GUIA 2A: Teoría de Campos con Invariancia Conforme. Aspectos clásicos de la simetría: álgebra, grupo

En esta guía introduciremos la noción de simetría conforme, distinguiendo el grupo de su álgebra, el caso euclídeo del lorentziano y viendo lo que ocurre en el caso peculiar, relevante para la teoría de cuerdas, en que la dimensión del espacio es 2. La gran extensión de esta guía se debe principalmente a la abundancia de explicaciones y definiciones que contemplan el no haberse topado con muchas de estas ideas en un curso de relatividad general.

Nociones básicas preliminares:

I. Transformación conforme

En una variedad $\mathcal{M}$ dotada de una metrica g, un diffeomorfismo $f : \mathcal{M} \to \mathcal{M}$ induce una métrica $\tilde{g}$, el *pullback* de la metrica g por f. Si f manda un punto de coordenadas $\tilde{x}^\mu$ a uno de coordenadas x^μ, la expresión de las componentes de la métrica, $\tilde{g}_{\mu\nu}$, está dada por:

$$\tilde{g}_{\mu\nu}(\tilde{x}) = \frac{\partial x^\rho}{\partial \tilde{x}^\mu}\frac{\partial x^\sigma}{\partial \tilde{x}^\nu} g_{\rho\sigma}(x)$$

El diffeomorfismo f es una *transformación conforme* si la métrica inducida difiere de la original en un factor dependiente del punto de la variedad. Es decir:

$$\tilde{g}_{\mu\nu}(\tilde{x}) = \frac{\partial x^\rho}{\partial \tilde{x}^\mu}\frac{\partial x^\sigma}{\partial \tilde{x}^\nu} g_{\rho\sigma}(x) = \Omega^{-2}(x) g_{\mu\nu}(\tilde{x}) \tag{1}$$

El exponente -2 fue introducido por conveniencia. Las isometrías son un caso particular en que dicho factor es 1.

II. Grupo de diffeomorfismos uniparametricos

A fin de hablar del álgebra conforme es necesario introducir la idea de familia uniparamétrica de diffeomorfismos. Existe una manera de generar este en una variedad diferenciable de d dimensiones (sin necesariamente una estructura métrica) a partir de un campo vectorial de componentes ξ^μ. Eso se hace proponiendo una familia de diffeomorfismos $x^\mu \to x^\mu(\varepsilon)$ (ε un numero real) tal que se cumpla la siguiente ecuación diferencial:

$$\frac{dx^\mu(\varepsilon)}{d\varepsilon} = \xi^\mu(x(\varepsilon)) \tag{2}$$

con la condición inicial $x^\mu(0) = x^\mu$. De esta forma, el campo ξ genera curvas que pasan por cada x^μ, para cada punto de la variedad. El campo vectorial puede pensarse como un operador diferencial v definido como $v \equiv \xi^\mu \partial_\mu$. Con este lenguaje, la ecuación anterior puede escribirse como:

$$\frac{dx^\mu(\varepsilon)}{d\varepsilon} = v(x(\varepsilon))$$

III. Álgebra del grupo conforme

Cuando ciertas familias de diffeomorfismos uniparamétricos forman un grupo (como es el caso del grupo conforme), el espacio de los campos vectoriales que lo generan (pensados como operadores diferenciales) tienen una estructura de álgebra de Lie, donde el corchete de Lie es definido por el conmutador entre los operadores. Si $v_1 = \xi_1^\mu \partial_\mu$ y $v_2 = \xi_2^\nu \partial_\nu$, entonces:

$$w \equiv [v_1, v_2] = (\xi_1^\mu \partial_\mu \xi_2^\nu - \xi_2^\mu \partial_\mu \xi_1^\nu)\partial_\nu$$

será también un generador de una transformación del grupo.

Ahora si, empieza la guía de ejercicios.

Ejercicios de la guía:

1. Considerando el caso en que la métrica sea plana (sea minkowskiana o euclídea o de alguna otra signatura), muestre a partir de su definición que:

   a) Las transformaciones conformes forman un grupo (es algo simple pero requiere pensar en su estructura de grupo).

   b) Muestre que las siguientes trasnformaciones i) $x^\mu \to \lambda x^\mu$ ii) $x^\mu \to \frac{x^\mu - c^\mu x^2}{1-2c.x+c^2x^2}$ son conformes. En la última, las c^μ son constantes, y $c.x$, c^2 y x^2 denotan los productos escalares y normas correspondientes a la métrica en cuestión.

   c) Encuentre en las dos transformaciones anteriores el factor Ω.

2. Para fijar ideas sobre la noción de grupo uniparamétrico de diffeomorfismos, halle la solución a la ecuación 2 correspondiente a los siguientes campos:

   a) $\xi^\mu = a^\mu$ (con a^μ) constantes.

   b) $\xi^\mu = x^\mu$

   c) En el caso específico de $d = 1$ (para no confundirse con índices), considere el caso $\xi = x^2$.

3. Con el uso del operador $v\xi^\mu \partial_\mu$ la solución general puede escribirse como:

   $$x^\mu(\varepsilon) = e^{\varepsilon v}(x^\mu)$$

   .

   Aplique esta expresión a los casos del ejercicio anterior para entender lo que significa y verifique que a primer orden en ε se obtiene $x^\mu(\varepsilon) = x^\mu + \varepsilon \xi^\mu + O(\varepsilon^2)$.

4. Considere el caso de la métrica plana, sea euclideana o minkowskiana, en el sistema de coordenadas en que $g_{\mu\nu}$ es $\delta_{\mu\nu}$ o $\eta_{\mu\nu}$. Sea $x^\mu \to x^\mu + \epsilon \xi^\mu$ el desarrollo a primer orden de un diffeomorfismo uniparamétrico que genera una transformación conforme.

   a) Muestre que se cumple

   $$\partial_\mu \xi_\nu + \partial_\nu \xi_\mu = \frac{2}{d}(\partial \cdot \xi) g_{\mu\nu} \tag{3}$$

   b)A partir de la ecuación anterior obtenga esta otra implicación:

   $$g_{\mu\nu}\partial^2(\partial_\rho \xi^\rho) + (d-2)\partial_\mu \partial_\nu(\partial_\rho \xi^\rho) = 0$$

   c) Usando las dos relaciones anteriores muestre que para $d > 2$, $\epsilon(x)$ es a lo sumo cuadrático en x^μ.

5. Cuando se particulariza la ecuación a) del problema anterior al caso $d = 2$ euclídeo, mostrar que esta se reduce a las condiciones de Cauchy-Riemann,

$$\frac{\partial \xi_2}{\partial x^1} = -\frac{\partial \xi_1}{\partial x^2}, \quad \frac{\partial \xi_1}{\partial x^1} = \frac{\partial \xi_2}{\partial x^2}.$$

Usando coordenadas complejas $z = x^1 + ix^2$, $\zeta = \xi^1 + i\xi^2$, muestre que esto implica que la función ζ es holomorfa, i.e. $\partial_{\bar{z}}\zeta = 0$.

Halle las condiciones análogas en el caso minkowskiano. ¿Cuál es la diferencia fundamental?

6. **[Ejercicio engorroso: si no lo hace, al menos trate de entender lo que se pretende mostrar]** Verifique que los vectores $\xi = \xi^\mu \partial_\mu$ que cumplen la ecuación (3) son cerrados ante conmutadores.

7. Busque en al bibliografía la estructura del álgebra conforme en $d > 2$. Es decir, diga cuales son las álgebras más conocidas (como las de $so(n, m)$) a las cuales es isomorfa. En particular, verifique que la dimensión del álgebra coincide con el número de generadores que espera (el de las isometrías, dilataciones y conformes especiales).

8. Una manera directa de obtener el grupo y álgebra conformes en $d = 2$ es usando coordenadas diferentes en las cuales la métrica se escriba de esta manera:

$$ds^2 = dx^+ dx^- \qquad \text{(minkowskiana)} \tag{4}$$
$$ds^2 = dz d\bar{z} \qquad \text{(euclídea)} \tag{5}$$

A partir de esa expresión y de la definición de transformación conforme, muestre que en el caso minkowskiano la siguiente es una transformación conforme:

$$(x^+, x^-) \to (f(x^+), g(x^-)),$$

siendo f y g funciones arbitrarias (invertibles y derivables). En el caso euclídeo, muestre que la $z \to f(z)$ con f holomorfa es una transformación conforme (Observación: ambas son de hecho las más generales, pero no se pide que se muestre eso). Pensando en diffeomorfismos uniparamétricos, reobtenga el resultado del ejercicio anterior.

9. En $d = 2$, tanto en el caso euclídeo como el minkowskiano, existe un subconjunto de transformaciones, que forman un grupo, que cumplirán un rol especial.

$$f(x^+) = \frac{ax^+ + b}{cx^+ + d} \quad , \quad g(x^-) = \frac{ax^- + b}{cx^- + d} \qquad \text{(minkowskiano)} \tag{6}$$
$$h(z) = \frac{az + b}{bz + d} \qquad \text{(euclídeo)} \tag{7}$$

En el primer caso, los parámetros son reales. En el segundo, complejos, habiendo en ambos casos 6 parámetros reales. Los parámetros cumplen que $ad - bd \neq 0$ a fin de evitar caer en funciones constantes. En el caso euclídeo, el dado por las transformaciones h se conoce como *grupo de Moebius*.

a) Indique tanto en el caso euclídeo como minkowskiano a que elección de parámetros corresponden las traslaciones, boosts (o rotaciones) , dilataciones y transformaciones conformes especiales.

b) Existe una correspondencia a nivel de grupo con el grupo de matrices $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ de determinante igual a 1. Este se conoce como el grupo especial lineal y se denota como $SL_2(R)$ o $SL_2(C)$ según las entradas sean reales o complejas. Muestre que la correspondencia precisa es con $SL_2(R) \times SL_2(R)$ (caso minkowskiano) y $SL_2(C)$ (caso euclídeo). Indique porque la correspondencia no es 1-1. Demostrar la correspondencia requiere mostrar que la composición de funciones se corresponde con el producto de matrices y la función inversa con la inversa de matrices.

10. Verifique que en $d = 2$ y utilizando la variable compleja z los vectores ∂_z, $z\partial_z$ y $z^2\partial_z$ generan transformaciones del grupo de Moebius.

11. El uso de la variable compleja en $d = 2$ puede inducir a confusiones. Los vectores del ejercicio anterior son 3 mientras que el álgebra conforme del grupo de Moebius tiene dimension 6. La discrepancia se resuelve si se tiene en cuenta que los vectores del ejercicio anterior deben combinarse linealmente con coeficientes complejos a fin de reproducir todas las transformaciones correspondientes a dicho grupo: traslaciones, dilataciones, rotaciones y transformaciones conformes especiales.

    Una forma de establecer contacto con las transformaciones reales es la siguiente: considerar a z y $\bar{z}$ como variables independientes, teniendo ahora el doble de generadores: ∂_z, $z\partial_z$, $z^2\partial_z$, $\partial_{\bar{z}}$, $\bar{z}\partial_{\bar{z}}$, $\bar{z}^2\partial_{\bar{z}}$, para luego generar combinaciones reales de ∂_{x^1} y ∂_{x^2}. Muestre que:

    - $\partial_z + \partial_{\bar{z}}$ genera traslaciones en x^0.
    - $z\partial_z + \bar{z}\partial_{\bar{z}}$ genera dilataciones.
    - $i(z\partial_z - \bar{z}\partial_{\bar{z}})$ genera rotaciones.

    Halle las combinaciones adecuadas que faltan.

12. El álgebra del grupo conforme es de dimensión infinita tanto en el caso euclídeo como minkowskiano. En el caso euclídeo, que es el caso mas relevante para lo que sigue, una base de vectores utilizada (duplicada en el sentido mencionado anteriormente) es la de $l_n \equiv -z^{n+1}\partial_z$ y $\bar{l}_n \equiv -\bar{z}^{n+1}\partial_{\bar{z}}$, con n entero. Los vectores reales se obtendrán mediante las combinaciones $l_n + \bar{l}_n$ y $i(l_n - \bar{l}_n)$. Cada conjunto base (la derecha e izquierda) es cerrada ante conmutadores. El álgebra que satisfacen se denomina *álgebra de Witt*.

    a) Muestre que se cumple
    $$[l_n, l_m] = (m - n)l_{n+m}$$
    y lo análogo para los $\bar{l}_n$

    b) Identifique el conjunto de generadores del álgebra correspondiente al grupo de Moebius y verifique que forman una subalgebra.