Cuerdas = CFT + Vinculos

El largo camino para las próxima clases:

- Definición de grupo y algebra conforme.
- Teorias clasicas de campos con invariancia conforme (pesos conformes, tensor energía momento, algebra de Poisson de sus modos de Fourier)
- Aspectos cuanticos generales: aparición de carga central, OPE, identidades de Ward.
- Vinculación con cuerdas: Operadores de vertices, condición de estado fisico y mapa operador estado

El cambio inducido en la métrica por un diffeomorfismo dado por f (invertible)

$$x \to \tilde{x} = f(x)$$

$$\Updownarrow$$

$$x = f^{-1}(\tilde{x})$$

$$\longrightarrow \quad \tilde{g}_{\mu\nu}(\tilde{x}) = \frac{\partial x^\sigma}{\partial \tilde{x}^\mu}\frac{\partial x^\rho}{\partial \tilde{x}^\nu} g_{\rho\sigma}(x)$$

f es una transformación conforme si

$$\boxed{\tilde{g}_{\mu\nu}(\tilde{x}) = \Omega^{-2}(x) g_{\mu\nu}(\tilde{x})}$$

Nos interesa el caso de metrica plana, en el que existe un sistema de coordenadas
en el cual las componentes de la métrica son constantes, por lo que pueden suprimerse las
dependencias espaciales en la metrica

$$g_{\mu\nu} \to \eta_{\mu\nu}$$

$$g_{\mu\nu} \to \delta_{\mu\nu}$$

$$\frac{\partial x^\sigma}{\partial \tilde{x}^\mu}\frac{\partial x^\rho}{\partial \tilde{x}^\nu} g_{\rho\sigma} = \Omega^{-2}(x) g_{\mu\nu}$$

$$\Downarrow$$

(tomo determinante
en ambos lados)

$$\Omega(x) = \left|\frac{\partial \tilde{x}}{\partial x}\right|^{\frac{1}{d}}$$

Observaciones elementales

Las transformaciones conformes forman un grupo (tienen inversas, la composicion es dos es una nueva transformacion conforme, la transformación identidad es conforme)

$$\Omega(x) = 1 \quad \Longleftrightarrow \quad \text{Isometrías} \subset \text{Grupo conforme}$$

$$g_{\mu\nu} = \delta_{\mu\nu} \qquad\qquad g_{\mu\nu} = \eta_{\mu\nu}$$

Grupo euclídeo: rotaciones + traslaciones

Poincare: Lorentz + traslaciones

Además de isometrias (Grupo Euclídeo/Poincare), en el caso plano tenemos:

$$\text{(dilataciones: 1 parámetro)}$$

$$x^\mu \to \lambda x^\mu$$

$$\text{(transformaciones conformes especiales: } d \text{ parametros)}$$

$$x^\mu \to \frac{x^\mu - c^\mu x^2}{1 - 2c.x + c^2 x^2}$$

(Verificar que es conforme!)

$$\begin{aligned} \Omega(x) &= \lambda \text{ (dilataciones)} \\ \Omega(x) &= \frac{1}{1 - 2c.x + c^2 x^2} \text{ (conformes especiales)} \end{aligned}$$

Algebra conforme

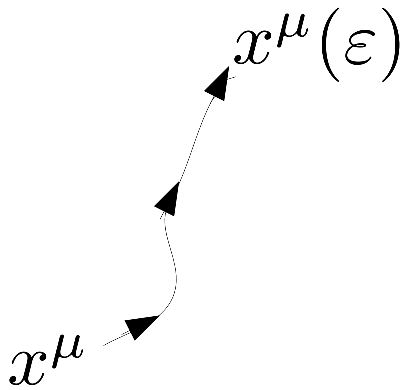
Necesitamos la idea de grupo uniparametrico de diffeomorfismo.

Dado un campo vectorial $\xi^{\mu}(x)$ construyo una familia de diffeomorfismos de la forma

$$x^{\mu} \rightarrow x^{\mu}(\varepsilon)$$

, como la solución a esta ecuación diferencial:

$$\boxed{\frac{dx^{\mu}(\varepsilon)}{d\varepsilon} = \xi^{\mu}(x)}$$



con la condición inicial $\mathrm{x}^{\mu}(0) = x^{\mu}$

$$x^\mu(\varepsilon) = x^\mu + \varepsilon\xi^\mu(x) + O(\varepsilon^2)$$

Ejemplos

$$\xi^\mu(x) = x^\mu \to \frac{dx^\mu(\varepsilon)}{d\varepsilon} = x^\mu$$

$$\downarrow$$

$$x^\mu(\varepsilon) = e^\varepsilon x^\mu = x^\mu + \varepsilon x^\mu + O(\varepsilon^2)$$

Dilatación, de parámetro e^ε

$$\xi^\mu(x) = (x^\mu)^2 \to \frac{dx^\mu(\varepsilon)}{d\varepsilon} = (x^\mu)^2$$

$$\downarrow$$

$$x^\mu(\epsilon) = \frac{x^\mu}{1-\varepsilon x^\mu}$$

Transformación conforme especial.

De la definición de transformación conforme

$$\frac{\partial x^\sigma}{\partial \tilde{x}^\mu}\frac{\partial x^\rho}{\partial \tilde{x}^\nu} g_{\rho\sigma}(x) = \Omega^{-2} g_{\mu\nu}(x)$$

aplicada al caso: $$\tilde{x}^\mu = x^\mu(\varepsilon) = x^\mu + \varepsilon \xi^\mu(x) + O(\varepsilon^2)$$

y quedandonos a primer orden en el parámetro del diffeomorfismo llegamos a (Ejercicio):

$$\partial_\mu \xi_\nu + \partial_\nu \xi_\mu = \frac{2}{d}\partial_\rho \xi^\rho g_{\mu\nu}$$

(piensen en metricas con componentes componentes constantes, como la plana)

$$\boxed{\partial_\mu \xi_\nu + \partial_\nu \xi_\mu = \frac{2}{d} \partial_\rho \xi^\rho g_{\mu\nu}}$$

$$g_{\mu\nu} \partial^2 (div\ \xi) + (d-2) \partial_{\mu\nu} (div\ \xi) = 0$$

$d > 2 : \xi = \ cuadratico$

d=2: caso especial

d=2

$$\partial_\mu \xi_\nu + \partial_\nu \xi_\mu = \partial_\rho \xi^\rho g_{\mu\nu}$$

Euclideo

$$\partial_1 \xi_2 = -\partial_2 \xi_1$$

$$\partial_1 \xi_1 = \partial_2 \xi_2$$

ξ_1, ξ_2 funciones armonicas

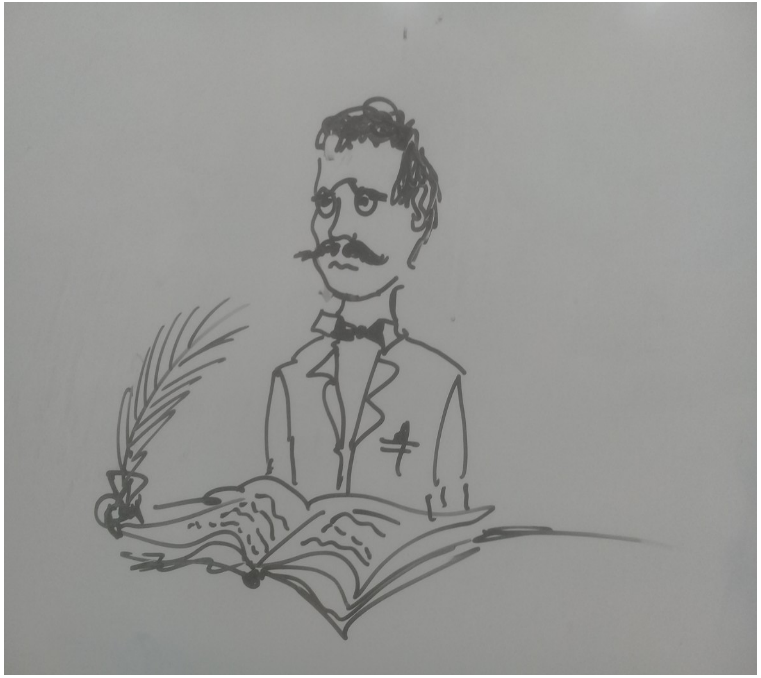
Lorentziano

$$\partial_1 \xi_2 = -\partial_2 \xi_1$$

$$\partial_1 \xi_1 = -\partial_2 \xi_2$$

ξ_1, ξ_2 funciones arbitrarias de $x^1 \pm x^2$

$$\mathrm{ds}^2 = dx^+ dx^-$$



$$x^\pm \to \tilde{x}^\pm = f^\pm(x^\pm)$$

$$ds^2 = dx^+ dx^- = (\dot{f}^+ \dot{f}^-)^{-1} d\tilde{x}^+ d\tilde{x}^-$$

$$ds^2 = dz d\bar{z}$$

$$\mathrm{z} \to \tilde{z} = f(z)$$

$$ds^2 = dz d\bar{z} = (f'(z)\bar{f}'(z))^{-1} d\tilde{z} d\bar{\tilde{z}}$$

Ejemplo importante de de algunas transformaciones

$$f_+(x^+) \quad = \quad \frac{ax^+ + b}{cx^+ + d}$$

$$f_-(x^-) \quad = \quad \frac{a'x^- + b'}{c'x^- + d'}$$

a,b,c,d (a',b', c', d')=reales

$$f(z) = \frac{az + b}{cz + d}$$

a,b,c,d complejos

6 parámetros reales en ambos casos

Teorias clásicas de campos con invariancia conforme

Ej: campo escalar libre sin masa en d dimensiones

$$\boxed{S[\phi] = \frac{1}{2}\int d^d x \; \eta^{\mu\nu}\partial_\mu \phi \partial_\nu \phi}$$

La acción es invariante ante transformaciónes conformes f en el siguiente sentido:

$$\begin{aligned} \phi(x) \to \tilde{\phi}(x) &= \mathrm{factor}(f) \;\; \phi(f(x)) \\ S[\tilde{\phi}] &= S[\phi] \end{aligned}$$

En d dimensiones el factor para el campo escalar libre es:

$$factor(f) = \left| \frac{\partial f}{\partial x} \right|^{\frac{d-2}{d}} = \Omega^{\Delta} \longrightarrow \Delta = d-2$$

$$\Delta = \text{ dimensión o peso conforme}$$

Dos formas de ver la transformación en la acción (Δ=0 por simplicidad)

Introduzco campo transformado, dejando lo demas intacto

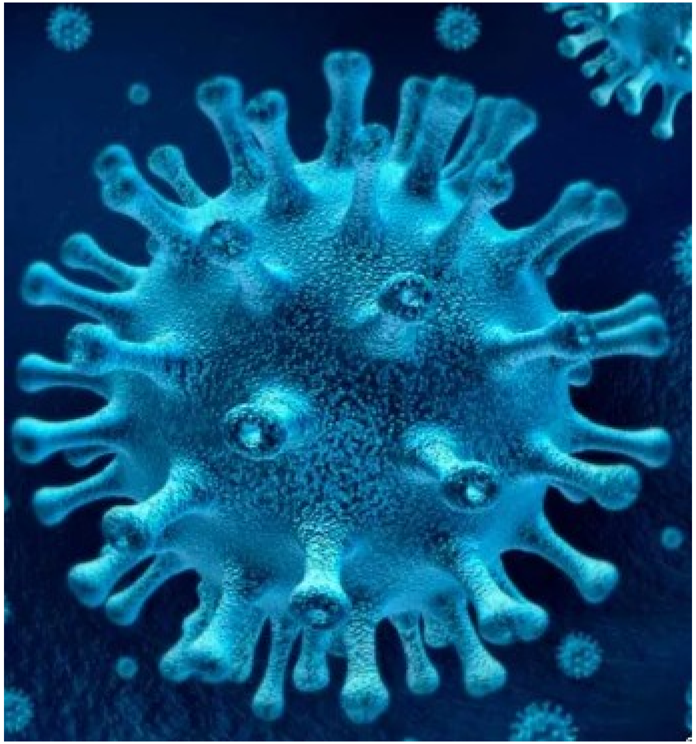
$$
\begin{aligned}
S[\tilde{\phi}] &= \frac{1}{2}\int d^d x \sqrt{|\, g \,|}\, g^{\mu\nu}\partial_\mu(\phi\circ f)(x)\partial_\nu(\phi\circ f)(x) \\
&= \frac{1}{2}\int d^d \tilde{x} \sqrt{|\, \tilde{g} \,|}\, \tilde{g}^{\mu\nu}\partial_\mu\phi(\tilde{x})\partial_\nu\phi(\tilde{x}) \\
&= \frac{1}{2}\int d^d \tilde{x}\, \Omega^{2-d} \sqrt{|\, g \,|}\, g^{\mu\nu}\partial_\mu\phi(\tilde{x})\partial_\nu\phi(\tilde{x})
\end{aligned}
$$

Use coordenadas nuevas

$$\tilde{x} = f(x)$$

Use que f es transformación conforme

En que piensa cuando ve esto?



La imagen anterior representa un diagrama a nivel arbol para el scatering de N cuerdas cerradas

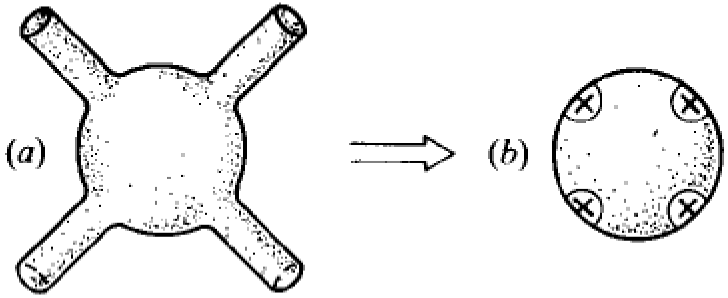


Figure 1.10. Conformal invariance makes it feasible to evaluate string diagrams. Among other things this makes it possible to compactify the world sheet, closing off the holes corresponding to incoming and outgoing particles. The external string states in, say, part (a) of this figure are thereby projected to points, indicated as $\otimes$ in (b); at these points insertions of suitable local operators must be understood.

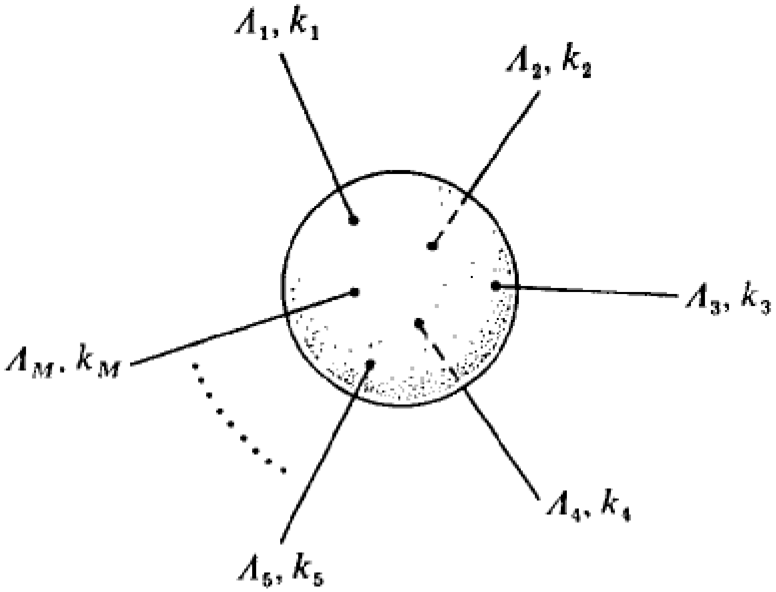


Figure 1.12. Representation of the amplitude for the scattering of M external particles of types $\Lambda_1, \Lambda_2, \ldots, \Lambda_M$ and momenta $k_1, k_2, \ldots, k_M$.

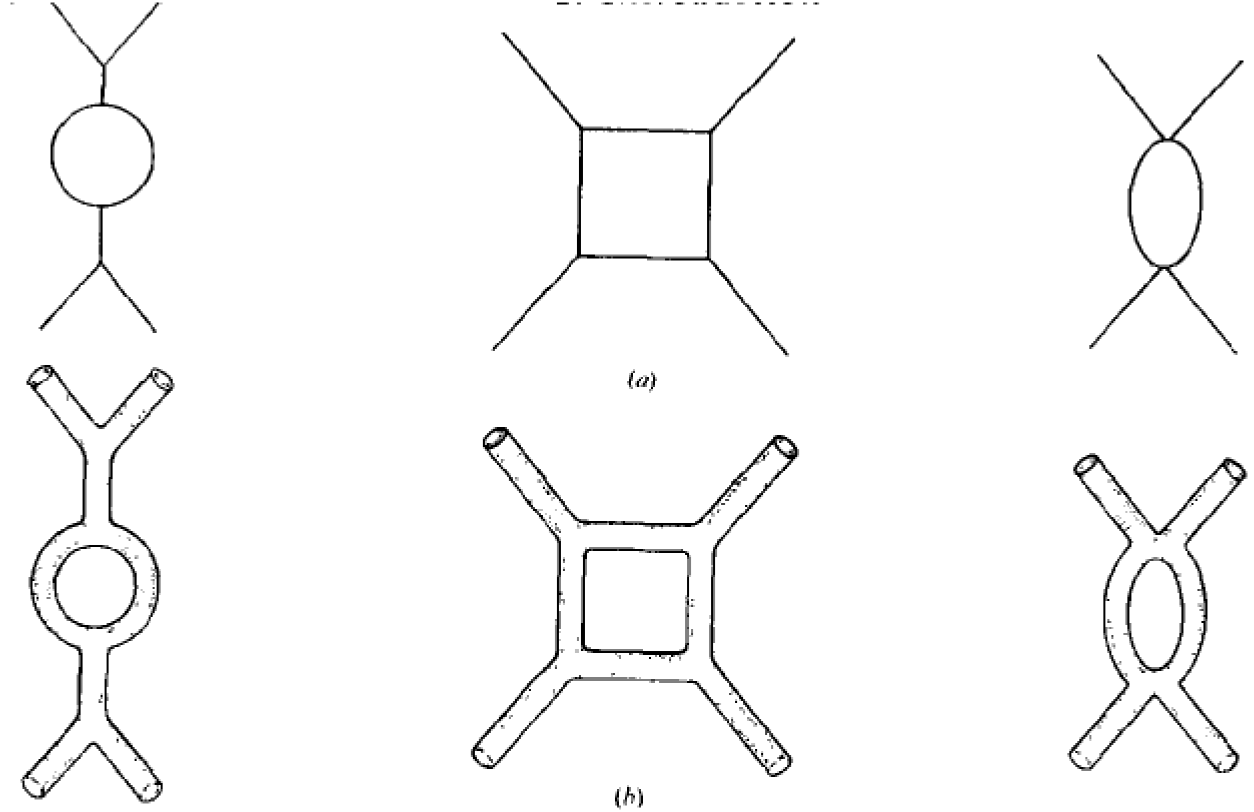


Figure 1.9. Several distinct field-theory diagrams may become isomorphic as string diagrams. In (a) we show several Feynman diagrams that in field theory represent one-loop corrections to a four-particle amplitude; in (b) we show the corresponding closed-string diagrams. The closed-string diagrams of (b) all have the same topology, so they represent different integration regions in the same string diagram.