Este no es un toro

Es una esfera (si cerramos todos sus orificios). Halle su genero en el caso realista.

Estos si son toros

Recordatorio: Teorema de Riemann-Roch:

$$\boxed{\mu - \kappa = -3\chi = 6g + 3b - 6.}$$

$$\begin{aligned} &\text{if} \quad \chi > 0: \quad \kappa = 3\chi, \quad \mu = 0, \\ &\text{if} \quad \chi < 0: \quad \kappa = 0, \quad \mu = -3\chi. \end{aligned}$$

$$\kappa = \text{dimensión del algebra conforme global}$$

$$\mu = \text{dimensión del espacio de modulis}$$

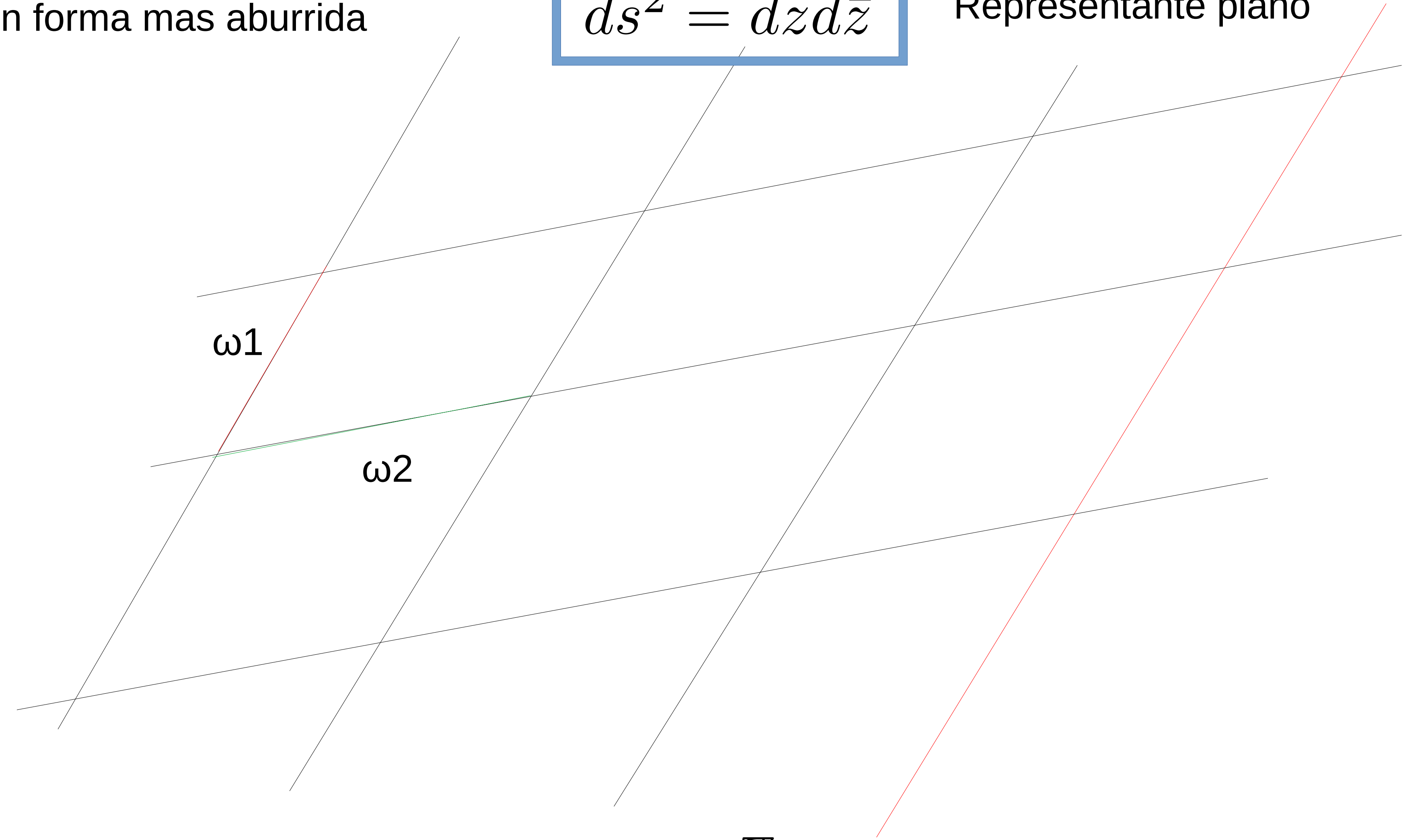
Observación: para $\chi = 0, \quad \mu = \kappa = 2$

En el toro tendremos dos parámetros reales para barrer el espacio de modulis

Toro en forma mas aburrida

$$\boxed{ds^2 = dzd\bar{z}}$$

Representante plano



$$z \sim z + n\omega_1 + m\omega_2 \quad n, m \in \mathbb{Z}$$

Con parámetros ω_1 y ω_2 hay un claro sobreconteo .

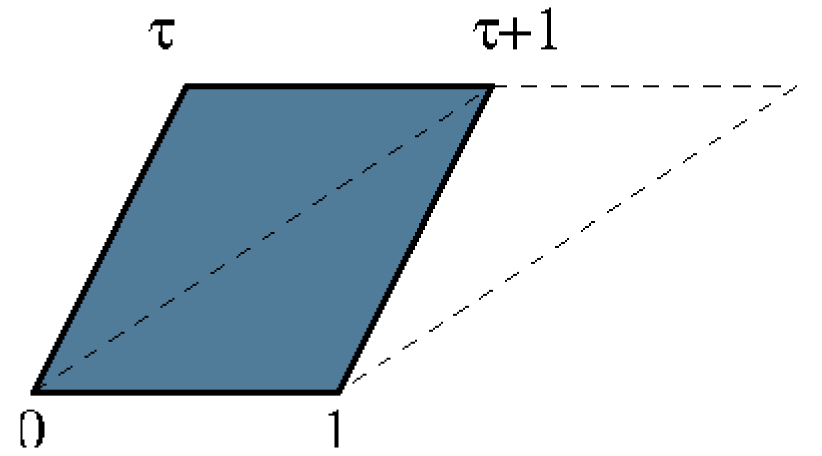
Para eliminar parte de ese sobreconteo, es conviente usar el párametro

$$\boxed{\tau \equiv \frac{\omega_1}{\omega_2}}$$

y considerar la red generada por 1 y τ

Con τ no se elimina el sobreconteo

Por ejemplo, {τ, τ+1} definen la misma red.



Hay muchas mas cambios en τ que dan toros equivalentes.

$$\{\omega_1, \omega_2\} \to \{\underbrace{a\omega_1 + b\omega_2}_{\omega_1'}, \underbrace{c\omega_1 + d\omega_2}_{\omega_2'}\}$$

a,b,c,d enteros

La segunda red esta incluida en la primera.

Pero si ω1 y ω2 pueden escirbirse como combinacion lineal (con coeficientes enteros) de los generadores de la segunda red, entonces ambas redes son equivalentes!

Condición suficiente para la equivalencia de las redes:

$$\begin{pmatrix}\omega_1 \\ \omega_2\end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A_{11} & A_{12} \\ A_{21} & A_{22}\end{pmatrix} \begin{pmatrix}\omega_1' \\ \omega_2'\end{pmatrix}$$

con Aij enteros.

$$\begin{pmatrix} A_{11} & A_{12} \\ A_{21} & A_{22} \end{pmatrix} = \frac{1}{ad-bc} \begin{pmatrix} d & -c \\ -b & a \end{pmatrix}$$

Condición necesaria y suficiente para que los Aij enteros

$$ad - bc = \pm 1$$

$$\Big\downarrow \text{ eligiendo el signo +}$$

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in SL(2, \mathbb{Z})$$

$$\boxed{\tau' = \frac{\omega_1'}{\omega_2'} = \frac{a\omega_1 + b\omega_2}{c\omega_1 + d\omega_2} = \frac{a\tau + b}{c\tau + d}}$$

Se puede ver que la elección Im τ > o se preserva si ad-bc=1

Generadores del grupo modular

$$\boxed{\begin{aligned} T(\tau) &= \tau + 1 \\ S(\tau) &= \frac{-1}{\tau} \end{aligned}}$$

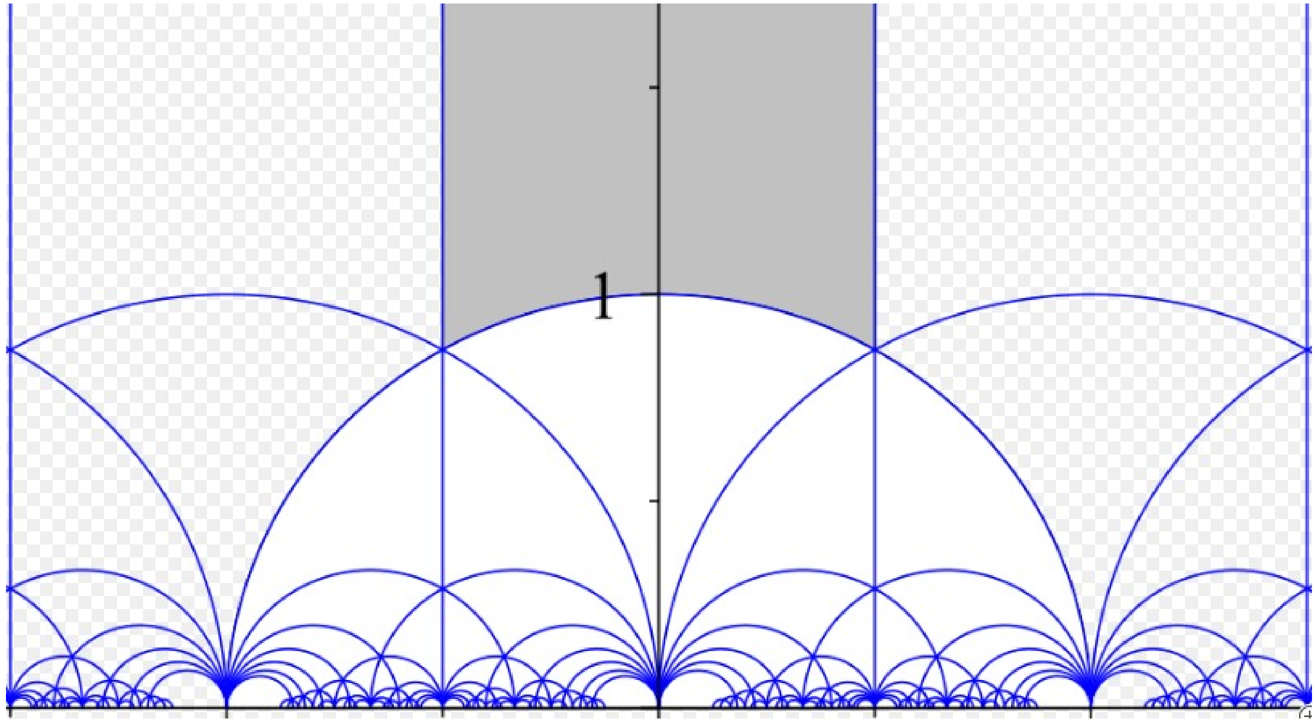
S y T generan (por composición) todo SL(2,Z). No es obvio.

Esta observación es usada para limitarse a probar que S y T generan toros equivalentes.

Ejercicio: para el caso Real τ=0, verificar en forma directa que S da un toro equivalente.

El espacio de los valores de τ que dan toros inequivalentes se conoce como el *Teichmuller space* del toro

Región fundamental (dibujo que todo cuerdista debe hacer alguna vez)



Interior de la región en gris: $-\frac{1}{2} < Re\tau < \frac{1}{2}$ $\quad |\tau| > 1$

Significado: dos τ diferentes en la region en gris representan toros inequivalentes.

Demostración: ??

¿Donde esta el toro plano en el espacio ambiente?

http://www.science4all.org/article/flat-torus/