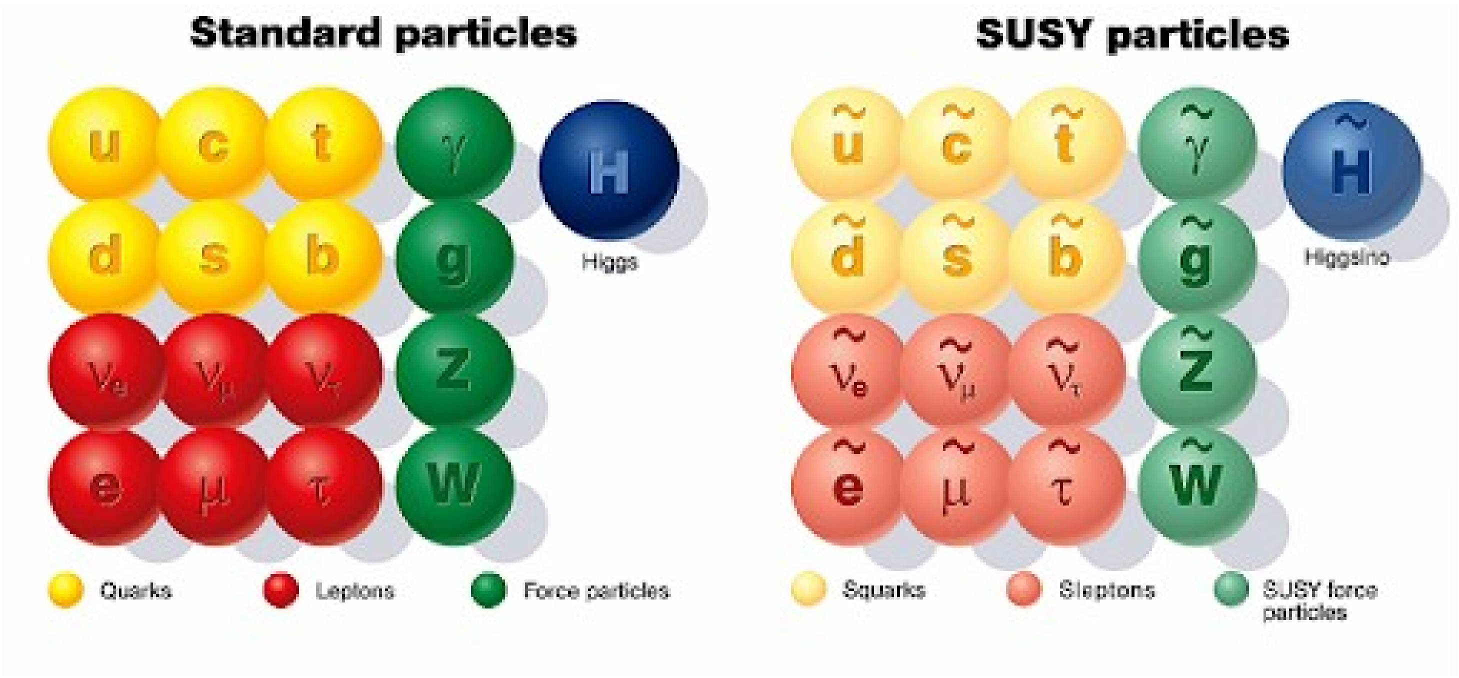
Supersimetría: nociones elementales



Primer paso : Algebra Z_2 graduada

subespacio de grado cero

$$V = V_0 \oplus V_1$$

Espacio vectorial

subespacio de grado 1

Producto entre dos elementos denotado por $\{\ ,\ ]$

$$\{V_0, V_0] \subseteq V_0 \qquad \{V_0, V_1] \subseteq V_1 \qquad \{V_1, V_1] \subseteq V_0$$

Segundo paso: propiedad del producto en subespacios de grado definido

Para x e y de grado definido (denotado por [x], [y] respectivamente), se pide que el producto satisfaga:

$$\boxed{\{x, y] = (-1)^{1+[x][y]}\{y, x]}$$

$$\{\ ,\ ] \begin{cases} \text{simetrico} \quad \text{cuando uno de los dos es de grado 0} & [\ ,\ ] \\ \text{antisimetrico} \quad \text{cuando los dos son de grado 1} & \{\ ,\ \} \end{cases}$$

Tercer paso : identidad de super-Jacobi para elementos de grado definido

$$(-1)^{[x][z]}\{x,\{y,z]] + (-1)^{[y][x]}\{y,\{z,x]] + (-1)^{[z][y]}\{z,\{x,y]] = 0$$

Ejercicio 1 verificar que se cumple identicamente para el caso en que el producto se reduce a conmutadores o anticonmutadores

Ejemplo de superalgebras

I) Par de osciladores bosonicos y fermionicos

$$\begin{aligned} [a, a^\dagger] &= \{b, b^\dagger\} = 1 \\ \{b, b\} &= [a, b] = [a, b^\dagger] = 0 \end{aligned}$$

(mas las que vengan de daggear estas)

II) Un modelo de juguete de super Poincare

$$\begin{aligned} H &= \omega_1 a^\dagger a + \omega_2 b^\dagger b \\ Q &= a^\dagger b + b^\dagger a \end{aligned}$$

$$[Q, H] = (\omega_1 - \omega_2) Q$$
$$\{Q, Q\} = 2(a^\dagger a + b^\dagger b)$$

H y Q no forman una super algebra a menos que $\omega_1 = \omega_2 \equiv \omega$

$$\boxed{[Q, H] = 0 \quad \{Q, Q\} = \frac{2}{\omega} H \quad [H, H] = 0}$$

Si Ω es aniquilado por a y b: $Q a^\dagger \Omega = b^\dagger \Omega \;\; ; Q b^\dagger \Omega = a^\dagger \Omega$

Q intercambia “bosones” por “fermiones”

Estructura de algebra de Poincare

Espacio vectorial suma directa de P y M
(generadores de traslaciones y transformaciones de Lorentz)

$$\begin{aligned} [P, P] &= 0 \\ [M, P] &\subseteq P \\ [M, M] &\subseteq M \end{aligned}$$

Estructura de algebra de supersimetría (N=1)

Espacio vectorial suma directa de P , M y unas nuevas cosas llamadas Q, de caracter espinorial, que queremos que sean de grado 1

$$\begin{aligned} [P, P] &= 0 \\ [M, P] &\subseteq P \\ [M, M] &\subseteq M \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} [Q, P] &= 0 \\ \{Q, Q\} &\subseteq P \\ [M, Q] &\subseteq Q \end{aligned}$$

Restricciones de superJacobi

$$(-1)^{[x][z]}\{x,\{y,z]] + (-1)^{[y][x]}\{y,\{z,x]] + (-1)^{[z][y]}\{z,\{x,y]] = 0$$

Ejemplos

$$[Q,[P,M]] + [P,[M,Q]] + [M,[Q,P]] = 0$$

$$\{Q,[Q,M]\} - \{Q,[M,Q]\} + [M,\{Q,Q\}] = 0 \qquad ?$$

$$[Q,[P,M]] + [P,[M,Q]] + [M,[Q,P]] = 0$$

El algebra en detalle, en dimensions en las que hay espinores de Mayorana

$$\boxed{\begin{aligned} \{Q_\alpha, Q_\beta\} &= -2\left(\gamma^\mu C^{-1}\right)_{\alpha\beta} P_\mu \\ [Q_\alpha, P_\mu] &= 0 \\ [Q_\alpha, M_{\mu\nu}] &= \frac{i}{2}\left(\gamma_{\mu\nu}\right)_\alpha^{\ \beta} Q_\beta \end{aligned}}$$

C es la matriz de conjugación de carga. En la representación de Mayorana puede elegirse como -γ_0

$$\gamma_{\mu\nu} \equiv \frac{1}{4}[\gamma_\mu, \gamma_\nu]$$

Igual numero de bosones y fermiones en un multiplete: argumento

Operador $(-1)^F$

F=0, si el estado es bosonico

F=1, si el estado es fermionico

$$Q \mid B >= F > \quad Q \mid F >=\mid B > \longrightarrow \{(-1)^F, Q_a\} = 0$$

Ejercicio 2: Mostrar que $\mathrm{Tr}((-1)^F\{Q_a, Q_b\}) = 0$

$$0 = \mathrm{Tr}((-1)^F\{Q_\alpha, Q_\beta\}) = -2\left(\gamma^\mu C^{-1}\right)_{\alpha\beta} P_\mu \mathrm{Tr}((-1)^F)$$

Obs: Q no me mueve dentro del espacio de Fock aumentando el numero de partículas y cambiando la energía

Supermultipletes en forma mas concreta

El algebra de Clifford puede reescribirse como el algebra de operadores de creación y destrucción anticonmutantes

Considermos el algebra de Clifford en signatura Euclidea para simplificar y en dimensión par

$$\Gamma^a_\pm = \frac{1}{2}(\Gamma^{2a} \pm i\Gamma^{2a+1}) \quad a = 1, 2, .. \frac{d}{2}$$

$$\downarrow$$

$$\{\Gamma^a_+, \Gamma^b_-\} = \delta^{ab}$$

$$\{\Gamma^a_+, \Gamma^b_+\} = \{\Gamma^a_-, \Gamma^b_-\} = 0 \longrightarrow (\Gamma^a_+)^2 = (\Gamma^a_-)^2 = 0$$

Conjetura de Eric: la dimensión de las representaciones del algebra de Clifford tienen relación directa con la dimensión del algebra de Clifford

En efecto, a partir de la forma del algebra anterior, considerando una representación de dimensión finita. existira un vector ξ aniquilado por todos los “operadores de destrucción”.

La representación standard de las matrices de Dirac en dimensión par surje de actuar en ξ con los operadores de creación y destrucción

Esta representación tiene 2^{d} vectores

Podemos entonces representar las matrices en el espacio vectorial construído asi.

Ejemplo d=2 signatura Euclídea

Estado fundamental: ξ_0

Unico estado “excitado”: $$\Gamma^{+}\xi_0 = \xi_1$$

Podemos obtener la forma matricial de las matrices de Dirac:

$$\begin{aligned}\Gamma_+\xi_0 &= \xi_1 \quad \Gamma_+\xi_1 = 0\\ \Gamma_-\xi_0 &= \xi_1 \quad \Gamma_-\xi_1 = (1-\Gamma_+\Gamma_-)\xi_0 = \xi_0\end{aligned}$$

$$\Gamma_+ = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \qquad \Gamma_- = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Supermultipletes en el caso masivo

$$\{Q_\alpha, Q_\beta\} \quad = \quad -2\left(\gamma^\mu C^{-1}\right)_{\alpha\beta} P_\mu$$

Considerando el sistema en reposo

$$\{Q_\alpha, Q_\beta\} \quad = \quad 2m\delta_{ab}$$

Los Q cumplen algebra de Clifford. Podemos repetir la construcción anterior.

Tendremos dos estados, con numeros fermionicos opuestos.

Ejercicio: repetir el analisis en el caso d=4. Mostrar que hay 4 estados , con igual cantidad de fermiones que bosones.

Invariancia ante operador de supersimetria

Tomando la traza:

$$\{Q_\alpha, Q_\beta\} = -2\left(\gamma^\mu C^{-1}\right)_{\alpha\beta} P_\mu$$

se llega (ejercicio):

$$\sum_\alpha \{Q_\alpha, Q_\alpha\} = 2^{[D/2]+1} P_0$$

Tomado de las notas de SUSY de Lambert

Finally we note that the condition $[Q_\alpha, M_{\mu\nu}] = \frac{i}{2}(\gamma_{\mu\nu})_\alpha{}^\beta Q_\beta$ implies that states in a supermultiplet will have spins that differ in steps of 1/2. In an irreducible mutliplet there is a unique state $|j_{max}>$ with maximal spin (actually helicity). The remaining states therefore have spins $j_{max} - 1/2, j_{max} - 1, \ldots.$

- In a famous *No-go theorem* (Coleman, Mandula 1967) said that the most general symmetry of the S - matrix is Poincaré $\times$ internal, that cannot mix different spins (for example), if you still require there to be interactions

- Golfand and Licktman (1971) extended the Poincaré algebra to include spinor generators Q_α, where $\alpha = 1, 2$.

- Ramond,Neveu-Schwarz, Gervais, Sakita (1971): devised supersymmetry in 2 dimensions (from string theory).

- Wess and Zumino (1974) wrote down supersymmetric field theories in 4 dimensions. They opened the way for many other contributions to the field. This is often seen as the actual starting point on systematic study of supersymmetry.

- Haag, Lopuszanski, Sohnius (1975): generalised the Coleman Mandula theorem to show that the only non-trivial quantum field theories have a symmetry group of super Poincareé group in a direct product with internal symmetries.

Nota historica

EXTENSION OF THE ALGEBRA OF POINCARE GROUP GENERATORS AND VIOLATION OF P INVARIANCE

Yu.A. Gol'fand and E.P. Likhtman
Physics Institute, USSR Academy of Sciences
Submitted 10 March 1971
ZhETF Pis. Red. 13, No. 8, 452 - 455 (20 April 1971)

One of the main requirements imposed on quantum field theory is invariance of the theory to the Poincare group [1]. However, only a fraction of the interactions satisfying this requirement is realized in nature. It is possible that these interactions, unlike others, have a higher degree of symmetry. It is therefore of interest to study different algebras and groups, the invariance with respect to which imposes limitations on the form of the elementary particle interaction. In the present paper we propose, in constructing the Hamiltonian formulation of the quantum field theory, to use as the basis a special algebra $\mathcal{R}$, which is an extension of the algebra $\mathcal{P}$ of the Poincare group generators. The purpose of the paper is to find such a realization of the algebra $\mathcal{R}$, in which the Hamiltonian operator describes the interaction of quantized fields.

$$[M_{\mu\nu},\ M_{\sigma\lambda}]_- = i(\delta_{\mu\sigma}M_{\nu\lambda} + \delta_{\nu\lambda}M_{\mu\sigma} - \delta_{\mu\lambda}M_{\nu\sigma} - \delta_{\nu\sigma}M_{\mu\lambda});\quad [P_\mu,\ P_\nu]_- = 0;$$

$$[M_{\mu\nu},\ P_\lambda]_- = i(\delta_{\mu\lambda}P_\nu - \delta_{\nu\lambda}P_\mu);\quad [M_{\mu\nu},\ \Psi]_- = \frac{i}{4}\ [\gamma_\mu,\ \gamma_\nu]_-\Psi;\quad \bar{\Psi} = \Psi^*\gamma_0. \tag{1a}$$

$$[\Psi_\pm,\ \bar{\Psi}]_+ = \dot{\gamma}_\mu P_\mu;\quad [\Psi,\ \Psi]_+ = 0;\quad [P_\mu,\ \Psi]_- = 0. \tag{1b}$$

Ejemplos de Lagrangianos supersimetricos

Susy on-shell

$$S = \int d^4x \left(\partial_\mu \phi \partial^\mu \phi^* - i\bar{\psi}\bar{\sigma}^\mu \partial_\mu \psi \right)$$

Susy off shell

$$S' = S + S_{\mathrm{aux}} = \int d^4x \left(\partial_\mu \phi \partial^\mu \phi^* - i\bar{\psi}\bar{\sigma}^\mu \partial_\mu \psi + f^* f \right)$$

Presentación de la acción de Supercuerda (gauge fijado y sin campo auxiliar)

D campos escalares y espinores

$$\mathcal{S} = -\frac{1}{4\pi}\int d^2\sigma \left(\frac{1}{\alpha'}\eta^{ij}\partial_i x^\mu \partial_j x_\mu + \bar{\psi}^\mu \Gamma^i \partial_i \psi_\mu\right)$$

Uso coordenadas complejas y que los espinores son de Mayorana-Weyl

$$\mathcal{S} = \frac{1}{4\pi}\int d^2 z \left(\frac{2}{\alpha'}\partial x^\mu \bar{\partial} x_\mu + \psi^\mu \bar{\partial}\psi_\mu + \widetilde{\psi}^\mu \partial \widetilde{\psi}_\mu\right)$$