El problema del sobreconteo es un problema humano

Un civilización superior no trabajaría con variables redundantes. No perdería tiempo aprendiendo el metodo de Faddeev-Popov

# Como lidear con el infinito debido a sobreconteo

$$\boxed{\int D\mathcal{A} e^{-S(\mathcal{A})}}$$

con S invariante de gauge

$$S[\mathcal{A}^{\Omega}] = S[\mathcal{A}]$$

## Modelo de Juguete: sobreconteo en una integral en dos variables

$$I = \int dx dy e^{-(x-y)^2}$$

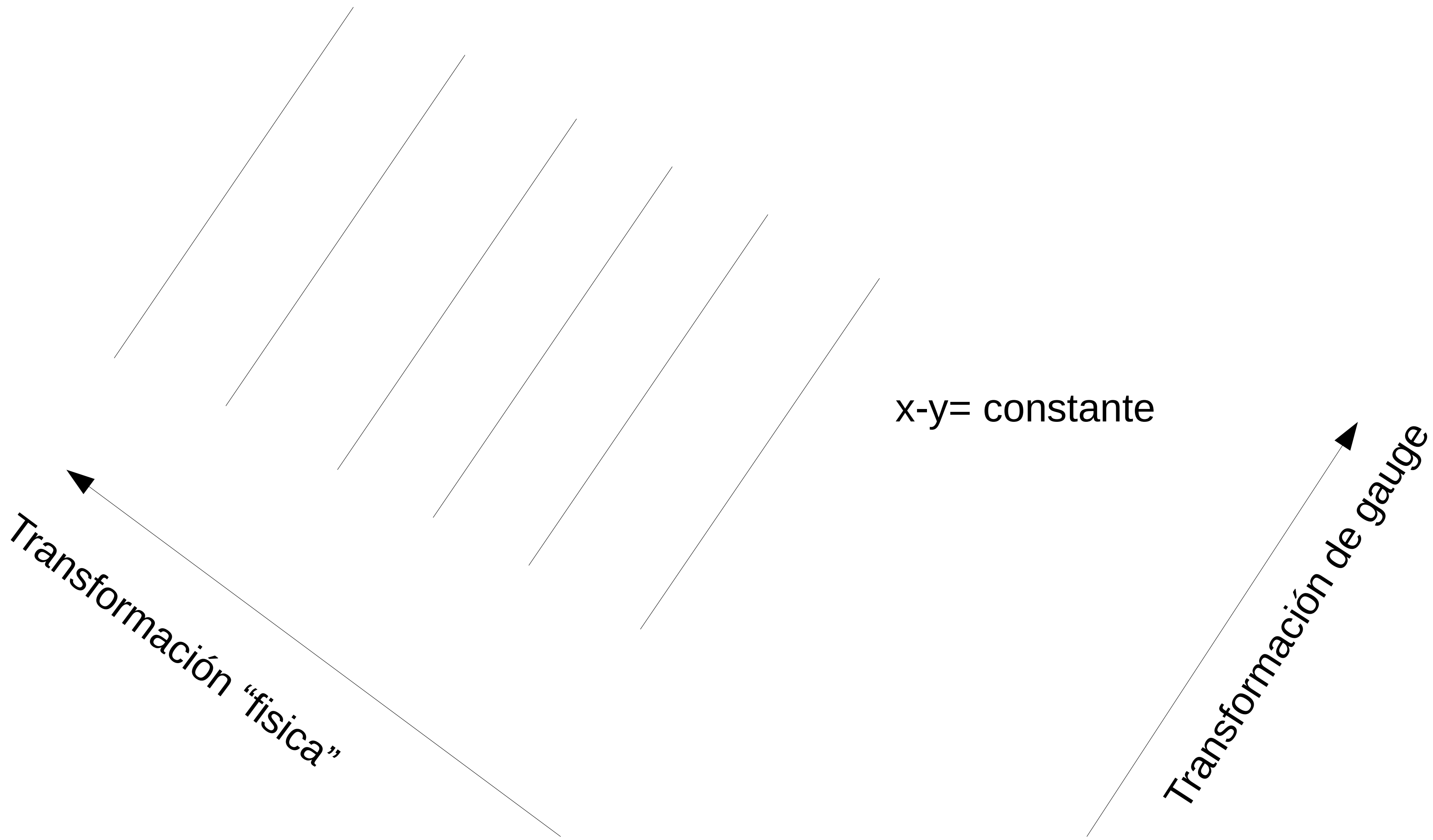
I esta mal definida porque el integrando y la medida son invariantes ante:

$$\begin{aligned} \mathrm{x} \quad &\rightarrow \quad x + a \\ y \quad &\rightarrow \quad y + a \end{aligned}$$

En efecto, definiendo u=x+y y v=x-y:

$\infty$

$$I = \frac{1}{2} \int du dv e^{-(v)^2} = \left(\frac{1}{2} \int du\right)\left(\int dv e^{-(v)^2}\right)$$


x-y= constante
Transformación “física”
Transformación de gauge

Hay muchas elecciones de las direcciones fisicas y de gauge. FP da una manera sistematica de lidear con esto.

En el ejemplo anterior, introduzcamos un 1 escrito asi:

$$1 = \int da\delta(\frac{x+y}{2} + a)$$

(¿es un 1?)

en la integral anterior, mal definida:

$$I = \int dxdy\ 1\ e^{-(x-y)^2} = \int da \int dxdy\delta(\frac{x+y}{2} + a)e^{-(x-y)^2}$$

(x’=x+a,y’=y+a)

$$I = \int da \int dx' dy' \delta(\frac{x'+y'}{2}) e^{-(x'-y')^2}$$

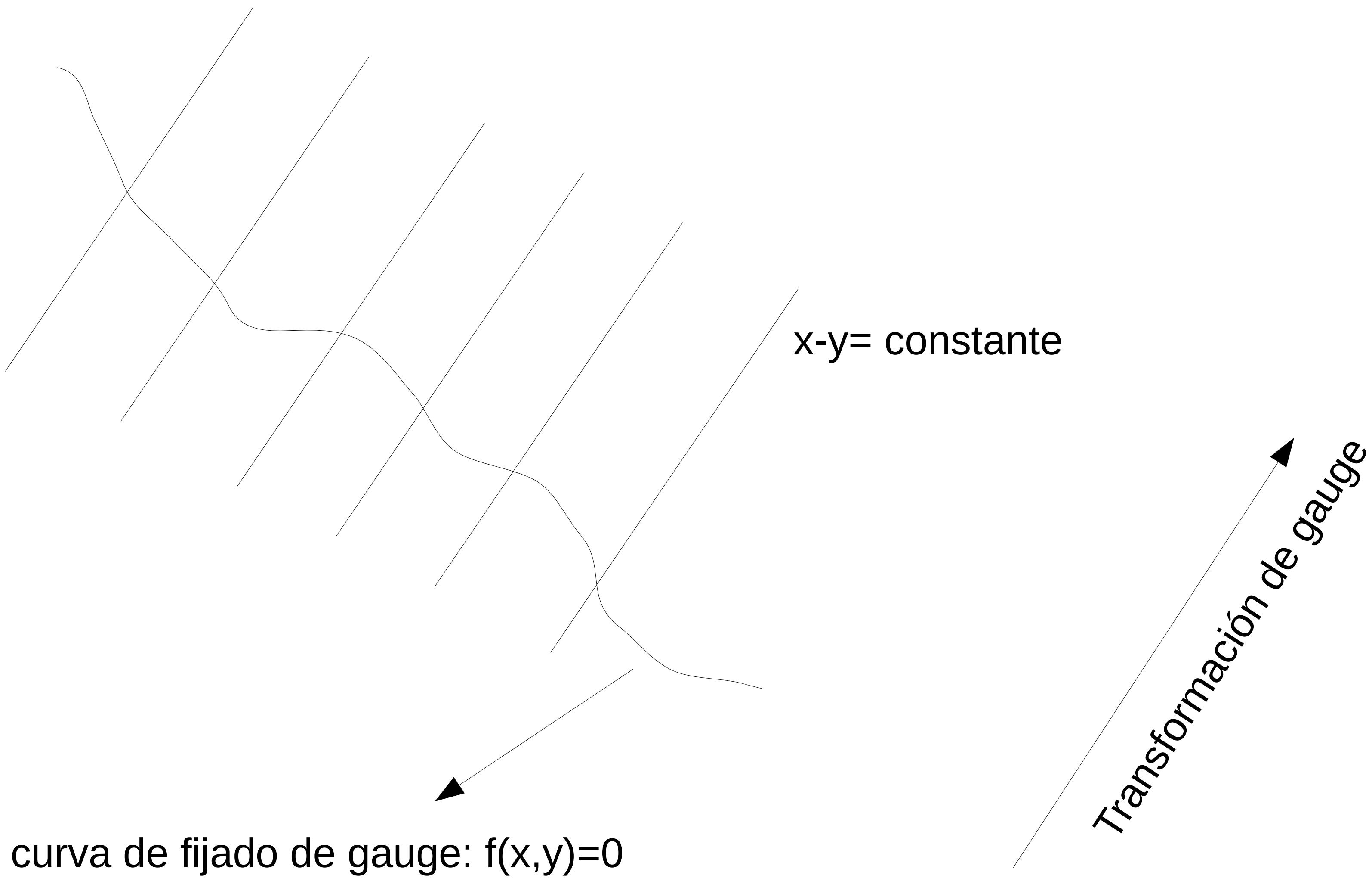
$$= \int da \int dx dy \delta(\frac{x+y}{2}) e^{-(x-y)^2}$$

Invariancia de gauge de I

La delta impuso x=-y

$$I = J(\int da) \int dy e^{-(2y)^2}$$

Factor que viene de la delta.


x-y= constante
Transformación de gauge
curva de fijado de gauge: f(x,y)=0

Generalización del 1:

$$1 = \int da\delta(\frac{x+y}{2} + a)$$

$$1 = \int da J[x, y, a]\delta(f(x + a, y + a))$$

$$J = \mid \frac{\partial f(x+a,y+a)}{\partial a} \mid$$

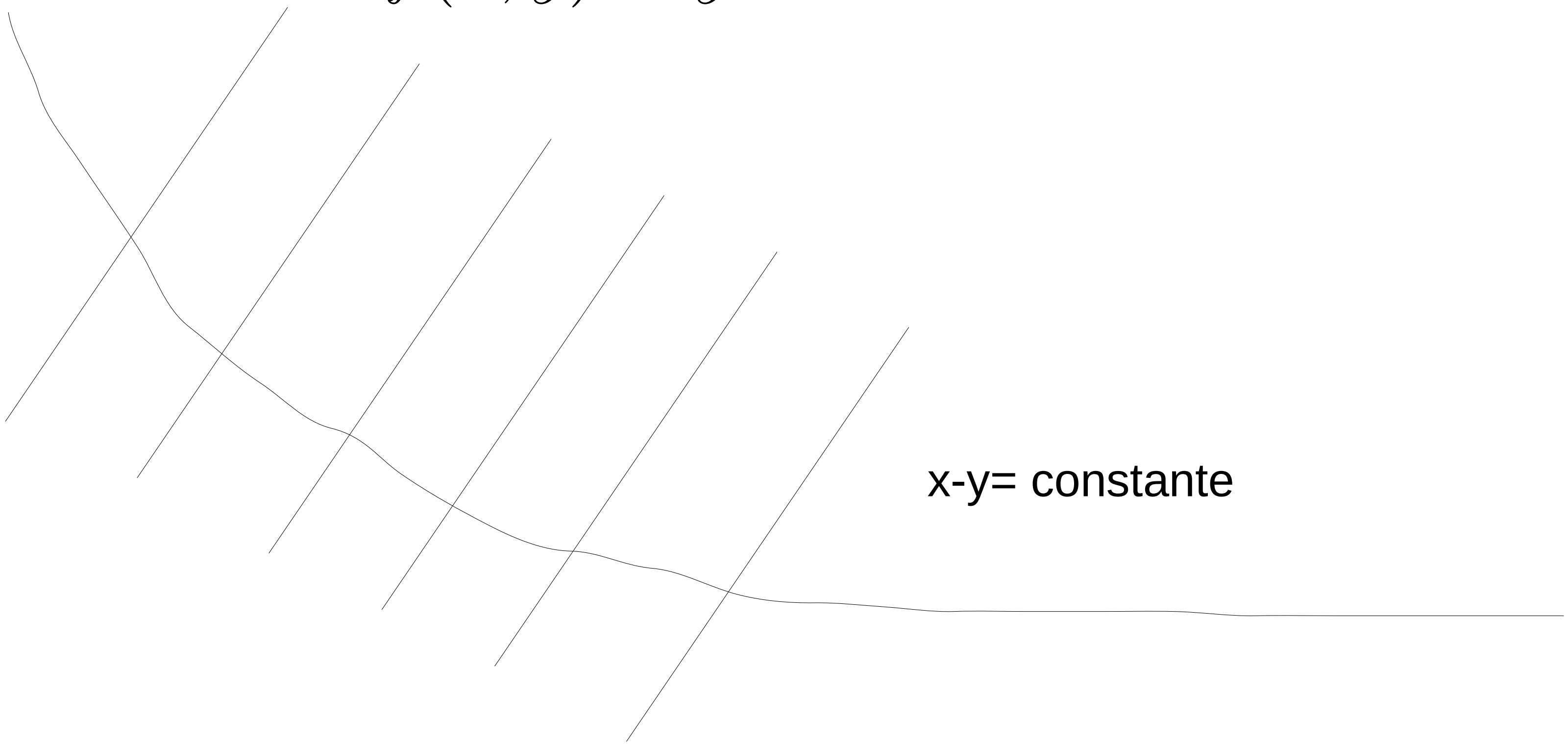
$g$ monotona, con cero en $x_0$

$$\delta(g(x)) = \mid \frac{1}{g'(x_0)} \mid \delta(x - x_0)$$

(Obs: da igual evaluar g’ en cualquier otro valor)

Ejemplo:

$$f(x,y) = y - e^{-x}$$




$$J = \left| \frac{\partial f(x+a, y+a)}{\partial a} \right| = 1 + e^{-(x+a)}$$

$$I = \int dxdyda\delta(y + a - e^{-(x+a)})(1 + e^{-(x+a)})e^{-(x-y)^2}$$

$$I = (\int da) \int dxdy\delta(y - e^{-x})(1 + e^{-x})e^{-(x-y)^2}$$

Ahora la delta restringio la integral a otra curva de fijado de gauge.

# Faddeev-Popov en breve

función de fijado de gauge

1) Introduzco un 1:

$$1 = \int da\delta(f(A^{(a)})) \mid \frac{\delta f(A^{(a)})}{\delta a} \mid$$

2) Factorizo la integral en el parametro a

$$\int daDA\delta(f(A)) \mid \frac{\delta f(A^{(a)})}{\delta a} \mid_{(A,a)/f(A^{(a)})=0} e^{-S[A]}$$

3) Escribo el determinante como una integral funcional en “campos turbios” b y c

$$\Delta_{FP} \equiv \mid \frac{\delta f(A^{(a)})}{\delta a} \mid_{(A,a)/f(A^{(a)})=0} = \int DbDce^{-S[b,c]}$$

Ejemplo importante de función de fijado de gauge

$$\mathrm{F(A)}{=}\partial_\mu A^\mu$$

$$A_\mu^{(a)} = A_\mu + \partial_\mu a(x) \longrightarrow F(A^a) = \partial_\mu A^\mu + \partial_\mu \partial^\mu a$$

El Jacobiano (que proviende de la derivada funcional de F respecto a “a”) resulta ser el “determinante” del operador

$$J = \det(\partial_\mu \partial^\mu)$$

Observación: En el caso no abeliano, J depende el propio campo de gauge.

A la hora de calcular el Jacobiano, solo basta ver como transforma la función de fijado de gauge a primer orden

$$\delta_\xi h_{\alpha\beta} = \xi_{\beta;\alpha} + \xi_{\alpha;\beta}$$

$$\delta_\xi h_{++} = 2\nabla_+\xi_+ \qquad \delta_\xi h_{--} = 2\nabla_-\xi_-$$

El “1” será

$$1 = \int D\xi_+ D\xi_- \delta(h_{++}^{\xi_+})\delta(h_{--}^{\xi_-})J$$

J será el producto de los determinantes de $\nabla_+$ y $\nabla_-$

¿ Cual es una condición de fijado de gauge (para los diffeomorfismos) en el caso de cuerdas?

Mediante diffeomorfismos, es posible llevar una metrica a la forma

$$\hat{h}_{ab} = e^{-\phi}\delta_{ab}$$ (gauge conforme)

De modo que en coordenadas complejas, la condición de fijado de gauge se reduce a:

$$\hat{h}_{++} = 0 \quad \hat{h}_{--} = 0$$

La integral funcional., con el 1 insertado, se escribe asi

$$\boxed{I = \int Dh_{+-}Dh_{++}Dh_{--}D\xi^{+}D\xi^{-}\delta(h_{++})\delta(h_{+-})\Delta_{FP}e^{-S_{pol}[X,h]}}$$

La parte turbia del procedimiento requiere introducir unas variables bizarras:

*Variables de Grassmann*

En el caso de cuerdas, estas seran las llamadas b y c. Son la contraparte en la integral funcional de campos cuantizados con reglas de anticonmutación.

Identidad importante

$$\boxed{Det(A_{ij}) = \int e^{-b_i A_{ij} c_j}}$$

para A antisimetrica y b y c variables de Grassmann. Ver:

https://gandhiviswanathan.wordpress.com/2018/10/16/berezin-integration-of-grassmann-variables/

## Fantasmas asociados a la invariancia ante diffeomorphismos

$$\Delta_{FP} = \int DbDcD\bar{b}D\bar{c} \;\; e^{-S_{ghost}[b,c]-S_{ghost}[\bar{b},\bar{c}]}$$

con: $$S_{\text{ghost}} = \frac{1}{2\pi}\int d^2z \;\left(b\,\bar{\partial}c + \bar{b}\,\partial\bar{c}\right)$$ (y la analoga para los campos barrados)

b,c ( y sus barrados) son variables de Grassmann independientes.

Observación:
1) El factor 2π ni tiene importancia; el determinante de Faddeev-Popov tiene algún factor de diferencia con esta elección de la acción
1) las barras sobre los campos en esta instancia no son mas que una notación para diferenciarlos
2) Deberia ir la derivada covariante en vez de la ordinaria. Hay varios pasos intermedios

Estos pasos estan en la Sección 5.2 de las lectures de Tong. Desde un comienzo las variables b y c se obtienen como componentes de un tensor y vector.

$$S_{\text{ghost}} = \frac{1}{2\pi} \int d^2z \ \left( b_{zz} \nabla_{\bar{z}} c^z + b_{\bar{z}\bar{z}} \nabla_z c^{\bar{z}} \right)$$

La derivada covariante puede sustituirse por la derivada ordinaria, usando la forma de la metrica en el gauge conforme

$$\nabla_{\bar{z}} c^z = \partial_{\bar{z}} c^z + \Gamma^z_{\bar{z}\alpha} c^\alpha$$

But the Christoffel symbols are given by

$$\Gamma^z_{\bar{z}\alpha} = \frac{1}{2} g^{z\bar{z}} \left( \partial_{\bar{z}} g_{\alpha\bar{z}} + \partial_\alpha g_{\bar{z}\bar{z}} - \partial_{\bar{z}} g_{\bar{z}\alpha} \right) = 0 \qquad \text{for } \alpha = z, \bar{z}$$

$$S_{\text{ghost}} = \frac{1}{2\pi} \int d^2z \ b_{zz} \, \partial_{\bar{z}} c^z + b_{\bar{z}\bar{z}} \, \partial_z c^{\bar{z}}$$

Cuentas y cuentas:

$$S_{\text{ghost}} = \frac{1}{2\pi}\int d^2z \;\left(b\,\bar\partial c + \bar b\,\partial \bar c\right) \xrightarrow{\text{e.o.m}} \bar\partial b = \partial \bar b = \bar\partial c = \partial \bar c = 0$$

$$b(z)\,c(w) = \frac{1}{z-w} + \dots$$

$$c(w)\,b(z) = \frac{1}{w-z} + \dots$$

$$T(z) = 2 : \partial c(z)\,b(z) : + : c(z)\partial b(z) :$$

De aquí se lee la carga central del sistema bc

$$\boxed{T(z)\,T(w) = \frac{-13}{(z-w)^4} + \frac{2T(w)}{(z-w)^2} + \frac{\partial T(w)}{z-w} + \dots}$$

¿Hay fantasmas asociados a la simetria de Weyl?

$$h_{+-} \rightarrow e^{\phi} h_{+-}$$

$$\delta_{Weyl} h_{+-} = \phi h_{+-} = \phi$$

$$h_{+-} = 1$$

El aporte al Jacobiano completo sería 1. Por tanto, no hay necesidad de fantasmas para la simetría de Weyl.