# GUIA 2B: Teoría de Campos con Invariancia Conforme II: Estados, operadores

*En esta guía veremos como la simetría conforme en dimensión 2 se realiza a través de generadores que satisfacen un álgebra que es la extensión central de la de Witt y ciertos elementos necesarios para la construcción de los operadores de vértice, fundamentales para la formulación de las interacciones entre cuerdas en la próxima guía.*

**[Nivel 0] Simetría conforme a nivel cuántico** (no hay necesidad de campos para lo que sigue)

1. Como precalentamiento para el ejercicio siguiente, conviene familiarizarse con la noción de extensión central de un álgebra de Lie. Dada un álgebra de Lie $L$ cuyos generadores cumplen:

$$[A_i, A_j] = C^{ij}{}_k A^k$$

decimos que $\tilde{L}$ es una extensión central de $L$ por una álgebra de dimensión 1, generada por un elemnto $Z$, si los generadores de $\tilde{L}$, $\{A_i, Z\}$ pueden elegirse de forma tal que se cumpla:

$$[A_i, A_j] = C^{ij}{}_k A^k + C_{ij} Z, \quad [Z, A_i] = 0$$

Dado que $Z$ conmuta con todos, en una representacion irreducbible este elemento puede elegirse como un multiplo de la identidad. En particular, la identidad misma. La extension central se dice trivial, si mediante una redefinición de generadores, $\{\tilde{A}_i, \tilde{Z}\}$, las relaciones que definen $\tilde{L}$ son:

$$[\tilde{A}_i, \tilde{A}_j] = C^{ij}{}_k \tilde{A}^k, \;\; [\tilde{Z}, \tilde{A}_i] = 0$$

(a) Muestre que el álgebra de dimensión 3 dada por:

$$[A, B] = B + 3Z, \;\; [A, Z] = [B, Z] = 0 \tag{1}$$

es una extensión central trivial (en el sentido anterior) de la de dimensión 2 que cumple:

$$[A, B] = B$$

(b) Muestre que

$$[A, B] = Z, \;\; [A, Z] = [B, Z] = 0$$

no es una extensión trivial de la de dimensión 2 $[A, B] = 0$. Convensace de ello probando con redefinciones de los generadores.

2. La simetría conforme a nivel cuántico puede manifestarse en un álgebra que es la extensión central del álgebra de Witt.

$$[L_n, L_m] = (n-m)L_{n+m} + C_{n,m}$$

El elemento que conmuta con todos, llamado $Z$ en el item anterior, se ha omitido por considerar que estamos en una representación irreducible donde puede elegirse como la identidad.

(a) Usando algunas identidades de Jacobi y antisimetría, muestre que $C_{n,m}$ debe ser de la forma $A(n)\delta_{n+m}$.

(b) Usando las identidades de Jacobi (para el caso $[L_m, [L_n, L_k]]$ con $n + m + k = 0$) muestre que se debe cumplir:

$$(m-n)A(k) + (n-k)A(m) + (k-m)A(n) = 0$$

.

(c) Mostrar que la solución general a esta ecuación es $A(n) = \alpha n + \beta n^3$, siendo $\alpha$ y $\beta$ constantes.

(d) Eligiendo adecuadamente los generadores $L_0, L_1, L_{-1}$ tal que cumplan el álgebra de $SL_2(R)$ (es decir, eligiéndolos de tal forma que no aparezca el término central en esos casos) muestre que la solución general es $A(n) = \frac{n^3-n}{6}A(2)$. *(Notar que este argumento de la identidad de Jacobi no puede determinar el valor de $A(2)$)*

*Observación: la carga central se define de manera que el término central sea de la forma:* $\frac{c}{12}n(n^2-1)$, *de modo que* $c = \frac{A(2)}{2}$.

3. El modulo de Verma se define como una representación irreducible del álgebra de Virasoro en un espacio de Hilbert en el que se cumple:

(a) $(L_n)^\dagger = L_{-n}$

(b) $L_0$ y $\bar{L}_0$ acotados por debajo $\iff$ existe un vector $v$, autovector de $L_0$ con autovalor $h$ (estado de peso maximo, un mal nombre) tal que $L_m v = 0 \ \forall \ m > 0$.

Mostrar que

(a) $L_{-n}$ con $n > 0$ sube el autovalor de $v$ en $n$.

(b) Muestre que, a fin de no tener estados de norma negativa, $h \geq 0$ y $c \geq 0$.

(c) Es mas difícil de mostrar pero el caso $c = 0$ daría lugar a una representación trivial. Esto puede verse en la siguiente demostración : *The triviality of representations of the Virasoro algebra with vanishing central element and L0 positive* (Physics Letters B Volume 171, Issue 1, 17 April 1986, Pages 75-76)

El último punto es relevante porque muestra lo inevitable que es hallar una carga central no nula a nivel cuántico.

4. Uno de los axiomas de CFT es la existencia de un estado, que juega el rol del vacío en una QFT invariante de Poincare, invariante ante la subalgebra generada por los $L_{-1}, L_0, L_1$ (y sus barrados). Uno podría preguntarse: ¿por qué es que no se pide que el estado sea invariante ante todo el

álgebra conforme? Muestre que, cuando la carga central es no nula (de hecho, no puede serlo en una representación no trivial), esto no es posible.

**[Nivel 1] Teorías cuánticas de campos genéricas** (sin necesidad de un lagrangiano)

5. Un elemento fundamental en las teorías cuánticas de campos con invariancia conforme es el de tensor energía-momento, cuya definición es motivada por ejemplos en los que la teoría se construyó a partir de un lagrangiano. Para ver el tensor energía-momento en un caso concreto, considere un campo escalar libre sin masa en $d = 2$, con signatura euclídea (aunque no habría un cambio sustancial en las cuentas si esta fuese lorentziana).

   (a) Halle la corriente de Noether asociada a una transformación conforme generada por $\varepsilon(z)$ y $\bar{\varepsilon}$ (en el sentido explicado en la guía anterior) y lea de ahí el tensor energía-momento simétrico.

   (b) Muestre que ese tensor energía-momento hallado tiene traza cero y es conservado.

   (c) Muestre que la divergencia y traza cero implican que las únicas componentes no nulas del tensor son las $zz$ y $\bar{z}\bar{z}$, dependiendo estas exclusivamente de $z$ y $\bar{z}$ respectivamente.

6. Las propiedades anteriores no son privativas del campo escalar libre sin masa. Muestre que cualquier tensor energía-momento simétrico en un modelo conforme necesariamente tendrá traza nula. +- *(Ayuda: use la conservación de la corriente de Noether asociada a las dilataciones)*

7. Los modelos de teorías de campos con invariancia conforme relevantes para teoría de cuerdas son aquellos en los que los campos son periódicos en una coordenada espacial, de forma tal que se puede pensar que viven en un cilindro [1]. Si bien el sistema físico vive en un cilindro lorentziano, como es usual, nos interesa su continuación analítica en el tiempo, la cual nos lleva a una métrica euclídea en un espacio que es topológicamente un cilindro. A la coordenada no periódica la llamaremos $t$ y a la periódica $\sigma$.

   Realice la transformación explicita que lleva el cilindro al plano, chequeando que cada hipersuperficie $t$ constante se mapea a círculos y que, en particular, la hipersuperficie $t = -\infty$ se mapea al origen.

8. El desarrollo de Fourier de las dos componentes no nulas del tensor energía-momento en el cilindro euclídeo es:

$$T_{ZZ}^{cilindro} = \sum_n L_n e^{-n(t+i\sigma)}$$

$$T_{\bar{Z}\bar{Z}}^{cilindro} = \sum_n L_n e^{-n(t-i\sigma)}$$

   Aqui hemos usado la coordenada compleja $Z$ (mayuscula) para denotar a la variable $t + i\sigma$ que describe al cilindro ($\bar{Z}$ a su complejo conjugada) y distinguirla de $z$ que describe un punto del plano complejo.

   Reescriba el desarrollo del tensor energía-momento inducido en el plano por la transformación $z = e^Z$, usando que este es un tensor de rango dos (y por tanto transforma no trivialmente) y obtenga la expansión de $T(z)$ en series de Laurent:

[1] Hay razones mas generales para considerar el cilindro como el espacio donde está bien definido el grupo conforme. No entraremos en esas razones

$$T(z) \sim \sum_n \frac{L_n}{z^{n+2}}$$

($\sim$ refiere a alguna constante multiplicando).

9. A partir de la forma en que transforma un campo primario de peso $(h, \bar{h})$ y del hecho de que el estado de vacío es invariante ante el grupo generado por el álgebra $SL_2(C)$, halle la expresión general de la función de dos puntos y tres puntos, es decir, de los valores de expectación en vacío del producto de campos evaluados en dos y tres puntos.

10. A partir de la transformación finita de un campo primario $\phi$ de dimensión conforme $(h, \bar{h})$, muestre que, a primer orden en el parámetro $\varepsilon(z)$, se cumple:

$$\delta_\varepsilon \phi(w) = h\partial\varepsilon\phi(w) + \varepsilon\partial\phi(w)$$

11. Muestre que para el caso $\varepsilon(z) = z^{n+1}$, se obtiene la transformación anterior calculando $[L_n, \phi(w)]$, ya sea pensado esta cantidad como conmutador (usando la expresión de $L_m$ en términos de operadores) o como integral de contorno.

12. Se puede ver que un operador primario de peso $(h\bar{h})$ debe tener el siguiente OPE con el tensor energía momento

$$T(z)\Phi(w, \bar{w}) \sim \frac{h}{(z-w)^2}\Phi(w, \bar{w}) + \frac{1}{(z-w)}\partial_w\Phi(w, \bar{w}) + ..$$

(y la expresión analoga con $\bar{T}$).

Usando la definición de los $L_m$, muestre que de este OPE se deduce la expresión del ejercicio anterior.

13. En una teoria general de campos se postula que el OPE del tensor energía momento consigo mismo tiene la forma:

$$T(z)T(w) \sim \frac{\frac{c}{2}}{(z-w)^4} + \frac{2}{(z-w)^2}T(w) + \frac{1}{z-w}\partial T(w)$$

(idem para $\bar{T}$).

    (a) Muestre que de esta expansión se deduce el algebra de Virasoro para los modos $L_n$.
    (b) Halle la ley de transformación del tensor energía momento, a primer orden en el parametro $\varepsilon$ de la transformación conforme, mostrando que su forma difiere de la de un campo primario de peso 2 en un término proporcional a la carga central.

14. Muestre que si $\Phi$ es un campo primario de peso $(h, \bar{h})$, entonces

$$\lim_{z,\bar{z}\to 0} \Phi(z, \bar{z}) |0\rangle$$

es un estado de peso máximo con pesos $(h, \bar{h})$. *Observación: esta afirmación da una dirección de la llamada correspondencia estado-operador. En este caso, a operadores primarios le podemos asignar estados de peso máximo.*

**[Nivel 2] Teorías de campos asociadas a un lagrangiano** (caso particular del campo escalar sin masa libre)

15. Considerando los modos de Fourier del campo escalar libre sin masa con condiciones periódicas espaciales (la expansión será la misma que la de cada coordenada espacial de la cuerda cerrada) y usando los corchetes de Poisson para los modos $\alpha_n^\mu$

$$\{\alpha_m^\mu, \alpha_n^\nu\} = im\eta^{\mu\nu}\delta_{m+n}$$

mostrar que los $L_m$ (las expresiones clásicas) satisfacen:

$$\{L_m, L_n\} = i(m-n)L_{m+n}$$

(Es util recordar que $\{A, BC\} = \{A, B\}C + B\{A, C\}$)

16. Encuentre la carga central en el caso del campo escalar usando las expresiones cuánticas de los generadores $L_n$. Estas difieren de las clásicas en que los $\alpha$'s aparecen ordenados normalmente. Para ello basta usar los resultados del ejercicio 1 y hallar algún conmutador que permita obtener la la expresión de $A(2)$.

17. Para el campo escalar, halle la expansión en producto de operadores (OPE) de $T(z)\partial X(w)$ y muestre de esa expresión que $\partial X(w)$ es un campo primario de peso 1.

18. El tensor energía-momento para un campo escalar sin masa sobre el plano complejo está dado por

$$T(z) = -\frac{1}{2} : \partial X(z)\partial X(z) :$$

   (a) Usando que el OPE de $T(z)T(w)$ satisface lo esperado para el tensor energía momento, obtenga la carga central en forma directa tomando valores de expectacion en vacio de $T(z)T(w)$.

   (b) Encuentre ahora el OPE de $T(z)T(w)$, verificando que tiene la forma general esperada. Para ello use que los términos singulares en el OPE vendran de las contracciones de Wick entre los campos evaluados en $z$ y los evaluados en $w$.