Teorema de Gauss-Bonnet en el Toro

Julian Toro

2do Cuatrimestre de 2020

En $\mathbb{R}^3$ euclídeo los puntos de la superficie de un toro centrado en el eje $\hat{z}$ se pueden parametrizar de la siguiente forma:

$$X(\theta, \phi) = \cos(\theta)(R + r\cos(\phi))$$

$$Y(\theta, \phi) = \sin(\theta)(R + r\cos(\phi))$$

$$Z(\theta, \phi) = r\sin(\phi)$$

Donde R es la distancia del eje $\hat{z}$ al centro de la sección circular del toro, r el radio de dicha sección y θ, $\phi \in [0, 2\pi)$ son el ángulo azimutal y el que describe la sección circular, respectivamente.
Para allar la métrica inducida en el toro partimos de la expresión euclídea,

$$dS^2 = dX^2 + dY^2 + dZ^2.$$

Evaluandola sobre la superficie del toro, expresamos los diferenciales de las coordenas cartesianas en términos de los ángulos:

$$dX|_{\mathbb{T}^2} = -\sin(\theta)(R + r\cos(\phi))d\theta - r\cos(\theta)\sin(\phi)d\phi$$

$$dY|_{\mathbb{T}^2} = \cos(\theta)(R + r\cos(\phi))d\theta - r\sin(\theta)\sin(\phi)d\phi$$

$$dZ|_{\mathbb{T}^2} = r\cos(\phi)d\phi$$

Por lo tanto:

$$dS^2|_{\mathbb{T}^2} = r^2 d\phi^2 + (R + r\cos(\phi))^2 d\theta^2$$

El teorema de Gauss-Bonnet establece que en una superficie orientable sin bordes,

$$\int_{\mathbb{T}^2} d\theta d\phi \sqrt{|g|}\mathbf{R} = 2(1-k).$$

Donde g es el determinante de la métrica, $\mathbf{R}$ el escalar de Ricci y k el número de agujeros de la superficie. Las componentes de la metrica se pueden leer facilmente de la expresión para dS^2, sin embargo el escalar de Ricci involucra una cuenta extensa y repetitiva, por lo que para calcularlo utilicé la libreria Einsteinpy, de Python. Así se tiene que:

$$\sqrt{|g|} = r(R + r\cos(\phi))$$

$$\mathbf{R} = \frac{2\cos{(\phi)}}{r(R + r\cos\phi)}$$

Luego,

$$\int_0^{2\pi} d\theta \int_0^{2\pi} d\phi 2\cos{(\phi)} = 0$$

por lo que el teorema se cumple.
En la Figura 1 vemos como el escalar de Ricci cambia de signo a lo largo de la superficie del Toro, lo que, simplificando las cosas, hace posible que el teorema se cumpla.

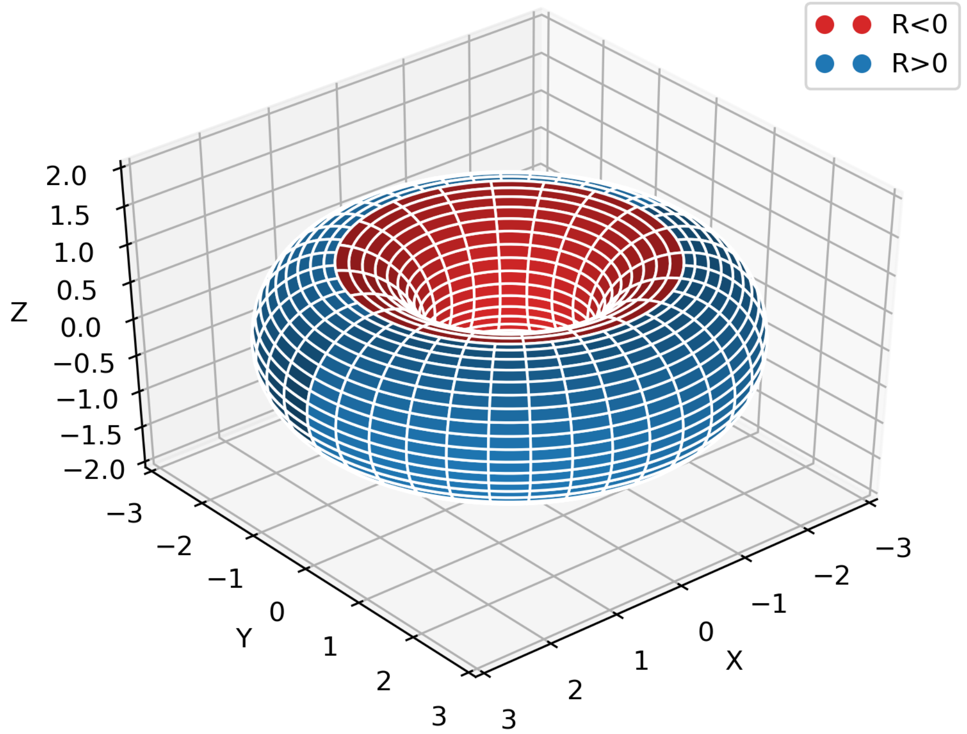

Figure 1: El Toro y su escalar de Ricci.