

# Teorema de Wick con un poco de sal.

(Notas complementarias para el curso de *Simetrías en Física/Supercuerdad y teoría M*)

El teorema de Wick que utilizamos en teoría cuántica de campos involucra el concepto de *orden normal*, que no es uno de los conceptos mas bellos que hayamos conocido. Su definición es de la forma: “Agarra los operadores de creación y ponelos al principio. Si ya lo estaban , dejalos asi”. Ese “agarra” esta muy lejos de los ideales que tuvimos de jovenes al acercarnos a la matematica y la física. Sin embargo, hay que reconocer que esta definición es absolutamente rigurosa. No deja dudas sobre si una expresión, consistente en un producto de operadores de creación y destrucción, está o no normalmente ordenada. Es una definición que puede implementarse en un programa sin que surja ningún problema de comprensión por parte de una computadora.

De todas formas, hay una manera un poco más atractiva de presentar la definición de orden normal, que será desarrollada en estas notas. Lo atractivo de esta otra manera de presentarla es que pone la noción en un contexto mas general y que llama la atención a propiedades lindas de las expresiones normalmente ordenadas.

Para comenzar, voy a introducir una noción similar en el contexto de variables aleatorias gaussianas, de donde tengo entendido se tomó la idea. Luego pasaré al caso relevante para nosotros.

## 1 Teorema de Wick para variables Gaussianas

Consideremos un conjunto de variables  $\{x_i\}$  ( $i = 1..n$ ) aleatorias, dadas por una medida de probabilidad Gaussiana particular. No estoy aca pretendiendo hacer una introducción al concepto desde cero. Doy por sentado cierta familiaridad. Lo relevante para lo que sigue es que , para cualquier función  $f$  de estas variable (una nueva variable aleatoria compuesta), el valor de expectación o media  $E(f)$  (en el sentido probalístico) esta dado por:

$$E(f) = 1/N \int \prod_{i=1}^N dx_i f(x_1, \dots, x_n) e^{-\sum_{i=1}^n (x_i)^2} \quad (1)$$

donde  $N$  es una constante de normalización tal que  $E(1) = 1$ . Note que para darle sentido a esta expresión, en el miembro derecho las  $x_i$  son tratadas como simples numeros reales sobre los cuales se integra.

Con esta medida de probabilidad, se ve que la propia variable  $x_i$  tiene expectación 0 y los valores de expectación de expresiones cuadraticas  $x_i x_j$  tienen la forma:

$$E(x_i . x_j) = \delta_{ij}$$

Como mencionamos, este es un caso particular de variables Gaussianas, donde la media de cada variable es cero, y la matriz de  $n \times n$  de coeficientes  $E(x_i . x_j)$ , llamada *covariancia*, es la matriz identidad. En general, la media de cada variable puede ser no nula y la matriz de covariancia ser cualquier matriz simetrica definida positiva. Lo que sigue no hace uso de el detalle en la matriz de covariancia; lo unico relevante es que la media sea cero. Las variables Gaussianas con media

cero satisfacen esta importante identidad: para cualquier conjunto  $\Phi_j$  de funciones lineales de las variables aleatorias  $x_i$ , vale que:

$$\begin{aligned} E(\Phi_1 \dots \Phi_M) &= 0 \quad M \text{ impar} \\ E(\Phi_1 \dots \Phi_M) &= \sum_P \prod_{(i,j) \in P} E(\Phi_i \Phi_j) \end{aligned} \quad (2)$$

donde  $P$  denota un arreglos de pares de indices (sin importar el orden). Se entiende, no? Es muy incomodo definir esto. Esta propiedad hace de los procesos gaussianos algo muy simple en lo que toca al calculo de el valor de expectación de productos de combinaciones lineales de variables aleatorias elementales.

Una pregunta natural es si esta propiedad se puede extender a combinaciones no lineales de variables aleatorias. De esta busqueda surge la idea de *monomios de Wick* que definiremos. De alguna forma, si pensamos a las  $x_i$  ( o sus meras combinaciones lineales) como atomos, queremos cosntruirmos molculas que conserven parte de las propiedades de sus atomos. La definición de monomio de Wick captura esa idea.

## 1.1 Definición de monomio de Wick (molculas de variables aleatorias)

Dado un conjunto de variables aleatorias  $\Phi_i$  (lineales en las primitivas o atomicas  $x_i$ ) , se define el monomio de Wick

$$: \Phi_1 \dots \Phi_M :$$

como el polinomio:

$$: \Phi_1 \dots \Phi_M : \equiv \sum_P \prod_{(i,j) \in P} (-E(\Phi_i \Phi_j)) \prod_{k \notin P} \Phi_k \quad (3)$$

En el miembro derecho, cada término es igual a la expresion de la izquierda dentro de  $:$   $:$  luego de suprimir pares de variables  $\Phi_i, \Phi_j$ , sustituyendolas por  $-E(\Phi_i \Phi_j)$  (que actua como un numero múltiplicando). A fin de dejar en claro la notación, vemos la definición materializada en ejemplos simples:

$$\begin{aligned} : \Phi_i : &= \Phi_1 \\ : \Phi_i \Phi_j : &= \Phi_i \Phi_j - E(\Phi_i \Phi_j) \\ : \Phi_i \Phi_j \Phi_k : &= \Phi_i \Phi_j \Phi_k - E(\Phi_i \Phi_j) \Phi_k - E(\Phi_i \Phi_k) \Phi_j - E(\Phi_j \Phi_k) \Phi_i \\ : \Phi_i \Phi_j \Phi_k \Phi_l : &= \Phi_i \Phi_j \Phi_k \Phi_l - E(\Phi_i \Phi_j) \Phi_k \Phi_l - E(\Phi_i \Phi_k) \Phi_j \Phi_l - E(\Phi_i \Phi_l) \Phi_j \Phi_k \\ &\quad - E(\Phi_j \Phi_k) \Phi_i \Phi_l - E(\Phi_j \Phi_l) \Phi_i \Phi_k - E(\Phi_k \Phi_l) \Phi_i \Phi_j \\ &\quad + E(\Phi_i \Phi_j) E(\Phi_k \Phi_l) + E(\Phi_i \Phi_k) E(\Phi_j \Phi_l) + E(\Phi_i \Phi_l) E(\Phi_j \Phi_k) \\ &\quad + E(\Phi_j \Phi_k) E(\Phi_i \Phi_l) + E(\Phi_j \Phi_l) E(\Phi_i \Phi_k) + E(\Phi_k \Phi_l) E(\Phi_i \Phi_j) \end{aligned}$$

Como se ve, a medida que aumenta el orden del monomio, la expresión de su monomio de Wick contiene más y mas terminos. Resulta que es posible despejar los productos ordinarios en términos

de los monomios de Wick, con una formula similar, sustituyendo  $E(\Phi_i\Phi_j)$  por  $-E(\Phi_i\Phi_j)$ . En este despeje no se hace uso del hecho de que sean variables gaussianas ni que sean siquiera conmutativas:

$$\Phi_1 \dots \Phi_M \equiv \sum_P \left( \prod_{(i,j) \in P} (E(\Phi_i\Phi_j)) : \prod_{k \notin P} \Phi_k : \right) \quad (4)$$

En un caso particular toma la forma:

$$\begin{aligned} \Phi_1 \Phi_2 \Phi_3 \Phi_4 &= : \Phi_1 \Phi_2 \Phi_3 \Phi_4 : + : \Phi_1 \Phi_2 : E(\Phi_3 \Phi_4) + : \Phi_1 \Phi_3 : E(\Phi_2 \Phi_4) \\ &+ : \Phi_1 \Phi_4 : E(\Phi_2 \Phi_3) + E(\Phi_1 \Phi_2) : \Phi_3 \Phi_4 : \\ + E(\Phi_1 \Phi_3) : \Phi_2 \Phi_3 : + E(\Phi_1 \Phi_4) : \Phi_1 \Phi_3 : \\ &+ E(\Phi_1 \Phi_2) E(\Phi_3 \Phi_4) + E(\Phi_1 \Phi_3) E(\Phi_2 \Phi_4) + E(\Phi_1 \Phi_4) E(\Phi_2 \Phi_3) \\ &+ E(\Phi_1 \Phi_2) E(\Phi_3 \Phi_4) + E(\Phi_1 \Phi_3) E(\Phi_2 \Phi_3) + E(\Phi_1 \Phi_4) E(\Phi_1 \Phi_3) \end{aligned}$$

## 1.2 Propiedades

¿Cuál es la finalidad detrás de esta definición caprichosa?. La siguientes propiedades que mostraremos a continuación responden la pregunta.

$$\begin{aligned} E(: \Phi_1 \dots \Phi_M :) &= 0 \\ E(: \Phi_{j_1} \dots \Phi_{j_M} :: \Phi_{j_{M+1}} \dots \Phi_{j_{M+N}} :) &= 0, \quad N \neq M \\ E(: \Phi_{j_1} \dots \Phi_{j_M} :: \Phi_{j_{M+1}} \dots \Phi_{j_{2M}} :) &= \sum_P \prod_{(j_\alpha, j_\beta) \in P} E(\Phi_{j_\alpha} \Phi_{j_\beta}) \quad N = M \quad \alpha \in \{1..N\} \quad \beta \in \{N+1, 2M\} \end{aligned}$$

(5)

La primera igualdad muestra que nuestra molecula preserva la propiedad de las variables atomicas de tener media o expectación cero. La ultima propiedad establece que la valor de expectación de productos de monomios de Wick del mismo orden es la suma de productos de valores de expectación de pares de variables atomicas pertenecientes a cada molecula. Nunca aparece el valor de expectación entre las variables atomicas de una misma molecula.

Si ahora consideramos valor de expectación de productos de mas de dos monomios de Wick, el resultado sera una suma de valores de expectacion de pares, donde cada elemento del par se toma de un monomio diferente. Una forma grafica de representar cada término en la suma es mediante una linea que conecte las variables entre las cuales se toma el valor de expectación. Por ejemplo:

$$E(: AB :: CD :: EF :) = \overbrace{ABCDEF} + \dots$$

Aquí se muestra uno de los tantos términos que parecerán en la suma. Es importante notar que estas variables diatómicas no retienen todas las propiedades de las variables atómicas. Como se ve de la expresión anterior, el valor de expectación de este producto de 3 variables no es cero (genericamente). Por otro lado, aun en el caso del producto de 4 variables de estas, el valor de expectación no se reducirá al valor de expectación entre pares de variables compuestas: esto se ve en que hay apareamientos de una misma variable diatómica con otras dos.

Otra propiedad muy útil, incómoda para escribir, es la que relaciona  $(\Phi_{j_1} \dots \Phi_{j_M} :: \Phi_{j_{M+1}} \dots \Phi_{j_{2M}}) :$  (producto de monomios de Wick) con una suma de monomios de Wick. En vez de escribirla en toda su generalidad, la escribiremos en el caso simple de un producto de dos monomios de orden 2 cada uno:

$$: \Phi_1 \Phi_2 :: \Phi_3 \Phi_4 := E(\Phi_1 \Phi_3) : \Phi_2 \Phi_4 : + E(\Phi_1 \Phi_4) : \Phi_1 \Phi_3 : + E(\Phi_1 \Phi_3) E(\Phi_2 \Phi_4) + E(\Phi_1 \Phi_4) E(\Phi_1 \Phi_3) \quad (6)$$

La moraleja repetida es que nunca aparecen valores de expectación entre variables Gaussianas atómicas dentro de cada molécula.

Las propiedades siguientes no hacen uso de que las variables sean gaussianas pero sí del hecho de que los productos dentro de  $: \dots :$  conmuten, algo que se cumple trivialmente en el caso de variables gaussianas:

•

$$: Exp(\Phi) := Exp(\Phi) e^{-\frac{1}{2} E(\Phi^2)} \quad (7)$$

Y de esta relación surge una muy útil:

•

$$\prod_{i=1}^N : Exp(\Phi_i) := Exp\left(\sum_{i=1}^N \Phi_i\right) : \prod_{\{i,j\} \in P} Exp(E(\Phi_i \Phi_j)) \quad (8)$$

Como dijimos antes, en la derivación de todas estas relaciones, no hemos usado el hecho de que las variables sean Gaussianas. Solo se usó el hecho de que las dentro de  $: \dots :$  las variables conmutan. En el caso de los operadores de creación y destrucción, no son conmutantes pero lo serán dentro del orden normal. Y por ende valdrán las propiedades anteriores.

## 2 Teorema de Wick para expresiones con operadores de creación y destrucción

Consideremos ahora un conjunto de operadores de creación y destrucción  $a_i^\dagger, a_i$  ( $i = 1 \dots N$ ) independientes, que cumplen:

$$[a_i, a_j^\dagger] = \delta_{ij} \quad (9)$$

La cantidad de estos operadores podría ser infinita y nada cambia. En QFT en un espacio infinito, el índice de estos operadores será continuo y en vez de la delta de Kroenecker tendremos un delta de Dirac. Todo lo que digamos a continuación se aplica a ese caso, con la tolerancia necesaria al escribir expresiones divergentes o de sentido dudoso.

Con estas variables atómicas (que no conmutan entre sí en general), podemos armarnos, al igual que en los procesos gaussianos, combinaciones lineales de ellas, con coeficientes complejos. Vamos a denotar por  $\Phi_i$  a tales variables. El índice  $i$ , al igual que en el caso anterior, no tiene nada que ver con el índice de los operadores de creación y destrucción. Es solo una manera de etiquetar una dada combinación lineal de operadores de creación y destrucción. Hay disponible una cantidad infinita no numerable de  $\Phi_i$ , dado que estas resultan de una combinación lineal arbitraria de las variables primitivas.

Para la siguiente definición daremos por hecho que estamos en un espacio de Hilbert en el que hay un estado  $0 >$  aniquilado por todos los operadores  $a_i$  y donde  $a_i^\dagger$  es el hermitico conjugado. Definiremos el orden normal para el producto  $\Phi_1\Phi_2\dots\Phi_M$  sin apelar al “agarra...” . Lo haremos de la misma manera que lo hicimos para el caso de las variables gaussianas, donde ahora la operación  $E()$ , será sustituida por  $\langle 0\dots 0 \rangle$ , es decir, por el valor de expectación en el vacío del operador correspondiente. veamos que esta definición equivale a la del orden normal usual a través de ejemplos:

$$\begin{aligned} : \Phi_i : &\equiv \Phi_i \\ : \Phi_i \Phi_j : &\equiv \Phi_i \Phi_j - \langle 0 | \Phi_i \Phi_j | 0 \rangle \end{aligned}$$

Veamos si la segunda expresión corresponde a la definición usual. Dado que  $\Phi_1$  y  $\Phi_2$  son combinaciones lineales de operadores de creación y destrucción, basta considerar el caso en que los  $\Phi_i$  y  $\Phi_j$  sean operadores de creación o destrucción. Si ambos son de creación o destrucción, entonces el valor de expectación es cero y por ende esta definición de orden normal deja al producto intacto, como lo hace la definición usual. El caso menos trivial es aquel en el que  $\Phi_i = a_i$  y  $\Phi_j = a_j^\dagger$ . En ese caso, el valor de expectación da  $\delta_{ij}$  y la definición resulta:

$$: a_i a_j^\dagger : := a_i a_j^\dagger - \delta_{ij} = a_j^\dagger a_i$$

Ahi hemos demostrado la equivalencia entre esta definición y aquella con el “agarra” en este caso particular. Más aun, resulta que las variables que son combinaciones lineales de operadores de creación y destrucción satisfacen la propiedad 2, si sustituimos  $E()$  por  $\langle 0 | \dots | 0 \rangle$  como puede chequearse facilmente. Por lo tanto, todo lo discutido antes aplica a este caso de orden normal sin modificación.

**Definición de Orden Normal:** *el orden normal del producto de combinaciones lineales de operadores de creación y destrucción 9 se define de manera identica a 3 con la mera sustitución  $E()$  por  $\langle 0 | \dots | 0 \rangle$ .*

Observación: Es interesante observar que a pesar de que  $\Phi_i$  y  $\Phi_j$  no conmuten, dentro de este orden normal conmutan. Es decir

$$: \Phi_i \Phi_j : := : \Phi_j \Phi_i :$$

Todas las propiedades que vimos para los monomios de Wick se extienden sin más a este cas. Para dejar claro, escribimos algunas de estas propiedades:

$$: Exp(\Phi) := Exp(\Phi) e^{-\frac{1}{2} \langle 0 | (\Phi^2) | 0 \rangle} \quad (10)$$

Y de esta relación surge una muy útil:

$$\prod_{i=1}^N : Exp(\Phi_i) := Exp\left(\sum_{i=1}^N \Phi_i\right) : \prod_{\{i,j\} \in P} e^{\langle 0 | \Phi_i \Phi_j | 0 \rangle} \quad (11)$$

De manera similar, valdrá la expresion que vincula el producto no ordenado en términos del producto ordenado normalmente, con la mera sustitución  $E( )$  por  $\langle 0 | .. | 0 \rangle$ , y en general todas las propiedades (5-8)