GUIA 1B: Cuantización de cuerdas abiertas y cerradas.

En esta guía se comenzará el estudio de la cuantización de la cuerda cerrada y la abierta (con c.c. de Neumann), dejando para la guía siguiente el analisis de la condición que lleva a que $D = 26$ en la cuerda bosonica y el analisis del espectro en términos de representaciones del grupo de Lorentz.

1. El desarrollo en modos de las soluciones de cuerda abierta (con condiciones de Neumann) y cerrada (usando alguna elección conveniente de constantes; su conveniencia quedará clara en el ejercicio siguiente) es:

$$X^\mu = x^\mu + \sqrt{\frac{\alpha'}{2}}[\alpha_0^\mu(\tau - \sigma) + \tilde{\alpha}_0^\mu(\tau + \sigma) + i\sum_{n \neq 0}(\frac{1}{n}\alpha_n^\mu e^{-in(\tau-\sigma)} + \frac{1}{n}\tilde{\alpha}_n^\mu e^{-in(\tau+\sigma)})]$$

   con $\alpha_0^\mu = \tilde{\alpha}_0^\mu = real$, $(\alpha_n^\mu)^* = \alpha_{-n}^\mu$ y:

   - Cuerda abierta(cc Neumann): $\sigma \in [0, \pi]$ $\alpha_n^\mu = \tilde{\alpha}_n^\mu$ $\forall n$
   - Cuerda cerrada: $\sigma \in [0, 2\pi]$ α_n^μ y $\tilde{\alpha}_n^\mu$ independientes

   A partir de la definición de p^μ como una colección de cargas conservadas asociadas a la invariancia ante traslaciones en el espacio ambiente, halle la relación entre α_0^μ y p^μ. Note la diferencia entre p^μ (una constante) y el momento canonico conjugado

$$P^\nu(\tau, \sigma) \equiv \frac{\partial L}{\partial_\tau X_\nu}$$

   , relevante para el próximo ejercicio.

2. A partir del corchete de Poisson entre las X^μ y P^ν(momento canonico conjugado):

$$\{X^\mu(\sigma, \tau), P^\nu(\sigma', \tau)\} = \eta^{\mu\nu}\delta(\sigma - \sigma')$$

   halle los correspondientes corchetes entre los modos de oscilación α_n^μ que aparecen en la expansión en modos del ejercicio anterior.

3. **Simetría residual** Como se vio en la guía 1A, las e.o.m y vínculos correspondientes a la acción de Polyakov son:

$$\begin{aligned} \gamma^{ab}\partial_a\partial_b X^\mu &= 0 \\ \partial_a X \partial_b X - \frac{1}{2}\gamma^{ab}\partial_d X \partial_c X &= 0 \text{ (Vínculos de Virasoro)} \end{aligned}$$

   .

   Como se vio alli, toda metrica en dos dimensiones (de signatura Lorentziana), mediante el uso de la simetría ante reparametrizaciones, puede escribirse como $\gamma_{ab} = \Omega^2\eta_{ab}$, siendo Ω una función arbitraria (no nula y con otros requisitos de suavidad) en la hoja de mundo.

   (a) Reescriba las ecuaciones anteriores en ese gauge y verifique que Ω se factoriza de modo que en las ecuaciones puede reemplazar γ por η (trivial)

(b) Reescriba las ecuaciones de movimiento y vínculos usando las coordenadas cono de luz, definidas por:

$$\sigma^+ \equiv \tau + \sigma$$
$$\sigma^- = \tau - \sigma$$

(c) Muestre que ante la transformación:

$$\sigma^+ \to f^+(\sigma), \quad \sigma^- \to f^-(\sigma)$$

siendo las $f^\pm$ funciones arbitrarias de $\sigma^\pm$, dichas ecuaciones quedan invariantes.

Este último grupo de simetrías no es otra cosa que el grupo de transformaciones conformes (objeto de una guía futura)

4. Considere las coordenadas $X^\pm \equiv \frac{1}{\sqrt{2}}(X^0 \pm X^1)$. La libertad dada por la simetrá residual permite elegir a las coordenadas de la hoja de mundo de modo tal que se cumpla:

$$X^+(\sigma,\tau) = x^+ + \alpha' p^+ \tau$$

(para la cuerda cerrada; hay un 2 diferencia con la cuerda abierta), desapareciendo como grados de libertad los infinitos modos de oscilacion X^+

(a) Muestre que los vínculos permiten despejar X^- en términos de los modos transversales, es decir, de las coordenadas X^i con $i = 2, ..., D-1$

(b) Reescriba la relación conocida entre $M^2 = -p_\mu p^\mu$ y todos los modos de oscilación pero ahora usando las coordenadas cono de luz. Verifique que M^2 queda escrito exclusivamente en términos de los modos transversales.

5. Considere la cuerda cerrada. Escriba la expresión de L_0 y $\bar{L}_0$ (recuerde que estos son los modos ceros de T_{++} y T_{--} respectivamente, reescaleados por $\frac{T}{2}$) a nivel cuántico (con la prescripción de orden normal) limitandose solo a un número finito de osciladores[1] ($n = 1...N$) y muestre que este queda escrito como:

$$\hat{L}_0 = \frac{1}{2}(\alpha_0)^2 + \sum_{n=1}^{N} \hat{\alpha}_{-n} \cdot \hat{\alpha}_n + a^{(N)}$$
$$\hat{\bar{L}}_0 = \frac{1}{2}(\tilde{\alpha}_0)^2 + \sum_{n=1}^{N} \hat{\tilde{\alpha}}_{-n} \cdot \hat{\tilde{\alpha}}_n + a^{(N)}$$

siendo $a^{(N)} = -\frac{D-2}{2}(\sum_{n=1}^{N} n)$. Esta cantidad diverge cuando $N \to \infty$ pero a través de una adecuada regularización, se muestra que el limite da $a = 1$, siendo este valor consistente con la simetría de Lorentz (esto y el hecho de que $D = 26$ se verán en la próxima guía).

[1] Este rodeo que damos, al definir un $a^{(N)}$ finito, es solo una manera de evitar algo escandaloso desde el principio

6. Definiendo las cantidades (a nivel clásico):

$$
\begin{aligned}
a_n &\equiv \frac{1}{\sqrt{n}}\alpha_n \\
a_{-n} &\equiv \frac{1}{\sqrt{n}}\alpha_{-n}
\end{aligned}
$$

   ($n > 0$) y siguiendo las reglas de cuantización usuales, muestre que los operadores correspondientes satisfacen reglas de conmutación similares a infinitos osciladores armonicos desacoplados:

$$[a^\mu_{-n}, a^\nu_m] = \eta^{\mu\nu}\delta_{n,m} \tag{1}$$

   con $(a^\mu_n)^\dagger = a^\mu_{-n}$, jugando los a^μ_{-n} ($n > 0$) el rol de operadores de creación. La correspondencia es exacta para $\mu \neq 0$ y no encaja por un signo en el caso $\mu = 0$. Muestre además, siguiendo un procedimiento similar, que α^μ_0 como operador conmuta con todos los a_n.

7. Los estados fisicos de la cuerda se pueden construir siguiendo un procedimiento similar al del oscilador armonico cuántico, partiendo de un estado $\mid p^\mu >$, autoestado de α^μ_0 con autovalor proporcional a p^μ. Esta familia de estados, caracterizadas por un indice continuo, juega un rol analogo al del estado fundamental del oscilador armonico, siendo aniquilado por todos los a^μ_n con $n > 0$. El espacio de estados se construira aplicando a^μ_{-n} a este estado fundamental. La diferencia con el caso del oscilador armonico es que al estado fisico se le pide que satisfaga vínculos ($L_0 \mid \Psi >= \bar{L}_0 \mid \Psi >= 0$).

   Muestre que entre los estados generados por acción de los a^μ_{-n} existen estado de norma negativa y que por tando no puede construirse el Hilbert usando estos operadores indiscriminadamente.

8. Muestre que con la elección $a = 1$, la expresión del operador M^2 es:

$$M^2 = \frac{1}{\alpha'}\left(-1 + \sum_{n=1}^{\infty} n a^J_{-n} a^J_n\right)$$

   en la cuerda abierta (con condiciones de Neumann) y

$$M^2 = \frac{2}{\alpha'}\left(-2 + \sum_{n=1}^{\infty}(n a_{-n}{}^J a^J_n + n\tilde{a}^J_{-n}\tilde{a}^J_n)\right)$$

   Recuerde que esta equacion debe leerse no como una igualdad entre operadores sino como una condición sobre los estados fisicos: $M^2 \mid \Psi > = \frac{2}{\alpha'}\left(-2 + \sum_{n=1}^{\infty}(n a_{-n}{}^J a^J_n + n\tilde{a}^J_{-n}\tilde{a}^J_n)\right) \mid \Psi >$.

9. Escriba explicitamente los estados en los 3 primeros niveles, optenidos a partir del estado fundamental de momento p^μ , denotado por $\mid p^\mu >$, tanto en la cuerda abierta como cerrada y cuente los grados de libertad en cada nivel. Recuerde que en el caso de la cuerda cerrada el vinculo $L_0 = \bar{L}_0 = 0$ impone que los estados fisicos $\Psi >$ deben satisfacer la igualdad:

$$\sum_{n=1}^{\infty}(n a_{-n}{}^J a^J_n) \mid \Psi >= \sum_{n=1}^{\infty}(n\tilde{a}^J_{-n}\tilde{a}^J_n) \mid \Psi > \quad \text{level matching}$$

   .

   Este simple conteo servirá para organizar los estados en respresentaciones del grupo de Poincare en D dimensiones (guia siguiente)