GUIA 3A: Interacciones cuerda bosónica.

En esta guía veremos aspectos elementales de la teoría perturbativa, limitándonos al cálculo a orden árbol en la cuerda cerrada. La amplitud de Scattering de n cuerdas, que tienen asociados sus operdaores de vertice $\mathcal{V}$, en general involucra una integral sobre un espacio de métricas en las que hay un gran sobreconteo debido a la invariancia de Weyl y ante diffeomorfismos, que requiere tratarla como se hace en las teorías de gauges:

$$S_{j_1 \ldots j_n}(k_1 \ldots k_n) = \sum_{\text{topologias}} g_s^{-\chi} \int \frac{\mathcal{D}X\mathcal{D}g}{\mathcal{N}} \mathrm{e}^{-S_P(X,g)} \prod_{i=1}^{n} \int \mathrm{d}^2\sigma_i \sqrt{g(\sigma_i)} \mathcal{V}_{j_i}(k_i, \sigma_i)$$

Estas dificultades se reducen considerablemente en el caso del orden árbol, que corresponde a cálculos sobre superficies de Riemanna con la topología de la esfera. En este caso, hay una sola clase de metricas, todas relacionadas por transformaciones de Weyl o diffeomorphismos.

1. Considere el campo escalar ϕ libre sin masa en 1+1 . Muestre que :

   $$V_\alpha(z, \bar{z}) =: e^{i\alpha\phi(z,\bar{z})} :$$

   es un operador primario de peso $\frac{\alpha^2}{2}$. Para ello, se sugiere hallar el OPE con el tensor energía momento y verifcar que tiene la forma esperada. Este es un ejemplo de *operador de vértice*.

2. Muestre que $V_\alpha(z, \bar{z}) \mid 0 >$ es un autoestado de α^0 con un autovalor proporcional a α. Usando esto, muestre que

   $$< 0 \mid \prod_{i=1}^{N} V_{\alpha_i}(z_i, \bar{z}_i) \mid 0 >$$

   es cero a menos que $\sum_{i=1}^{N} \alpha_i = 0$ (condición denominada "neutralidad").

3. Halle la forma explícita del estado:

   $$\lim_{(z,\bar{z})\to(0,0)} V_\alpha(z, \bar{z}) \mid 0 >$$

   en términos de osciladores y usando un resultado de la guía anterior argumente que este es un estado de peso máximo, con el peso del mismo operador de vertice.

4. Si considera ahora el operador $V_k(z, \bar{z}) =: e^{ik_\mu X^\mu(z,\bar{z})} :$, halle la condición sobre k^μ para que el operador de vértice tenga peso $(1, 1)$.

5. Escriba el operador de vértice del gravitón, verificando que la condición peso conforme igual a $(1, 1)$ impone la condición conocida que liga el k^2 con el número de osciladores prendidos.

6. El conjunto de todas las termas de números complejos z_1, z_2, z_3 puede obtenerse aplicando distintas transformaciones de Moebius a una terna dada z_1^0, z_2^0, z_3^0. Es decir, para todo z_1, z_2, z_3 y una dada terna z_1^0, z_2^0, z_3^0 existe una transformación de Moebious $f : w \to \frac{aw+b}{cw+d}$ tal que:

   $$z_i = \frac{az_i^0 + b}{cz_i^0 + d}$$

   Los coeficientes complejos a, b y c (d puede fijarse por la condición $ad-bc = 1$) dependen por supuesto de los z_i y $z_i^{(0)}$ y parametrizan la transformación.

(a) Verifique que esto es así, encontrando en forma explícita la transformación para una terna arbitraria.

(b) Halle en particular la trasformación para el caso $z_1^{(0)} = 0, z_2^{(0)} = 1, z_3^{(0)} = \infty$.

(c) Haciendo $a = e^{\frac{\alpha}{2}}$, $b = \beta$ y $c = -\gamma$ verifique que:

$$dz_1 dz_2 dz_3 (z_1 - z_2)(z_2 - z_3)(z_3 - z_1) = d\alpha\, d\beta\, d\gamma \tag{1}$$

(puede que haya un signo de diferencia)

7. Usando el resultado anterior, muestre que la expresión del numerador en la amplitud de scattering para tres cuerdas (puede pensar en el caso del taquión pero para esto basta con usar que los operadores de vértice deben tener peso 1) diverge, quedando una integral en los parámetros α, β y γ. El resultado finito se obtiene no haciendo esta integral, o hablando mal, dividiendo por esta.

8. Mostrar que en la amplitud de N cuerdas ($N > 3$), (considerando ahora la "división" por el volumen de $\mathsf{SL}_2(\mathbb{C}) \times \mathsf{SL}_2(\mathbb{C})$) se puede omitir la integral en 3 variables arbitrarias, fijándolas ellas a 3 valores arbitrarios $z_1^{(0)}, z_2^0, z_3^0$, e introduciendo el factor $(z_1 - z_2)(z_2 - z_3)(z_3 - z_1)$ evaluado en esos puntos. Ayuda: deberá usar cómo transforma la función de 3 puntos ante una transformación conforme que mapeé los puntos z_i (i barriendo esos tres índices elegidos) en $z_i^{(0)}$.

9. La amplitud de scattering para m taquiones (correspondientes al espectro de cuerda cerrada) está dada por:

$$A^m(p_1, p_2, ...p_m) = \frac{g_s^{m-2}}{\mathrm{Vol}(\mathsf{SL}_2(\mathbb{C}))} \int \prod_{i=1}^{m} d^2 z_i < \hat{V}(z_1, p_1)..\hat{V}(z_m, p_m) >$$

donde $\hat{V}(z, p) =: e^{ipX(z,\bar{z})} :$.

A partir de la expresión anterior, muestre que

$$A^m(p_1, p_2, ...p_m) \sim \frac{g_s^{m-2}}{\mathrm{Vol}(\mathsf{SL}_2(\mathbb{C}))} \delta^{26}(\textstyle\sum_{i=1}^m p_i) \displaystyle\int \prod_{i=i}^{m} d^2 z_i \prod_{j<i} \mid z_j - z_i \mid^{\alpha' p_i . p_j}$$

10. Considere el caso $m = 4$ muestre que se reduce a:

$$A^4(p_1, p_2, ...p_4) \sim \frac{g_s^2}{\mathrm{Vol}(\mathsf{SL}_2(\mathbb{C}))} \delta^{26}(\textstyle\sum_{i=1}^4 p_i) \displaystyle\int d^2 z \mid z \mid^{\alpha' p_2 . p_3} \mid 1 - z \mid^{\alpha' p_3 . p_4}$$

11. Expresar esta amplitud en términos de funciones Gamma y mostrar que, en términos de las variables de Mandelstam, esta puede escribirse como:

$$A^4(p_1, p_2, ...p_4) \sim g_s^2 \frac{\Gamma(-1 - \frac{\alpha' s}{4})\Gamma(-1 - \frac{\alpha' t}{4})\Gamma(-1 - \frac{\alpha' u}{4})}{\Gamma(2 + \frac{\alpha' s}{4})\Gamma(2 + \frac{\alpha' t}{4})\Gamma(2 + \frac{\alpha' u}{4})}$$

12. Considere la amplitud anterior a t fijo como función de s y halle los polos, indicando la relación que tienen con el espectro de la teoría de cuerdas no interactuante.

13. **Ejercicio altamente engorroso. Indicaremos donde ver su resolución** Calcule la amplitud de probabilidad, a orden árbol, de tres gravitones de momento k_1, k_2, k_3 y compare el resultado con el obtenido en una teoría cuántica de campos dado por el Lagrangiano de Einstein-Hilbert que describe perturbaciones de la métrica plana hasta orden cubico. De esta compàración surge la relación entre g_s, α' y la constante de Newton G.