Observaciones varias sobre amplitud a orden arbol.

I) Medida invariante ante SL2(C)

$$\boxed{dz_1 dz_2 dz_3 = d\alpha d\beta d\gamma (z_1 - z_2)(z_2 - z_3)(z_3 - z_1)}$$

Alternativamente, se puede plantear asi

$$\frac{dz_1 dz_2 dz_3}{(z_1 - z_2)(z_2 - z_3)(z_3 - z_1)} = \text{medida invariante ante SL2(C).}$$

$$z_i = f(w_i) \ \ , \ f(w) = \tfrac{aw+b}{cw+d}$$

$$dz_i = \tfrac{1}{(cw_i+d)^2} dw_i \qquad\qquad z_i - z_j = \tfrac{w_i - w_j}{(cw_i+d)(cw_j+d)}$$

$$\frac{dz_1 dz_2 dz_3}{(z_1-z_2)(z_2-z_3)(z_3-z_1)} = \frac{dw_1 dw_2 dw_3}{(w_1-w_2)(w_2-w_3)(w_3-w_1)} .$$

Si lo que multiplica a la medida de integración invariante tambien es invariante, entonces la integral será infinito.

II) Condición de neutralidad vista desde la integral funcional

$$< 0 \mid \prod_{i=1}^{N} V_{\alpha_i}(z_i, \bar{z}_i) \mid 0 >= 0 \qquad\qquad \sum_i \alpha_i \neq 0$$

Esta condición salia de que ese producto de operadores actuando en el vacio crea
un estado autoestado de α^0
con autovalor proporcional a esa suma de α's (no nula). Ese estado sera ortogonal al vacio.

En la integral funcional, tenemos esto

$$\int DX \prod_{i=1}^{N} : exp(i\alpha_i X(z, \bar{z}) : e^{-S_{poly}}$$

La integral DX incluye la integral sobre los modos ceros $\longrightarrow$ De ahi sale la delta

III) Como se ve que la amplitud de 3 taquiones tiene la forma esperada

Forma general de la función de 3 puntos

$$\langle 0|\phi_1\left((z_1,\bar{z}_1\right)\phi_2\left(z_2,\bar{z}_2\right)\phi_3\left(z_3,\bar{z}_3\right)\mid 0>=f_{123}\frac{1}{z_{12}^{h_1+h_2-h_3}\,z_{23}^{h_2+h_3-h_1}\,z_{13}^{h_3+h_1-h_2}}$$

$$\cdot\ \frac{1}{\bar{z}_{12}^{\bar{h}_1+\bar{h}_2-\bar{h}_3}\,\bar{z}_{23}^{\bar{h}_2+\bar{h}_3-\bar{h}_1}\,\bar{z}_{13}^{\bar{h}_3+\bar{h}_1-\bar{h}_2}}$$

Si los campos tienen peso (1,1) se simplifica. Pero no se ve que sea igual a:

$$\delta(\textstyle\sum_l k_l)\prod_{j<i}\mid z_j - z_i\mid^{\alpha' k_i . k_j}$$

i,i=1,2,3

$$k_1^2 = k_2^2 = k_3^2 = \frac{4}{\alpha'}$$ (por ser el del taquión)

La delta impone:

$$k_1 + k_2 = -k_3 \to 2k_1 . k_2 = -{k_1}^2 = -\frac{4}{\alpha'}$$

$$\prod_{j<i} \mid z_j - z_i \mid^{\alpha' k_i . k_j} = \prod_{j<i} \mid z_j - z_i \mid^{-2}$$

IV) Operador de Vertice del graviton

Proto operador de vertice

$$V_\alpha^{Grav}(z,\bar{z}) =: \partial X(z,\bar{z})\bar{\partial} X(z,\bar{z}) exp(i\alpha X(z,\bar{z})) :$$

Ej: Mostrar que tiene peso conforme $(1+\frac{\alpha^2}{2}, 1+\frac{\alpha^2}{2}])$

¿Como se ve?

Recordemos como se lee el peso conforme

$$T(z)\Phi(w,\bar{w}) \sim \frac{h}{(z-w)^2}\Phi(w,\bar{w}) + \frac{1}{(z-w)}\partial_w\Phi(w,\bar{w}) + ..$$

Alternativamente

$$[L_n, \Phi(z,\bar{z})] = z^{n+1}\partial_z\Phi(z,\bar{z}) + h(n+1)z^n\Phi(z,\bar{z})$$

De esta ultima, ingenuamente parece plausible que:

$$O = \varphi_1.\varphi_2$$

tiene como peso conforme la suma de los de de φ1 y φ2

Sin embargo, no es obvio debido al orden normal

Un buen ejemplo es el tensor enegía momento que no tiene peso conforme 2

$$T(z) =: \partial X(z) \partial X(z) :$$

$$T(z)T(w) \sim \frac{\frac{c}{2}}{(z-w)^4} + \frac{2}{(z-w)^2} T(w) + \frac{1}{z-w} \partial T(w)$$

Sin embargo para el del proto graviton funciona la regla aditiva

$$\boxed{V_k^{Graviton}(z,\bar{z}) = \xi_{\mu\nu} : \partial X^{\mu}(z,\bar{z}) \bar{\partial} X^{\nu}(z,\bar{z}) exp(ikX(z,\bar{z})) :}$$

Simetrico en sus indices

V) Scattering de gravitones

Se vuelve mas engorroso pero el de 3 gravitones es accesible.

Lo interesante es que permite relacionar α’, g_s y G, si se pide que la amplitud de tres gravitones coincidad.

Esquematicamente

$$L_{EH}^{\text{orden cubico}} = (\partial h)^2 + G h^3$$

$$\Big\downarrow \ \text{Pidiendo igualdad con el calculo de cuerdas}$$

$$G = g_s^2 \alpha'^{12}$$