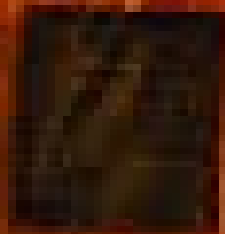
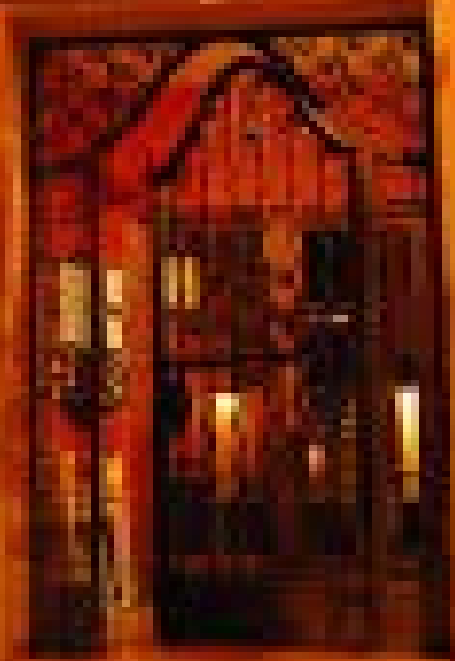
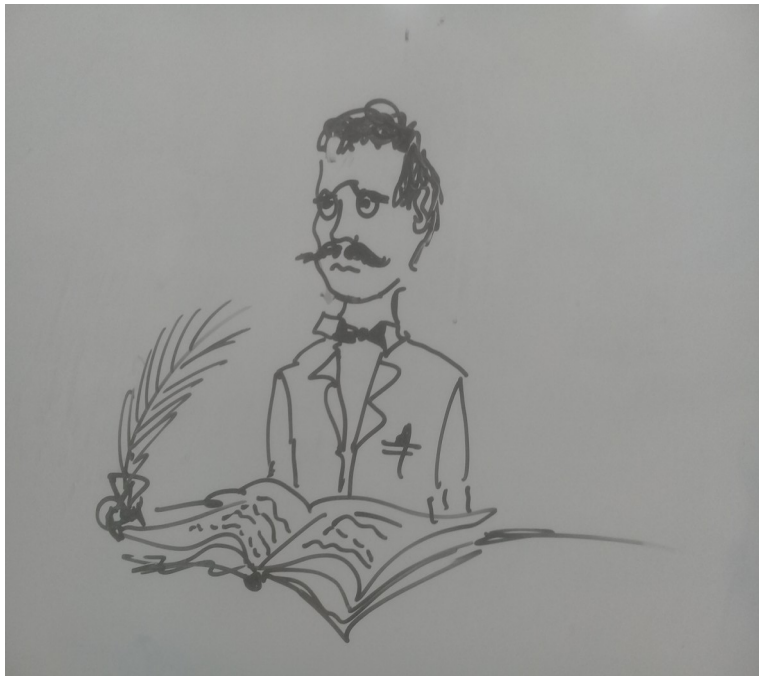


VIRASORO BAR



$$ds^2 = dx^+ dx^-$$



$$x^\pm \rightarrow \tilde{x}^\pm = f^\pm(x^\pm)$$

$$ds^2 = dx^+ dx^- = (f^+ f^-)^{-1} d\tilde{x}^+ d\tilde{x}^-$$

$$ds^2 = dz d\bar{z}$$



$$z \rightarrow \tilde{z} = f(z)$$

$$ds^2 = dz d\bar{z} = (f'(z) \bar{f}'(z))^{-1} d\tilde{z} d\bar{\tilde{z}}$$

# Transformaciones conformes de interés especial

$$F_+(x^+) = \frac{ax^+ + b}{cx^+ + d}$$

$$F_-(x^-) = \frac{a'x^- + b'}{c'x^- + d'}$$

$a, b, c, d$  ( $a', b', c', d'$ ) = reales

Moebius

$$F(z) = \frac{az + b}{cz + d}$$

$a, b, c, d$  complejos

6 parámetros reales en ambos casos

# Recordatorio

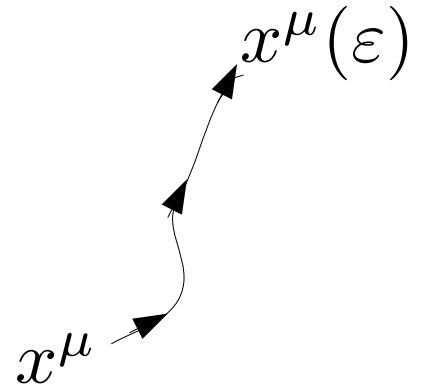
Dado un campo vectorial  $\xi^\mu(x)$  construyo una familia de diffeomorfismos de la forma

$$x^\mu \rightarrow x^\mu(\varepsilon)$$

, como la solución a esta ecuación diferencial:

$$\frac{dx^\mu(\varepsilon)}{d\varepsilon} = \xi^\mu(x)$$

con la condición inicial  $x^\mu(0) = x^\mu$



Propongo  $v = f(z)\partial_z$  con  $f$  tal que genere una transformación de Moebius

$$\frac{dz(\varepsilon)}{d\varepsilon} = f(z)\partial_z(z) = f(z) \longrightarrow z(\varepsilon) = F_\varepsilon(z)$$

$$z(0) = z$$

$F_\varepsilon$  Transformación de Moebius

Ejemplos:

$$v = z^2\partial_z \longrightarrow \frac{dz}{d\varepsilon} = z^2 \longrightarrow -1/z + 1/z(\varepsilon) = \varepsilon$$

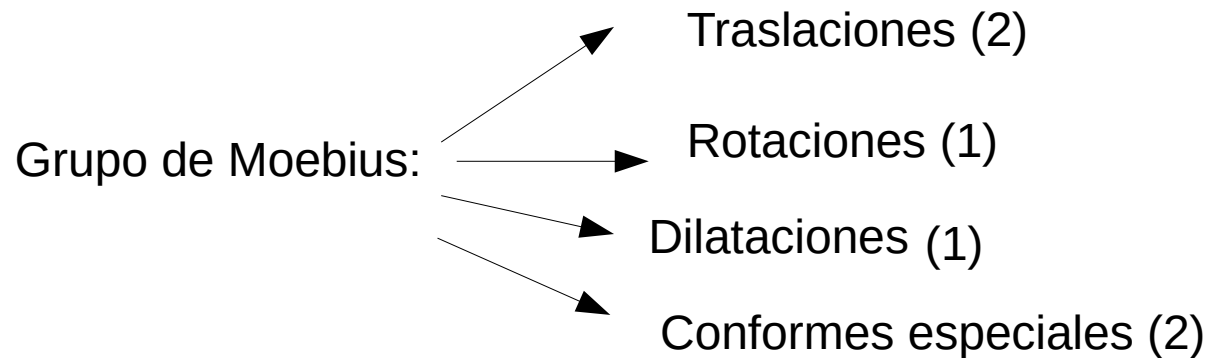


$$z(\varepsilon) = \frac{z}{1+\varepsilon z}$$

Estos tres campos

$$\partial_z, z\partial_z, z^2\partial_z$$

, combinados entre si con *coeficientes complejos* (3 complejos), generan todo el grupo de Moebius a través del mapa exponencial.



Estos últimos 6 parámetros reales corresponden a los 3 parámetros complejos

Escritura en variable compleja de transformaciones conformes en variable real

$$z \rightarrow az = |a| e^{i\theta} z$$

Combinación de rotación y dilatación

$$z \rightarrow z + b = x^1 + \operatorname{Re}(b) + i(x^2 + \operatorname{Im}(b))$$

Traslación en las dos direcciones

Analogamente para las conformes especiales.

El álgebra conforme en  $d=2$  es de dimensión infinita. Una base polemica es la siguiente:

$$l_n = z^{n+1} \partial_z \quad (n \in \mathbb{Z})$$

Para  $n$  negativos los vectores divergen en el origen. Porque molestar desde tan temprano?

La respuesta tiene que ver con que estos vectores estan pensados para el plano que resulta de un mapa conforme del cilindro, siendo el origen el pasado remoto. La clase próxima lo vemos

El caso  $n=-1,0,1$  reproduce los del slide anterior.



# Algebra de Witt

$$[l_n, l_m] = (n - m)l_{n+m}$$

nombrada así por Ernst Witt.

Esta es el álgebra de los vectores meromorfos en la esfera



Contiene la subálgebra  $\mathrm{SL}_2(\mathbb{C})$

$$[l_1, l_{-1}] = 2l_0 \quad [l_0, l_1] = -l_1 \quad [l_0, l_{-1}] = l_{-1}$$

# Duplicando todo

$$l_n = z^{n+1} \partial_z \quad (n \in \mathbb{Z})$$

$z, \bar{z}$  independientes

$$\bar{l}_n = \bar{z}^{n+1} \partial_{\bar{z}} \quad (n \in \mathbb{Z})$$

Dos copias de Witt

$$[l_n, l_m] = (n - m)l_{n+m} \quad [l_n, \bar{l}_m] = 0$$

$$[\bar{l}_n, \bar{l}_m] = (n - m)\bar{l}_{n+m}$$

El contacto con el mundo real se logra considerando combinaciones reales de

$$l_n + \bar{l}_n$$
$$i(l_n - \bar{l}_n)$$

e imponiendo la condición  $\bar{z} = z^*$

$$\bar{z} = z^*$$
$$\downarrow$$
$$\partial_z = \partial_{x^1} - i\partial_{x^2} \quad \partial_{\bar{z}} = \partial_{x^1} + i\partial_{x^2}$$

Ejemplo

$$(l_{-1} + \bar{l}_{-1}) |_{\bar{z}=z^*} = 2\partial_{x^1}$$

$$(l_0 + \bar{l}_0) |_{\bar{z}=z^*} = 2(x^1\partial_{x^1} + x^2\partial_{x^2})$$

$$i(l_{-1} - \bar{l}_{-1}) |_{\bar{z}=z^*} = -2\partial_{x^2}$$

$$i(l_0 - \bar{l}_0) |_{\bar{z}=z^*} = 2(x^1\partial_{x^2} - x^2\partial_{x^1})$$

# Realizaciones canonicas de transformaciones en espacio tiempo

Ejemplos:

$$\partial_x \rightarrow \{P_x, \cdot\} \longrightarrow \partial_x \Phi = \{P_x, \Phi\}$$

$$y\partial_x - x\partial_y \rightarrow \{J_z, \cdot\}$$

Esquemáticamente

$$f \rightarrow X_f / \delta_f \Phi = \{X_f, \Phi\}$$

(f transformación en el espacio tiempo)

$$l_n \rightarrow \{L_n, \cdot\}$$

$L_n =$  cantidad conservada asociada a la transformación dada por  $l_n$

= Modos de Fourier o  
Laurent del tensor energía momento



$\Phi(z, \bar{z}) =$  Campo de peso  $(h, \bar{h})$

$$\delta_{l_n} \Phi(z, \bar{z}) = \{L_n, \Phi(z, \bar{z})\}$$

$$\delta_{l_n} \Phi(z, \bar{z}) = z^{n+1} \partial_z \Phi(z, \bar{z}) + \underbrace{h(n+1)z^n \Phi(z, \bar{z})}$$

Parte intrinseca del cambio. Lo vemos la proxima.

$\{v_a\}$  = familia de vectores que cumplen un algebra de Lie

$$[v_a, v_b] = C_{ab}^c v_c$$

$$\{\{X_{v_a}, X_{v_b}\}, \Phi\} = (\delta_a \delta_b - \delta_b \delta_a) \Phi = C_{ab}^c \delta_c \Phi = C_{ab}^c \{X_{v_c}, \Phi\}$$

Parecería que:

$$\{X_{v_a}, X_{v_b}\} = C_{ab}^c X_{v_c}$$

## Arnold: *Mathematical methods of classical mechanics*

Thus, given a symplectic action of a Lie group  $G$  and a single-valued hamiltonian on  $M$ , we can construct a linear mapping of the Lie algebra of  $G$  into the Lie algebra of hamiltonian functions on  $M$ . The function  $H_{[a,b]}$  associated to the commutator of two elements of the Lie algebra is equal to the Poisson bracket  $(H_a, H_b)$ , or else it differs from this Poisson bracket by a constant:

$$H_{[a,b]} = (H_a, H_b) + C(a, b).$$

*Remark.* The appearance of the constant  $C$  in this formula is a consequence of an interesting phenomenon: the existence of a two-dimensional cohomology class of the Lie algebra of (globally) hamiltonian fields.

The quantity  $C(a, b)$  is a bilinear skew-symmetric function on the Lie algebra. The Jacobi identity gives us

$$C([a, b], c) + C([b, c], a) + C([c, a], b) = 0.$$

A bilinear skew-symmetric function on a Lie algebra with this property is called a *two-dimensional cocycle* of the Lie algebra.

If we choose the constants in the hamiltonian functions differently, then the cocycle  $C$  is replaced by  $C'$ , where

$$C'(a, b) = C(a, b) + \rho([a, b])$$

where  $\rho$  is a linear function on the Lie algebra. Such a cocycle  $C'$  is said to be *cohomologous* to

El mundo no se viene abajo si el algebra de los corchetes de Poisson adquiere una extensión central

$$\{X_{v_a}, X_{v_b}\} = C_{ab}^c X_{v_c} + M_{a,b}$$
$$\{M_{ab}, \Phi\} = 0$$

No se contradice esta cadena de igualdades

$$\{\{X_{v_a}, X_{v_b}\}, \Phi\} = (\delta_a \delta_b - \delta_b \delta_a) \Phi = C_{ab}^c \delta_c \Phi = C_{ab}^c \{X_{v_c}, \Phi\}$$

A nivel cuántico, hay razones similares para esperar también extensiones centrales en algebra clásica.



## Extensión central en una algebra de Lie

$$[A_i, A_j] = C_{ij}^k A_k$$



extensión central

$$[A_i, A_j]_* = C_{ij}^k A_k + c_{ij} Z$$

$$[A_i, Z]_* = 0$$

Obs: el algebra extendida tiene un nuevo elemento, Z.

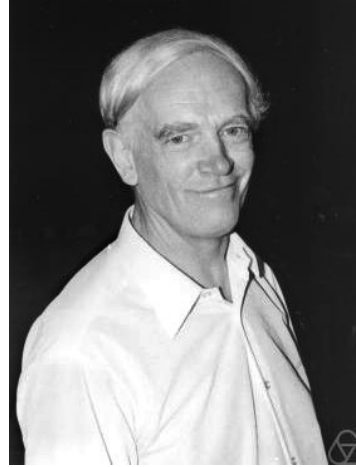
Este tiene corchete de Lie cero con el resto. En una representación irreducible se puede elegir como una constante.

## Distintas algebras: nivel clásico y cuántico

### Algebra de Witt

$$[l_n, l_m] = (n - m)l_{n+m}$$

$$l_n = z^{n+1} \partial_z$$



### Algebra de Witt también

$$\{L_n, L_m\} = i(n - m)L_{n+m}$$

$L_n =$  coeficientes en desarrollo de Laurent del tensor energía momento

### Algebra de Virasoro

$$[\hat{L}_n, \hat{L}_m] = (n - m)\hat{L}_{n+m} + \frac{1}{12}\delta_{n,-m}n(n^2 - 1)c$$

