GUIA 3B: Interacciones en cuerda bosónica: acción efectiva, fantasmas y contribuciones más allá del orden árbol

En esta guía se toca una serie de conceptos necesarios para la formulación de la integral funcional sobre métricas de hoja de mundo, vistas en las clases prácticas del 20/10 al 12/11. La guía tiene tres bloques. El primero tiene que ver con el manejo del sobreconteo a través de la introducción de fantasmas siguiendo el procedimiento de Faddeev-Popov. El calculo de una amplitud de scattering en el toro o superficies de género más alto va más allá de un curso introductorio. Sin embargo, se verá en esta guía al menos la caracterización del toro a través de su parámetro modular y es útil para ilustrar la finitud ultravioleta en teoría de cuerdas. Por último, se verá algo de la formulación de la teoría de cuerdas en campos de fondos y cómo la cancelación de la anomalía conforme impone restricciones en los campos de fondo permitidos. Una referencia general para esta guía son las páginas 144-170 de las lectures de Tong.

I) Método de Faddeev-Popov en un contexto general

1. Ejemplifique el procedimiento de Faddev-Popov (FP) dándole sentido a la siguiente integral:

$$I = \int dxdye^{-(x-y)^2}$$

eligiendo distintas funciones de "fijado de gauge".

2. En el procedimiento de FP un paso fundamental es la escritura de un determinante funcional como integral Gaussiana (ambas objetos altamente formales. Su definición correcta requiere de una cantidad penosa e interminable de pasos.). A fin de acercarse al problema, considere estos casos particulares:

   (a)
$$\left(\det\left[\frac{\Delta}{2\pi}\right]\right)^{-1/2} = \int [d\phi]\exp\left(-\frac{1}{2}\int d^dx\phi(x)\Delta\phi(x)\right).$$

   Donde Δ es el laplaciano en el espacio plano. Para ello, expanda el campo $\phi(x)$ en un conjunto completo de autofunciones de Δ (para demostrar la identidad no es necesario conocer las autofunciones explícitamente) .

   (b) De manera similar al ejercicio anterior, considere la siguiente identidad,

$$\left(\det\left[\frac{\Delta}{2\pi}\right]\right)^{1/2} = \int [d\psi]\exp\left(\int d^dx\psi(x)\Delta\psi(x)\right).$$

   donde ahora ψ es un campo de Grassmann. Para convencerse de esta última, considere el caso de un número finito de variables de Grassmann, en cuyo caso la integral estará definida sin ninguna necesidad de regularización.

3. Considere una integral de caminos con alguna simetría local. Sea tal invarianza dada por los generadores infinitesimales $\epsilon^\alpha\delta_\alpha$ los cuales satisfacen el álgebra $[\delta_\alpha, \delta_\beta] = f^\gamma_{\alpha\beta}\delta_\gamma$. Una vez

fijado el gauge a través de la condición $F^A(\phi) = 0$, use el método de Faddeev-Popov para demostrar genéricamente que

$$\int \frac{[d\phi_i]}{V_{\text{gauge}}} \, \mathrm{e}^{-S} = \int [d\phi_i dB_A db_A dc^\alpha] \, \mathrm{e}^{-S-S_2-S_3} \, .$$

Donde $S_2 = -iB_A F^A(\phi)$, $S_3 = b_A c^\alpha \delta_\alpha F^A(\phi)$, y el campo B_A se ha introducido para tener una representación integral de $\delta(F^A)$.

II) Aplicación del método de Faddeev-Popov al caso de cuerdas

4. Escriba la integral funcional sobre las métricas hoja de mundo aplicando el procedimiento anterior a fin de factorizar la divergencia asociada a la invariancia ante diffeomorphismos. Muestre que el Jacobiano es el producto de los determinantes de lo operadores ∇_z y $\nabla_{\bar{z}}$ (derivadas covariantes actuando en campos vectoriales).

5. Usando lo anterior, y la reescritura de determinantes en términos de integrales sobre variables de Grassmann, muestre que la acción de los campos fantasmas asociados a la simetría ante diffeomorfismos es:

$$S_{gh} = \int d^2z \left(b\bar{\partial}c + \bar{b}\partial\bar{c} \right) \, ,$$

donde $b, c, \bar{b}, \bar{c}$ son variables de Grassmann independientes. A este modelo de dos campos con esta acción (que se cuantizarán usando reglas de anticonmutación) se lo denomina *sistema bc*.

6. Se puede ver[1] que el tensor energía momento de cada parte de la acción anterior es:

$$T(z) = 2 : \partial c \, b : + : c \partial b :$$

y que el OPE entre b y c es de la forma:

$$b(z)c(w) \sim \frac{1}{z-w} + ...$$

A partir de esto, halle el OPE entre $T(z)$ y $T(w)$ y muestre que el sistema tiene carga central igual a -26.

III) Superficies de Riemann de género superior

7. Considere una métrica plana en el toro $ds^2 = dzd\bar{z}$, siendo z una coordenada compleja sujeta a la identificación: $z \sim z + 2\pi$ y $z \sim z + 2\pi\tau$, siendo τ un parámetro complejo denominado *parámetro modular*.

   (a) Muestre que el retículo que define esa identificación queda invariante ante cambios en el parámetro modular dados por la combinación de transformaciones $\tau \to -1/\tau$ y $\tau + 1$.

   (b) Verifique que con esas dos transformaciones se obtienen distintos elementos del grupo $\mathsf{SL}_2(\mathbb{Z})$. Se puede demostrar, de hecho, que cada transformación de la forma $f(z) = \frac{az+b}{cz+d}$ (con $a, b, c, d \in Z$ y $ad - cb = 1$) se puede obtener al componer un numero finito de veces las dos transformaciones previas.

[1] Sección 5.3.3. de Conformal Field Theory (Di Francesco P , Mathieu P , Senechal D)

8. A partir del teorema de Riemann-Roch, diga cual es la cantidad de parámetros modulares análogos a los del caso del toro que espera en superficies de género mayor.

9. La amplitud con cero patas externas en el toro tiene un significado físico importante. A fin de apreciar esta, considere el análogo en QFT para un campo escalar libre masivo en D dimensiones. El calculo análogo correspondería al logaritmo de la la integral:

$$Z(m) = \int D\phi e^{-\frac{1}{2}\int d^D x \phi(-\partial^2+m^2)\phi} \tag{1}$$

Formalmente, el logaritmo de esta cantidad, $Z_1(m^2) = log(Z(m^2))$, que corresponde a un diagrama que es un un círculo, puede escribirse como:

$$Z_1(m^2) = \frac{1}{2}\int \frac{d^D k}{2\pi^D} log(k^2+m^2)$$

   (a) Muestre que Z_1 admite la siguiente expresión:

$$Z_1(m^2) = \int \frac{d^D k}{(2\pi)^D}\int dl \frac{1}{2l} e^{-(k^2+m^2)l}$$

   .

   (b) Reduzca esta integral a una sola integral en l y verifique la divergencia en esta cantidad esta asociada a la integral en la región l cercana a cero.

10. La integral análoga en cuerdas resulta ser (ver Tong $\sim$ página 147 para su derivación):

$$Z_{\text{cuerdas}} = \int \frac{d^2\tau}{(\operatorname{Im}\tau)^2}\left(\frac{1}{\sqrt{\operatorname{Im}\tau}}\frac{1}{\eta(q)}\frac{1}{\bar{\eta}(\bar{q})}\right)^{24} \tag{2}$$

siendo
$\eta(q) = q^{1/24}\prod_{n=1}^{\infty}(1-q^n)$ y $q = e^{2\pi i\tau}$.

   (a) Muestre que la medida de integración $\frac{d^2\tau}{(Im\ \tau)^2}$ es invariante ante las transformaciones del parámetro τ del grupo $\mathsf{SL}_2(\mathbb{Z})$.
   (b) Usando las propiedades de la η (escritas abajo), muestre que Z es invariante modular
   (c) Comparando con el caso de QFT, vea por qué aquí no se halla la divergencia anteriormente mencionada.

Ayuda: $\eta(\tau+1) = e^{2\pi i/24}\eta(\tau)$. $\eta(-1/\tau) = \sqrt{-i\tau}\eta(\tau)$.

IV) Anomalía conforme en teoría de campos en espacios curvos

11. Como un ejercicio preliminar, verifique con algún paquete de Matemática o Python (o hágalo a mano, o al menos limítese a entender la frase) que, para una métrica de la forma $h' = e^{\omega}h$, el escalar de curvatura transforma como:

$$\sqrt{h'}R' = \sqrt{h}(R - 2\nabla^2\omega)\,,$$

En el caso particular en que h sea la métrica plana, encuentre la ecuación para ω a fin de que R' siga siendo plana. Interprete esas soluciones a la luz de lo que vimos sobre transformaciones conformes. Verifique esa expresión en el caso de la métrica de la esfera de radio R, que se puede escribir localmente como:

$$ds^2 = \frac{4R^4}{R^2 + \mid z \mid^2} dz d\bar{z}$$

y en el caso de la métrica del la superficie del toro con la métrica inducida del espacio euclídeo de R^3, en el archivo subido a la página.

12. Para ciertos modelos de CFT en $d = 2$ formulados en una familia de espacios tiempos que incluya al espacio tiempo plano, la traza del tensor energía-impulso a nivel cuántico es proporcional a la curvatura del espacio, i.e, en dos dimensiones $T^{\alpha}_{\alpha} = a_1 R$, o en coordenadas complejas $T_{z\bar{z}} = \frac{a}{2} g_{z\bar{z}} R$. Deduzca el coeficiente de proporcionalidad a. Para ello, use que a nivel cuántico la divergencia del tensor energía momento sigue siendo cero. Vea los pasos en las notas de Tong (páginas 87-89), donde es importante prestar atenciones a las hipótesis.[2]

V) Cuerdas en en campos de fondo, cancelación de anomalía de Weyl y acción efectiva

13. La teoría de cuerdas formulada en el espacio plano 26 dimensional puede extenderse a una teoría de cuerdas que viven en un espacio tiempo curvo en D dimensiones, interactuando con un campo escalar. La acción puede escribirse así:

$$S[h, X] = \int d^2\sigma \sqrt{h} h^{ab} G_{\mu\nu} \partial_a X^{\mu} \partial_b X^{\nu}$$

14. En el procedimiento de regularización, uno agrega términos a la acción original a fin de cancelar divergencias ultravioletas. En el caso del modelo sigma no lineal, esos términos extras arruinan la simetría de Weyl de la acción original. A fin de ilustrar esto, muestre que:

    (a) Si formalmente se escribe la integral en $d + \epsilon$ dimensiones, y se sustituye la métrica espacio tiempo por la métrica renormalizada, la acción resulta ahora dependiente del factor conforme.

    (b) Usando la definición del tensor energía momento como variación de la acción regularizada respecto a la métrica, muestre que la traza del tensor energía momento es no nula. Halle las ecuaciones para el background G que resultan de pedir la anulación de la traza.

15. De acuerdo al ejercicio anterior, cuando el modelo sigma no lineal se extiende a:

$$S[h, X] = \int d^2\sigma \sqrt{h} \left(h^{ab} G_{\mu\nu} \partial_a X^{\mu} \partial_b X^{\nu} + R^{(2)} \Phi(X) \right)$$

la acción corregida por efectos cuánticos se modifica, de modo que la traza ahora resulta igual a:

[2] El cálculo explícito para el caso del bosón libre se puede ver en el apéndice 5 de Di Francesco P , Mathieu P , Senechal D .

$$< T^a_a >= -\frac{1}{2\alpha'}\beta^G_{\mu\nu}h^{ab}\partial_a X^\mu \partial_b X^\nu - \frac{1}{2}\beta^\phi R^{(2)}$$

con

$$\beta^G_{\mu\nu} = \alpha' R_{\mu\nu} + \alpha' \partial_\nu \Phi \partial^\nu \Phi$$

y

$$\beta^\Phi = \frac{D-26}{6} - \frac{\alpha'}{2}\nabla^2\Phi + \alpha' \nabla_\gamma \Phi \nabla^\gamma \Phi + O(\alpha'^2)$$

Muestre que la siguiente acción reproduce las ecuaciones de movimiento que resultan de la anulación de la traza a primer orden en α':

$$S = cte \int d^{26}X\sqrt{-G}e^{-2\Phi}(R + 4\partial_\mu \Phi \partial^\mu \Phi)$$

16. Considere la extensión del modelo sigma no lineal de forma tal de incluir un acoplamiento con un tensor antisimétrico. Escriba (o mejor dicho, transcriba lo que esta escrito en la bibliografía) las ecuaciones de anulación de anomalía a nivel cuántico, hasta orden α' y la acción efectiva correspondiente.

17. Sabiendo que el número de Euler χ definido en el ejercicio anterior, depende solo de la topología de la hoja de mundo, de una justificación heurística de que la constante de acoplamiento entre cuerdas cerradas está dada por $g_c \equiv e^\lambda$, siendo λ el valor de expectación del dilaton.

VI) Cuestionario final a modo de repaso y como incentivo para leer más

- ¿Por qué no se introducen fantasmas por cada parámetro modular en superficies de género arbitrario?
- ¿Por qué tampoco se han introducido fantasmas asociados a la invariancia ante transformaciones de Weyl?
- ¿ Por qué se pide en cuerdas que la anomalía de Weyl se cancele y no así en una QFT en espacios curvos?
- ¿Cómo esperaría incluir campos de fondo que den cuenta de los estados masivos de la cuerda?
- La acción efectiva tiene un desarrollo en potencias de α'. ¿Tendrá la acción efectiva también una expansión en g_s? Busque en la bibliografía la respuesta.
- ¿Cuál es la justificación heurística detrás de pensar una métrica de fondo (en el espacio ambiente) como un estado coherente de gravitones?