caso en que se tiene una partícula sometida a un potencial harmónico $V(x) = m\omega^2x^2/2$ y calcular el valor medio de la energía

(c) Comparar e interpretar en ambos el comportamiento de $\langle\sigma_x^2(t)\rangle$ y $\langle\sigma_p^2(t)\rangle$ para tiempos largos ($\gamma t \gg 1$).

$\boxed{3}$ Mostrar que la ecuación maestra para una partícula cuántica en un entorno bosónico

$$\dot{\rho} = \frac{i}{\hbar}[\rho, H_{\rm ren}] - \frac{i}{\hbar}\gamma(t)[x,\{p,\rho\}] - D(t)[x,[x.\rho]] - \frac{1}{\hbar}f(t)[x,[p,\rho]] \tag{3}$$

da lugar a una ecuación de Fokker-Planck para la evolución temporal de la función de Wigner

$$\dot{W} = -\{H_{\rm ren}(t), W\}_{PB} + \gamma(t)2\partial_p(pW) + \hbar D(t)\partial_x^2 W - \hbar f(t)\partial_{px}^2 W. \tag{4}$$

QuTiP

$\boxed{4}$ Resolver numéricamente usando QuTiP la ecuación de Lindblad para un sistema de dos niveles acoplado a un entorno bosónico a temperatura T

$$\dot{\rho}(t) = -i\,[H, \rho] + (n_\omega + 1)\frac{\gamma}{2}(2\sigma_-\rho\sigma_+ - \{\sigma_+\sigma_-, \rho\}) + n_\omega\frac{\gamma}{2}(2\sigma_+\rho\sigma_- - \{\sigma_-\sigma_+, \rho\}),$$

con el hamiltoniano libre del qubit $H = \omega\sigma_z/2$ y $n_\omega = 1/(e^{\omega/(K_BT)} - 1)$ el número de ocupación bosónico.
Tomando como estados iniciales $|0\rangle$ o $(|0\rangle + |1\rangle)/\sqrt{2}$ y $\gamma = 0{,}2\omega$ calcule para temperaturas altas y bajas

(a) En un mismo gráfico la evolucion de la población del estado $|0\rangle$ y $|1\rangle$ como función del tiempo.

(b) En un mismo gráfico $\langle\sigma_x\rangle(t)$, $\langle\sigma_y\rangle(t)$,$\langle\sigma_z\rangle(t)$.

(c) Utilice los resultados anteriores para graficar la trayectoria del vector de Bloch como gráfico de 3 dimensiones.

(d) Grafique la pureza

(e) Grafique la entropía de Von Neumann.

$\boxed{5}$ Repetir el problema anterior considerando la ecuación de Lindblad de pure dephasing para un sistema de dos niveles acoplado a un entorno bosónico a temperatura T

$$\dot{\rho}(t) = -i\,[H, \rho] + \frac{\gamma}{2}(2\sigma_z\rho\sigma_z - \{\sigma_z\sigma_z, \rho\}),$$

con el hamiltoniano libre del qubit $H = \omega\sigma_z/2$.

$\boxed{6}$ Resolver numéricamente usando QuTiP la ecuación de Lindblad para un oscilador armónico acoplado a un entorno bosónico a temperatura T

$$\dot{\rho}(t) = -i\,[H, \rho] + (n_\omega + 1)\frac{\gamma}{2}(2a\rho a^\dagger - \{a^\dagger a, \rho\}) + n_\omega\frac{\gamma}{2}(2a^\dagger\rho a - \{aa^\dagger, \rho\}),$$

con el hamiltoniano libre $H = \omega a^\dagger a$ y $n_\omega = 1/(e^{\omega/(K_BT)} - 1)$ el número de ocupación bosónico.
Tomando como estados iniciales un estado coherente $|\alpha\rangle$ o $(|\alpha\rangle + |-\alpha\rangle)/\sqrt{C}$ y $\gamma = 0{,}2\omega$ calcule para temperaturas altas, bajas e intermedias

(a) La evolución de los valores medios $\langle x\rangle$, $\langle p\rangle$, $\langle\sigma_x^2\rangle$, $\langle\sigma_p^2\rangle$, $\langle N\rangle$

(b) Grafique la función de Wigner para diferentes tiempos.

(c) Grafique la pureza.

(d) Grafique la entropía de Von Neumann.