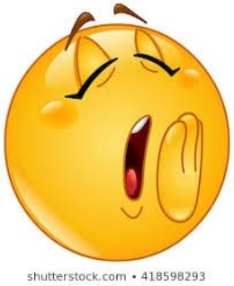
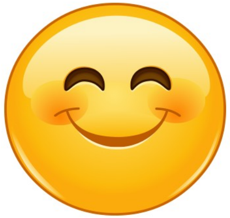
Teorias cuánticas de campos con invariancia conforme

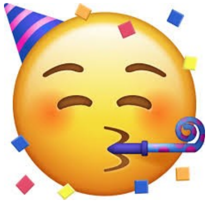
- **Nivel 0**: solo dispongo de simetría conforme realizada en un espacio de Hilbert

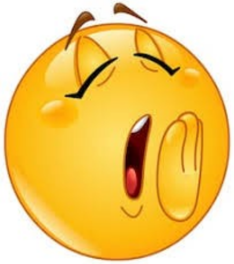


- **Nivel 1**: Tengo además campos actuando en el Hilbert, a traves de los cuales se realiza la simetría.



Nivel 2: La teoría cuántica proviene de una teoría clasica dada por un lagrangiano.





$$\mathcal{H}, \{L_n, \bar{L}_n\}, \Omega$$

Hilbert

Generadores
del grupo conforme

Estado fundamental invariante ante grupo
conforme global PSL2(C)

$$(L_n)^\dagger = L_{-n}$$
$$(\bar{L}_n)^\dagger = \bar{L}_{-n}$$

$L_0\ \bar{L}_0$ acotados por debajo en $\mathcal{H}$

$$L_{-1}\Omega = L_1\Omega = L_0\Omega = 0 \qquad \bar{L}_{-1}\Omega = \bar{L}_1\Omega = \bar{L}_0\Omega = 0$$

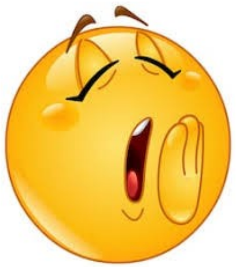
Dos copias del algebra de Virasoro

$$[\hat{L}_n, \hat{L}_m] = (n-m)\hat{L}_{n+m} + \frac{1}{12}\delta_{n,-m}n(n^2-1)c$$

$$[\hat{\bar{\hat{L}}}_n, \hat{\bar{\hat{L}}}_m] = (n-m)\hat{\bar{\hat{L}}}_{n+m} + \frac{1}{12}\delta_{n,-m}n(n^2-1)c$$

$$[\hat{L}_n, \hat{\bar{\hat{L}}}_m] = 0$$

Modulo de Verma



Subespacio del Hilbert generado por combinaciones de la forma

$$L_{n_1} L_{n_2} L_{n_3} ... L_{n_m} \mid h > \quad (n_i < 0)$$

$\mid h >$ (estado de peso maximo),
definido por:

$$\boxed{L_n \mid h >= 0 \;\; n > 0} \qquad \boxed{L_0 \mid h >= h \mid h >}$$

El Hilbert entero es suma directa de todos sus modulos de Verma

Algunas consecuencias de unitariedad (ausencia de estados de norma negativa)

$$\mathrm{h} \geq 0 \qquad c \geq 0$$

Demostración: Construir el estado $L_{-n} \mid h >$ (n>0) y pedir que su norma sea no negativa

$$|| L_{-n} \mid h > ||^2 = < h \mid L_n L_{-n} \mid h > = < h \mid [L_n, L_{-n}] \mid h > =$$

$$= < h \mid 2nL_0 + \frac{1}{12} n(n^2-1)c \mid h > = 2nh + \frac{1}{12} n(n^2-1)c \geq 0$$

c=0 daria lugar a una representación trivial

Exercise: Show that when $c = 0$ the representation is trivial, i.e., there is only a single state with conformal weight equal to zero. Help: let consider the state $v_N = (L_{-2n} - \frac{3}{4h+2n} L^2_{-n})h >$ and ask that their norm is non-negative

THE TRIVIALITY OF REPRESENTATIONS OF THE VIRASORO ALGEBRA WITH VANISHING CENTRAL ELEMENT AND L_0 POSITIVE

J.F. GOMES [1]

The Blackett Laboratory, Imperial College, London SW7 2BZ, UK

Received 23 January 1986

A simple and direct proof is presented that the vanishing of the central element in a representation of the Virasoro algebra with L_0 bounded below implies that all the Virasoro generators vanish. The case $c \neq 0$, although inconclusive, is considered also.

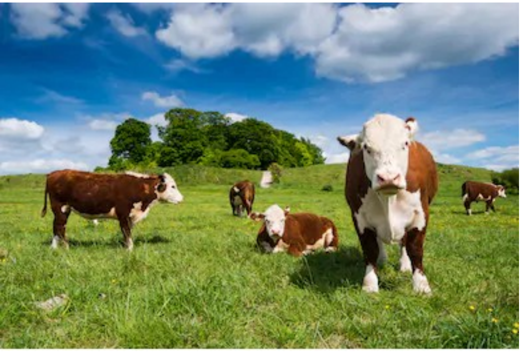
Porque no se le pide más simetría al vacio

¿Porque no pedir $L_{-n}\Omega = 0$ para otros n aparte de n=1?

$$\| L_{-n}\Omega \|^2 = \frac{1}{12} n(n^2-1)c = 0$$

$\Big\downarrow$ algún n>1

c=0



Poniendo campos

Los elementos g del grupo conforme actuan en los campos a través de operadores unitarios

$$U(g)\phi(x)U^\dagger(g) = \left|\frac{\partial(g.x)}{\partial x}\right|^{\Delta/d}\phi(gx)$$

Para transformaciones conformes g que dejan al vacio invariante:

$$< 0|\phi_1(x_1)\phi_2(x_2)..\phi_n(x_n)|0> =$$

$$< 0|U(g)\phi_1(x_1)U(g)U^\dagger(g)\phi_2(x_2).... \qquad .U^\dagger(g)U(g)\phi_n(x_n)U^\dagger(g)|0>$$

$$\Downarrow$$

$$\boxed{\begin{aligned} &< 0|\phi_1(x_1)\phi_2(x_2)..\phi_n(x_n)|0> \quad = \\ &(\Omega(x_1))^{\Delta_1}(\Omega(x_2))^{\Delta_2}...(\Omega(x_n))^{\Delta_n} < 0|\phi_1(gx_1)\phi_2(gx_2) \quad . \quad .\phi_n(gx_n)|0> \end{aligned}}$$

Volviendo a CFT

Transformación conforme

$$\boxed{\Phi(z,\bar{z}) \to (\partial f(z))^{h}(\bar{\partial}\bar{f}(\bar{z}))^{\bar{h}}\Phi(f(z),\bar{f}(\bar{z}))}$$

Campo primario de peso $h, \bar{h}$

Las caracteristicas tensoriales estan vinculadas a las etiquetas $h, \bar{h}$

Caso particular d=2

$$\Phi(z,\bar{z}) \to (\partial f(z))^h (\bar{\partial}\bar{f}(\bar{z}))^{\bar{h}} \Phi(f(z),\bar{f}(\bar{z}))$$

Ejercicio:

$$\boxed{< 0|\phi_i(z_1,\bar{z}_1)\phi_j(z_2,\bar{z}_2)|0 >= \frac{C_{ij}}{(z_1-z_2)^{2h}(\bar{z}_1-\bar{z}_2)^{2\bar{h}}}}$$

$$C_{ij} = 0 \text{ si } \ h_i \neq h_j \ \text{ o; } \bar{h}_i \neq \bar{h}_j$$

Función de 3 puntos de campos primarios

$$< 0|\phi_1((z_1,\bar{z}_1)\phi_2(z_2,\bar{z}_2)\phi_3(z_3,\bar{z}_3)|0 >= f_{123}\frac{1}{z_{12}^{h_1+h_2-h_3}\, z_{23}^{h_2+h_3-h_1}\, z_{13}^{h_3+h_1-h_2}}$$

$$\cdot\frac{1}{\bar{z}_{12}^{\bar{h}_1+\bar{h}_2-\bar{h}_3}\, \bar{z}_{23}^{\bar{h}_2+\bar{h}_3-\bar{h}_1}\, \bar{z}_{13}^{\bar{h}_3+\bar{h}_1-\bar{h}_2}}$$

Es muy simple checkear que la expresión de la derecha tiene el comportamiento correcto esto para dilatación, rotación y traslación.

Todo esto tiene sentido en el nivel 1: no necesito lagrangianos para esto

$$\delta_{l_n}\Phi(z,\bar{z}) = z^{n+1}\partial_z\Phi(z,\bar{z}) + h(n+1)z^n\Phi(z,\bar{z})$$

$$\delta_{l_n}\Phi(z,\bar{z}) = [L_n, \Phi(z,\bar{z})]$$

Como se habla del tensor energía momento si no hay corriente de Noether?

$$L_m = \frac{1}{2i\pi}\oint T(z)z^{n+1} \Leftrightarrow T(z) = \sum_n \frac{L_n}{z^{n+2}}$$

$$[L_n, \Phi(w,\bar{w})] = \frac{1}{2i\pi}\oint_C T(z)z^{n+1}\Phi(w,\bar{w})$$

OPE tiene sentido en este contexto

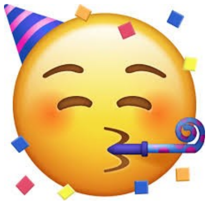
Algebra de Virasoro

$$T(z)T(w) \sim \frac{\frac{c}{2}}{(z-w)^4} + \frac{2}{(z-w)^2}T(w) + \frac{1}{z-w}\partial T(w)$$

$$T(z)\Phi(w,\bar{w}) \sim \frac{h}{(z-w)^2}\Phi(w,\bar{w}) + \frac{1}{(z-w)}\partial_w\Phi(w,\bar{w}) + ..$$

Transformación de los campos primarios

La fiesta: Lagrangiano y modelos concretos



Ingredientes: lagrangiano invariante conforme.

Cuantización: canonica o via path integral o como sea

Ejemplos:

- Campo de Klein-Gordon en 1+1, sin masa
- D-2 Campos de estos. Se acerca a la cuerda bosonica

La carga central que debe calcular antes de morir

Modos de la expresión clásica del tensor energía momento

$$L_n = \frac{1}{2}\sum_r \alpha_r \alpha_{n-r}$$

A nivel cuantico:

$$L_n = \frac{1}{2}\sum_r :\alpha_r \alpha_{n-r}: = \frac{1}{2}\alpha_0 + \sum_{s>0} \alpha_{-s}\alpha_{n+s}$$

Ejercicio: probar que los Ln del campo escalar libre satisfacen el algebra de Virasoro
con carga central c=1

Ayuda: para entender como funciona, calcular primero los conmutadores

$$[L_1, L_{-1}], [L_2, L_{-2}]$$

Observaciones importantes

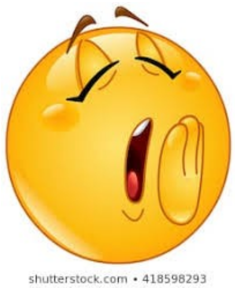
El campo escalar libre no es un campo primario pero si lo es su derivada. Y esta tiene peso conforme 1.

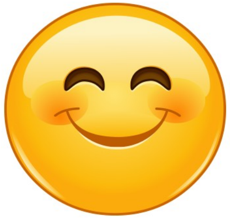
Ejercicio: checkear que $\partial\Phi \quad \bar{\partial}\Phi$ tienen las funciones de correlación esperadas para un campo de peso (1,0) y (0,1) respectivamente.

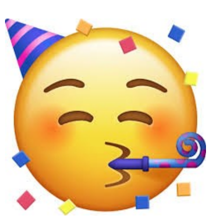
$$< 0|\partial\phi(z_1,\bar{z}_1)\partial\phi(z_2,\bar{z}_2)|0 >= \frac{C}{(z_1-z_2)^{2.1}(\bar{z}_1-\bar{z}_2)^{2.0}}$$

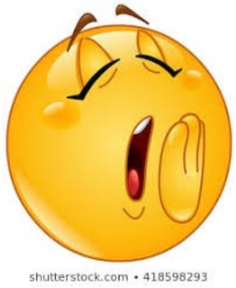
$$< 0|\bar{\partial}\phi(z_1,\bar{z}_1)\bar{\partial}\phi(z_2,\bar{z}_2)|0 >= \frac{C}{(z_1-z_2)^{2.0}(\bar{z}_1-\bar{z}_2)^{2.1}}$$

State-Field correspondence: ¿donde la metemos?

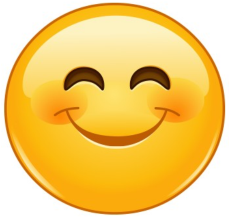




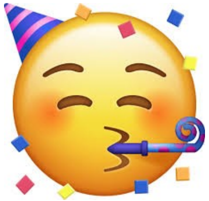




Aca seguro que no. Hay state pero no hay field.



En este contexto hay una afirmación trivial, menos ambiciosa,
que podemos probar: operador primario --→ estado de peso maximo



Aqui se va más lejos y apelando a path integral se da un argumento
heuristico (quiza es una demostración)

Un pequeño teorema

$$\phi(z,\bar{z}) \text{ primario de peso } (h,\bar{h}) \to \phi(0) \mid 0>$$

estado primario de peso $(h,\bar{h})$

Demostración

$$[L_n, \Phi(z,\bar{z})] = z^{n+1}\partial_z \Phi(z,\bar{z}) + h(n+1)z^n \Phi(z,\bar{z})$$

Aplico Ln, con n positivo, a $\phi(0) \mid 0>$

$$L_n\phi(0) \mid 0 >= L_n\phi(0) \mid 0 > -\phi(0)L_n \mid 0 >= [L_n, \phi(0)] \mid 0 >=$$

$$0 \mid 0 >$$

Similarmente, aplicando L0, obtengo:

$$L_0\phi(0) \mid 0 >= [L_0, \phi(0)] \mid 0 >= h\phi(0) \mid 0 >$$

Interpretación desde el lado del cilindro

$z \to 0$ corresponde al pasado remoto en el cilindro.

$\phi(z, \bar{z}) \mid 0 >$ es un estado que, para tiempos asintoticamente en el pasado, es un estado primario de un dado peso

Seria deseable tener por cada estado del espectro de la cuerda un operador primario que le corresponda de esta forma. Este existe y es el operador de vertice.