GUIA 1A: Acción y ecuaciones de movimiento para cuerdas relativistas.

El objetivo central en esta guía es familiarizarse con la acción que describe a una cuerda clasica (abierta o cerrada), y sus simetrías y redundancias (invariancia de gauge). Nos toparemos con la invariancia ante reparametrizaciones, la idea de métrica inducida, ciertas transformaciones de esta (transformaciones de Weyl) y noción de vínculo (los vinculos de Virasoro en particular). La cuantización de este modelo clásico queda para la siguiente guía.

Obs: *En esta guía y las sucesivas utilizaremos la signatura* $-,+,+,+,...,+$ *para la métrica en el espacio-tiempo. Recuerde que, a menos que se indique lo contrario, el espacio-tiempo tiene* D *dimensiones, con* D *generico*

1. Considere la acción de una partícula relativista en D dimensiones dada por

$$S = -m \int d\tau \sqrt{-\dot{X}^\mu \dot{X}_\mu}$$

   (a) Muestre la invariancia ante reparametrizaciones a nivel de la acción y de las ecuaciones de movimiento.

   (b) Halle el limite no relativista de la acción y justifique la interpretación de m como la masa de la partícula. En particular, note la la relevancia de los signos menos para obtener la acción no relativista usual.

2. **Precalentamiento para escribir la acción de una cuerda**: Halle la expresión de la métrica h inducida por la métrica Euclidea en D dimensiones η en una superficie de dimensión d dada por las ecuaciones paramétricas $X^\mu = f^\mu(x^a)$, siendo ξ^a $(a = 1...d)$ parámetros. En particular, obtenga la métrica inducida en el caso $D = 3$ y cuando la superficie es i) la de una esfera de radio R y ii) la de un cilindro de radio R.

3. Considere la **acción de Nambu-Gotto**:

$$S_{NG} = -T \int d\sigma d\tau \sqrt{(\dot{X}X')^2 - \dot{X}^2 X'^2}$$

   donde denotamos con $'$ y $\dot{}$ las derivadas respecto a dos parámetros que denominaremos σ y τ respectivamente.

   (a) Reescriba el Lagrangiano en términos de la métrica inducida en una superficie 2-dimensional (hoja de mundo) parametrizada por τ y σ y justifique su interpretación como área de la hoja de mundo.

   (b) Como traduciria en forma precisa la condición de que la acción corresponde a una cuerda que se mueve a velocidad menor o igual a la de la luz?

   (c) A fin de bajar a tierra esta expresión, considere el caso particular de la hoja de mundo de un círculo (contenido en algún plano espacial) que se mueve a lo largo del eje temporal X^0. Elija parámetros convenientes para ese caso y escriba el Lagrangiano.

4. Halle las ecuaciones de movimiento de la acción anterior.

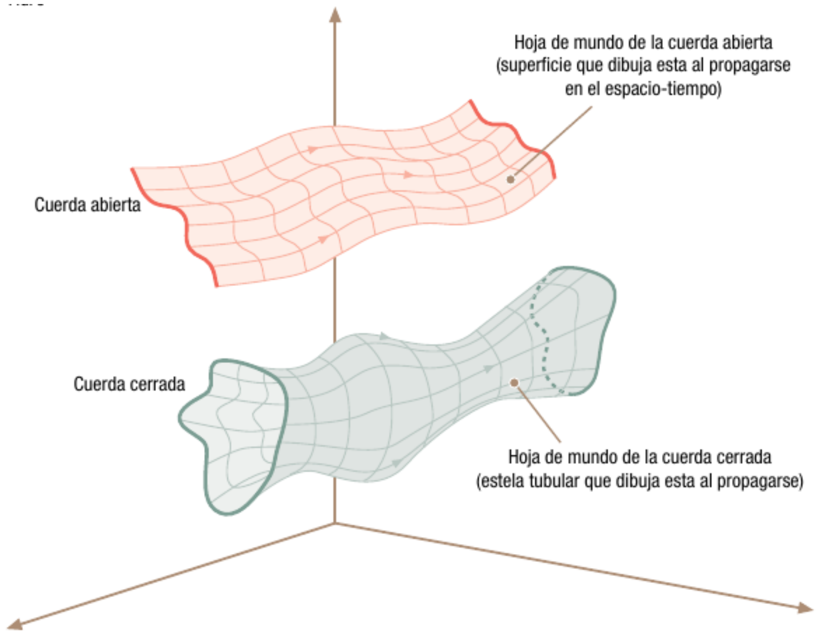

Figure 1: *Hoja de mundo de una cuerda abierta y cerrada. Independientemente del número de dimensiones del espacio tiempo, la superficie es bidimensional.*

5. **Acción a la Polyakov de la partícula relativista**: Verificar que la acción de la partícula relativista $S = -m \int ds$, con $ds^2 = g_{\mu\nu} dx^\mu dx^\nu$, es equivalente a $S = \frac{1}{2} \int (e^{-1}\dot{x}^2 - em^2) d\tau$, donde ahora e es una nueva variable en el Lagrangiano.

6. Siguiendo la linea del ejemplo anterior, muestre que la acción de Nambu-Goto es clásicamente equivalente (es decir, se obtienen ecuaciones de movimiento equivalentes) a la **acción de Polyakov**:

$$S = -\frac{T}{2} \int d^2\sigma \sqrt{-\gamma} \gamma^{\alpha\beta}(\sigma) \partial_\alpha X^\mu \partial_\beta X_\mu$$

   Muestre que esta acción es invariante ante reparametrizaciones y transformaciones de Weyl de la métrica γ de la hoja de mundo.

7. Escriba explícitamente los vínculos que surgen de la acción de Polyakov usando las libertades anteriores para llevar la métrica de la hoja de mundo a $\gamma_{\alpha\beta} = \eta_{\alpha\beta}$

8. **Tensor energía-momento como vínculo**: Considere la acción de Polyakov,

   (a) Halle la expresión explícita del tensor energía-momento $T_{\alpha\beta} = -\frac{2}{T}\frac{1}{\sqrt{h}}\frac{\delta S}{\delta h^{\alpha\beta}}$ y muestre que tiene traza cero.

   (b) Usando la expresión de $T_{\alpha\beta}$ escriba explícitamente los vínculos $T_{\alpha\beta} = 0$ en el gauge $\gamma_{\alpha\beta} = \eta_{\alpha\beta}$

9. Verifique que:

$$X_1 = Acos(\tau)cos(\sigma)\ , \qquad X_2 = Asin(\tau)cos(\sigma)\ , \qquad X_0 = A\tau$$

con A constante y $X_3 = X_4 = ... = X_D = 0$, satisfacen las ecuaciones de movimiento de S_p en el gauge $h_{\alpha\beta} = \eta_{\alpha\beta}$.

10. A partir del vínculo $L_0 = 0$ (modo cero del tensor energía-momento) derive la expresión de $-p_\mu p^\mu$ (p^μ momento del centro de masas de la cuerda) en términos de los coeficientes α_n tanto en el caso de cuerda abierta como cerrada.

11. Considere una métrica γ 2-dimensional. Demostrar (a partir del teorema de Gauss-Bonnet.) que la acción $\int d^2\sigma\sqrt{\gamma}R^{(2)}(\gamma)$ (con $R^{(2)}$ el escalar de curvatura asociado a γ) no contribuye a las ecuaciones clásicas de movimiento.