Algebras de Clifford

William Kingdon Clifford (1845–1879)

El concepto de espinor (pero no su nombre) fue introducido por Elie Cartan en 1913

El término “Spinor” fue introducido por Paul Ehrenfest en

En el paper de Dirac del 1928 aparece sin querer el algebra de Clifford

616 P. A. M. Dirac.

These relations can be summed up in the single equation

$$\gamma_\mu \gamma_\nu + \gamma_\nu \gamma_\mu = 2\delta_{\mu\nu}.$$

Ingredientes:

- Espacio vectorial V de dimensión n.
- Forma cuadratica no degenerada

Definición:

El *algebra de Clifford* es el algebra asociativa generada libremente por los **ei** y la identidad 1 sujetos a la condición

$$\boxed{e_i e_j + e_j e_i = 2g(e_i, e_j)\mathbf{1}}$$

Observación: el algebra de Clifford no es ni a palos un algebra de Lie.

Nos interesan espinores en

d=2

(hoja de mundo)

d=10

(Espacio tiempo)

¿Cual es la dimensión del algebra de Clifford?.

Lo que hay que plantearse es cuantas tiras linealmente independientes hay

$$1, \; e_i, \quad e_i e_j, \quad e_i e_j e_k \quad ...$$

Ejemplo: para n=2

$$1, e_1, e_2, e_1 e_2$$

Ejercicio 1: verificar que en general la dimensión es 2^n

Algebra de Clifford en distintas dimensiones

Consideremos por simplicidad el caso en que g es la metrica euclidea y que la base de los ei es ortonormal

Queremos encontrar isomorfismos con álgebras de matrices.

Caso n=2

$$V = \{\sigma_1, \sigma_2\}$$

$$1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$g(e_i e_j) = \frac{1}{2} Tr(e_i e_j)$$

$$\mathcal{C}l(V) = \{1, \sigma_1, \sigma_2, \sigma_1\sigma_2 = i\sigma_3\}$$

Representaciones equivalentes del algebra de Clifford

Supongamos que tenemos dos conjuntos de matrices de la misma dimensíon

$$\{\gamma_i\}, \{\tilde{\gamma}_i\} \quad i = 1...n$$

que cumplen el álgebra de Clifford

Decimos que son representaciones equivalentes si ambas se relacionan por un cambio de base

$$\exists A / \tilde{\gamma} = A \gamma A^{-1}$$

Teorema: en n=par hay una unica representación, a menos de equivalencia (conjugación, término usado en la teorica)

Observaciones: es facil generarse nuevas representaciones a partir de una dada

Por ejemplo, estos conjuntos $\{-\gamma_i\}, \{\gamma_i^T\}, \{\gamma_i^\dagger\}$

cumplen el algebra de Clifford si las γ la cumplen

Ejercicio 2

En el caso n=2, mostrar que las siguientes representaciones son todas equivalentes

$$\{\sigma_1, \sigma_2\} \qquad \{-\sigma_1, \sigma_2\} \qquad \{-\sigma_1, \sigma_3\} \qquad \{-\sigma_1, -\sigma_2\}$$

Ayuda: use las propias matrices de Pauli como matriz de cambio de base.

Signatura Lorentziana

Basta multiplicar por “i” a la matriz con indice “temporal” de la representación
en el caso Euclídeo

Signatura Euclídea (0,2)

$$V = \{\sigma_1, \sigma_2\}$$

$$1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$g(e_i e_j) = \frac{1}{2} Tr(e_i e_j)$$

Signatura Lorentziana (1,1)

$$V' = \{i\sigma_1, \sigma_2\}$$

$$1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$g(e_i e_j) = \frac{1}{2} Tr(e_i e_j)$$

Advertencia sobre las afirmaciones sobre isomorfismos: algebra real o compleja

4. Complex Clifford algebras and the Majorana condition

The Clifford algebras of the previous section are real algebras: we are only allowed to take real linear combinations of products of Γ-matrices. As physicists we have no patience with restrictions of this kind and as a result we end up working with complex Clifford algebras. The immediate simplification is that all complex Clifford algebras of the same dimension are isomorphic:

Algoritmo para obtener representaciones en dimensión mas alta.

Supongamos que tenemos una rerpresentación en dimensión par d=2k, dada por matrices γμ (signatura (-/+,+,+,+,+...+)), μ=0,1,...d-1

Representación en d+1:
d+1 matrices del mismo ranngo

$$\Gamma_\mu = \gamma_\mu$$

$$\Gamma_d = \epsilon(d)\gamma_1\gamma_2...\gamma_{d-1} \equiv \gamma_{d+1}$$

(la peor notación jamas inventada)

Ejercicio 3: halle ε , a menos de un signo, y muestre que se cumple el álgebra de Cliiford.

Representación en d+2:
d+2 matrices del doble de rango

$$\Gamma_\mu = 1 \otimes \gamma_\mu$$

$$\Gamma_d = \sigma_1 \otimes \gamma_{d+1}$$

$$\Gamma_{d+1} = \sigma_3 \otimes \gamma_{d+1}$$

Ejercicio: Muestre a partir de la representación anterior que en dimensión impar hay al menos dos representaciones inequivalentes.

Resolución: Considere en el caso d impart el producto

$$\Gamma_d \gamma_0 \ldots \gamma_{d-1}$$

1) Muestre que esta es proporcional a la identidad
2) Observe que con las dos elecciones de signo para Γ_d obtendra dos múltiplos de la identidad
3)Concluya que no puede existir un cambio de base que relacione ambas matrices.

Con el algortimo previo, empezando con la representación de las matrices γ en d=2, obtenemos representacione de dimensión

$$2^{[\frac{d}{2}]}$$

$$[\ \ ] = parte\ entera\ de$$

Observación: No confundir dimensión del algebra de Clifford con la dimensión de estas representaciones, que son las de minima dimensión. Hay alguna relación desde ya

Dimensión de algebra (real de) Clifford: 2^{d}

Dimensión de la representación de dimensión minima: $2^{[\frac{d}{2}]}$

¿Es posible tener representaciones con matrices reales o imaginarias puras?

Ejemplo del caso d=2 (-,+)   can ambas reales

$$\gamma_0 = i\sigma_2 \quad \gamma_1 = \sigma_1$$

Similarmente, pueden obtenerse representaciones donde ambas son imaginaria puras

$$\gamma_0 = i\sigma_1 \quad \gamma_1 = \sigma_2$$

Esta cuestión es relevante por lo siguiente

Algebra de Lorentz/rotaciones a partir del álgebra de Clifford

Ejercicio 4: Muestre que las matrices

$$M_{\mu\nu} \equiv \frac{i}{4}[\gamma_\mu, \gamma_\nu]$$

satisfacen el algebra de Lorentz/rotaciones:

$$[M_{\mu\nu}, M_{\rho\sigma}] = i(g_{\nu\sigma}\Sigma_{\mu\rho} + g_{\nu\rho}\Sigma_{\mu\sigma} - \sigma \leftrightarrow \rho)$$

Obs: es una paja.

Un Pequeño parentesis: ¿De donde sale esta relación?

¿Es valida siempre, en cualquier representación?

$$\gamma_\mu^\dagger = \gamma_0 \gamma_\mu \gamma_0$$

Esta relacion, junto a la del anticonmutador, dice equivale a

$$\gamma_u^\dagger = (\gamma_\mu)^{-1}$$ (chequear que lo es)

No se espera que valga eso siempre. Pero parecería que hay algun teorema que garantiza que existe siempre una representación unitaria del algebra de Clifford.

Condición de Mayorana

En representacione donde las matrices γ sean reales o imaginarias puras,
Σ sera imaginaria pura y por ende

$$S(\omega) = e^{i\frac{1}{2}\omega^{\mu\nu}\Sigma_{\mu\nu}}$$

será una matriz real.

De modo que es consistente restringir a los *espinores* a la condición de ser reales o imaginarios puros. Estos son los espinores de Mayona.

Es decir, existira en tal caso una representación real de ese grupo que resulta de la exponencial

¿En que dimensiones es posible hallar una representación del algebra de Clifford con matrices reales o imaginarias puras?

La respuesta viene de este isomorfismo (que lo vamos a creer) entre el algebra de Clifford y el algebras de matrices para el caso general con signatura (p,q)

(+,+,+,...., -,-,-,-...)

p q

$p-q$ mod 8	ω^2	$Cl_{p,q}(\mathbf{R})$ ($n = p+q$)	$p-q$ mod 8	ω^2	$Cl_{p,q}(\mathbf{R})$ ($n = p+q$)
0	+	$M(2^{n/2},\mathbf{R})$	1	+	$M(2^{(n-1)/2},\mathbf{R})\oplus M(2^{(n-1)/2},\mathbf{R})$
2	−	$M(2^{n/2},\mathbf{R})$	3	−	$M(2^{(n-1)/2},\mathbf{C})$
4	+	$M(2^{(n-2)/2},\mathbf{H})$	5	+	$M(2^{(n-3)/2},\mathbf{H})\oplus M(2^{(n-3)/2},\mathbf{H})$
6	−	$M(2^{(n-2)/2},\mathbf{H})$	7	−	$M(2^{(n-1)/2},\mathbf{C})$

En el caso nuestro de interes (minkowskiano)

p-q=d-2

Vemos que hay isomorfismos con matrices reales en d=2,3,4 mod 8

¿En que dimensiones encontramos representaciones imaginarias puras o reales?

Notemos que si encontramos representaciones reales en (p,q), multiplicando por i hallaremos representaciones imaginarias puras en (q,p)!

De modo que el caso en que tenemos representaciones reales o imaginarias surje de plantear

$$p - q = | d - 2 | = 0, 1, 2 \mod 8$$

$$\downarrow$$

d=0,1,2,3,4 mod 8

(0 no tiene sentido pero se pone para reproducir las dimensiones multiplos de 8)

Asi se explica la columna *Mayorana* de la tabla del siguiente slide, tomada del apendice A del vol 2 del libro de Polchinski

Ejercicio: rehaga esa tabla para el caso de signatura euclidea. Es decir,

Nos interesa el caso d=2 principalemente, dado que nos permitira elegir espinores reales en ese caso. No hacia falta conocer toda esto para saber que en d=2 tenias representaciones reales o imaginarias puras!

Table B.1. *Dimensions in which various conditions are allowed for $SO(d-1,1)$ spinors. A dash indicates that the condition cannot be imposed. For the Weyl representation, it is indicated whether these are conjugate to themselves or to each other (complex). The final column lists the smallest representation in each dimension, counting the number of real components. Except for the final column the properties depend only on d mod 8.*

d	Majorana	Weyl	Majorana–Weyl	min. rep.
2	yes	self	yes	1
3	yes	-	-	2
4	yes	complex	-	4
5	-	-	-	8
6	-	self	-	8
7	-	-	-	16
8	yes	complex	-	16
9	yes	-	-	16
10=2+8	yes	self	yes	16
11=3+8	yes	-	-	32
12=4+8	yes	complex	-	64

Weyl

En d= par temos las representacioes espinoriales del grupo de Lorentz se descomponen en suma de directa de dos representaciones

Esta descomposición se puede hallar proyectando en subespacios de quilalidad definida, es decir, en autoespacios de la matriz

$$\gamma_{d+1} \sim \gamma_0 \gamma_1 \ldots . \gamma_{d-1}$$

Esta matriz, con la constante adecuada, es hermitica y tiene autovalores +1 y -1. Sus dos autoespacios tienen la mitad de la dimensión de la representación completa: 2^{D/2 -1}

¿Porque no funciona esta construcción en d= impar?

El sueño del pibe: Mayorana-Weyl

Queremos tener un subesapcio de los espinores de Dirac, invariante ante las tranformaciones de Lorentz, formado por

$$\psi \quad /$$

$$\gamma_{d+1}\psi = \pm\psi \quad y \quad \psi = Real$$

En otras palabras, γ_d+1 deberia, en la representacion en que las γ son reales o imaginarias puras, ser una matriz real.

$$\gamma_{d+1} = i^{-\frac{d-2}{2}}\gamma_0\gamma_2\ldots\gamma_{d-1}$$

Real para $\frac{d-2}{2} = par$

Matriz real en representaciones de mayorana (con d=par)

Mayorana-Weyl existe en d tal que

d=0,1,2,3,4 mod 8 y d=2 mod 4 $\longrightarrow$ $\boxed{\text{2 mod 8}}$

(dimensiones de mayorana)

Observación: en dimensiones donde no existen representaciones de Mayorana, tiene sentido aún la noción de representación real o compleja. Esa noción esta implita en la segunda colum de la tabla. Para ello, necesitamos una noción más:

$$-(\gamma_\mu)^* \quad y \quad -(\gamma_\mu)^T$$

son algunas de las tantas representaciones equivalentes del algebra de Clifford (en cualquier dimensión). Considerando la primera:

$$\downarrow$$

$$\exists B /$$
$$B\gamma_\mu B^{-1} = -(\gamma_\mu)^*$$

De modo que, para cada espinor de Dirac, Ψ podemos definir

$$\Psi^c \equiv B\Psi^*$$

Ψ^c ante Lorentz transforma como:

$$(\Psi^c)' = B(\Psi')^* = B(S\Psi)^* = S^* B\Psi^* = S^*\Psi^c$$

El punto es que B conmuta con la matriz de quiralidad solo en d=2 mod 4 (ver apendice de Polchinski o hagalo usted mismo)

De modo que tiene sentido distinguir representaciones de Weyl (con espinores complejos) según sean estas invariantes ante la conjugación dada por la operación anterior (conjugar y actuar con B)

Self y complex se refiere a esa propiedad, que tiene sentido formularla en d= par donde existe la noción de quilalidad.

Ejemplo; en d=2, cada representación de Weyl es su propia conjugada
en d=4 no ocurre eso.

Esta conjugación no debe confundirse con la conjugacíon de carga, definida de la siguiente manera

Matriz de conjugación de carga C

C /

$$C\gamma_\mu C^{-1} = -\gamma_\mu^T$$

El espinor conjugado de carga se define de manera similar al caso anterior.
pero con algunos γ0 adicionales. No es importante pero esta es la definición:

$$\psi^{Conj.Carga} = C^{-1}\bar{\psi}^T = C^{-1}(\gamma^0)^T\psi^*$$

Esta operación rebuscada esta motivada por el hecho de que transforma soluciones
de particula en soluciones de anti-particula en la ecuacíon de Dirac cuando hay acoplamiento
con un campo electromagnetico externo

Si estamos en una representación en que las γ son reales (representación de Mayorana) entonces $-\gamma_0$ cumple ese rol:

$$\gamma_0\gamma_\mu{\gamma_0}^{-1} = -\gamma_0\gamma_\mu\gamma_0 = -\gamma^\dagger = -\gamma^T$$

Esta observación es usada en las notas de Lambert

Por supuesto, C puede elegirse proporcional a γ_0 , con cualquier constante de proporcionalidad. Parte de la arbitrariedad se elimina pidiendo que $C^2=-1$, de forma tal que operar

¿Que pasa con las CFT? ¿Violan alguna premisa?

PHYSICAL REVIEW VOLUME 159, NUMBER 5 25 JULY 1967

All Possible Symmetries of the S Matrix*

SIDNEY COLEMAN† AND JEFFREY MANDULA‡
Lyman Laboratory of Physics, Harvard University, Cambridge, Massachusetts

(Received 16 March 1967)

We prove a new theorem on the impossibility of combining space-time and internal symmetries in any but a trivial way. The theorem is an improvement on known results in that it is applicable to infinite-parameter groups, instead of just to Lie groups. This improvement is gained by using information about the S matrix; previous investigations used only information about the single-particle spectrum. We define a symmetry group of the S matrix as a group of unitary operators which turn one-particle states into one-particle states, transform many-particle states as if they were tensor products, and commute with the S matrix. Let G be a connected symmetry group of the S matrix, and let the following five conditions hold: (1) G contains a subgroup locally isomorphic to the Poincaré group. (2) For any $M>0$, there are only a finite number of one-particle states with mass less than M. (3) Elastic scattering amplitudes are analytic functions of s and t, in some neighborhood of the physical region. (4) The S matrix is nontrivial in the sense that any two one-particle momentum eigenstates scatter (into something), except perhaps at isolated values of s. (5) The generators of G, written as integral operators in momentum space, have distributions for their kernels. Then, we show that G is necessarily locally isomorphic to the direct product of an internal symmetry group and the Poincaré group.